

УДК 519.113.3

ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕРНУЛЛИ

М. С. Беспалов

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, г. Владимир, Россия

В пространстве дискретных периодических функций с условием нормировки (сумма значений отсчётов по периоду равна нулю) рассматриваются операции циклической свертки, конечной разности и дискретного преобразования Фурье. Приводится обзор свойств дискретных периодических функций Бернулли, выделенных в качестве основного объекта изучаемой структуры. Дискретные периодические функции Бернулли положительного порядка практически идентичны конструкции специальных чисел и многочленов, введённых М. С. Беспаловым и Н. М. Коробовым.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, циклическая свертка, конечная разность, производящая функция, числа и многочлены Коробова.

DOI 10.17223/20710410/43/2

BERNOULLI'S DISCRETE PERIODIC FUNCTIONS

M. S. Bepalov

Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia

E-mail: bepalov@vlsu.ru

This paper is a survey of known and some new properties of the discrete periodic Bernoulli functions $b_n(j)$ of order n introduced by V. N. Malozemov and viewed as elements $x = x(0)x(1)\dots x(N-1) \in \mathbb{C}_0^N \subset \mathbb{C}^N$ with the normalization condition $\sum_{k=0}^{N-1} x(k) = 0$. It is proved that the operator $\Delta : \mathbb{C}_0^N \rightarrow \mathbb{C}_0^N$ where $\Delta[x] = y = y(0)y(1)\dots y(N-1)$, $y(k) = x(k+1) - x(k)$, is a bijection and $\Delta[b_n] = b_{n-1}$. Moreover, according to Malozemov's result, the set of the discrete periodic Bernoulli functions is an infinite cyclic group relative to the cyclic convolution $x * y(s) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)y(s-j)$ with a neutral element b_0 , and $b_n * b_m = b_{n+m}$. It is proved that either the set of $N-1$ cyclic shifts $x^{k \rightarrow}(j) = x(j-k)$ of any discrete periodic Bernoulli function or the set $\{b_m, b_{m+1}, \dots, b_{m+N-2}\}$ yields a basis of the space $\mathbb{C}_0^N$. The generating function $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ of a sequence of discrete periodic Bernoulli functions is calculated. Formulas $\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2m}(\pi k/N)$, $m \in \mathbb{Z}$, for calculating the sums of even degrees of sinuses at equidistant nodes of a circle are found by means of these functions and the discrete Fourier transform. It has been established that a cyclic shift by 1 and the multiplication by $-N$ transform these functions of positive order into special polynomials $P_n(k)$, which were introduced by Bepalov and Korobov and have become popular as the Korobov polynomials of the first kind in the form $K_n(x) = n!P_n(x)$.

We have calculated the Korobov numbers $K_n = -n! \cdot N \cdot b_n(1)$ up to K_{13} and the Korobov polynomials up to $K_7(x)$ for any array size (parameter) N .

Keywords: *discrete Fourier transform, cyclic convolution, finite difference, generating function, Korobov numbers and Korobov polynomials.*

Введение

Дискретные периодические функции Бернулли (далее именуются как *сигналы Бернулли*) введены в [1] и изучались в отдельных докладах семинара «Дискретный гармонический анализ и геометрическое моделирование» [2]. Полученные для них результаты собраны в учебном пособии [3]. Представление В-сплайнов на сетке через сигналы Бернулли предложено в [4]. Конструкция сигналов Бернулли положительного порядка практически идентична конструкции специальных чисел и многочленов, введённых в [5, 6] и ставших популярными (после публикации работ А. В. Устинова [7, 8]) в виде чисел и многочленов Коробова. Предложенное в [1] название объясняется тем, что дискретные периодические функции Бернулли служат аналогом на сетке чисел и многочленов Бернулли.

Приведённый в данной работе обзор свойств сигналов Бернулли предваряется напоминанием свойств чисел и многочленов Бернулли, описанием пространства сигналов и операций в нём. В качестве практического применения сигналов Бернулли приведён способ вычисления через них тригонометрических сумм, в п. 6 указана связь сигналов Бернулли с позднее введёнными числами и многочленами Коробова.

1. Числа и многочлены Бернулли

Числа Бернулли B_k вычисляются по рекуррентной формуле

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0, \quad (1)$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, с начальным условием $B_0 = 1$. В частности, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$. Все числа Бернулли с нечётными номерами, кроме B_1 , равны нулю.

Многочлены Бернулли определяются через их разложение по степеням x , где участвуют числа Бернулли:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k x^{n-k}. \quad (2)$$

В частности, $B_0(x) \equiv 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Из (2) вытекает, что $B_n = B_n(0)$.

Приведём отдельные свойства многочленов Бернулли:

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \quad \text{— теорема дополнения;} \quad (3)$$

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k(y) x^{n-k} \quad \text{— теорема сложения аргументов;} \quad (4)$$

$$B'_n(x) = n B_{n-1}(x);$$

$$\int_0^1 B_n(x) dx = 0 \quad \text{— нормировка;} \quad (5)$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \quad \text{— вычисление конечной разности.}$$

В последнее время более удобным считается [8] определение чисел и многочленов Бернулли через экспоненциальную производящую функцию:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n, \quad \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.$$

2. Пространство сигналов

Основной класс *дискретных функций* — функции, заданные на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, то есть двусторонние последовательности. При цифровой обработке сигналов (ЦОС) рассматривают *дискретные периодические* (с периодом N : $x(k + N) = x(k)$) функции, которые для сокращения записи будем называть *сигналами*. Пространство (периодических) сигналов обозначим $\mathbb{C}^N$, выделяя основную часть сигнала $x \in \mathbb{C}^N$ вида $x = (x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1))$.

Матрицу *прямого дискретного преобразования Фурье* (ДПФ) порядка N определим поэлементно (далее N фиксируем)

$$F = F_N = (\omega^{-kj})_{k,j=0}^{N-1}, \quad (6)$$

где $\omega = \omega_N = \exp(2\pi i/N)$. При ЦОС исходный сигнал x преобразуется линейным оператором (6) в выходной сигнал (*спектр Фурье* сигнала x): $y = x \cdot F$; перепишем его в развернутом виде

$$y(s) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega^{-sj}, \quad (7)$$

откуда вытекает периодичность сигнала y .

Оператор *обратного дискретного преобразования Фурье* определяется комплексно-сопряжённой матрицей $\overline{F_N}$:

$$F^{-1} = \frac{1}{N} \cdot \overline{F_N} = \frac{1}{N} (\omega^{kj})_{k,j=0}^{N-1}. \quad (8)$$

Операторная запись для (7): $y = \mathcal{F}[x]$; для восстановления: $x = \mathcal{F}^{-1}[y]$.

Другие основные операции над $x, y \in \mathbb{C}^N$:

- 1) линейные операции — сложение сигналов и умножение на число;
- 2) умножение сигналов в виде покомпонентного умножения

$$x \circ y = (x(0) \cdot y(0) \quad x(1) \cdot y(1) \quad \dots \quad x(N-1) \cdot y(N-1));$$

- 3) циклическая свертка

$$x * y(s) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) y(s-j), \quad s \in \mathbb{Z};$$

- 4) циклический сдвиг (вправо): $x^{k \rightarrow}(j) = x(j-k)$,
в частности, $x^{N \rightarrow} = x$, а $x^{N-1 \rightarrow} = x^{\leftarrow}$ — операция обратного сдвига;
- 5) конечная разность Δ сигнала $x \in \mathbb{C}^N$:

$$\Delta[x](j) = x(j+1) - x(j).$$

Для второй операции использован известный [9] знак $\circ$ операции *умножения по Адамару* (покомпонентного умножения) векторов.

Строки матриц $F, \bar{F}$ называются [10] *дискретными экспоненциальными функциями* (ДЭФ). Основную ДЭФ обозначим $r = (1 \ \omega \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{N-1})$. Остальные ДЭФ (в матричной форме) следующие:

$$r^{2\circ} = r \circ r, \ r^{3\circ} = r^{2\circ} \circ r, \ r^{4\circ}, \dots, r^{N-1\circ}, \ r^{N\circ} = r^{0\circ},$$

где знак операции в показателе принято опускать. В матрице (6) ДЭФ следуют в порядке $r^0, r^{N-1}, r^{N-2}, \dots, r^2, r$, а в матрице (8) — по возрастанию степени. Вместо обозначения $r^{0\circ}$ будем использовать символ $\mathbf{1}$ для *основного постоянного сигнала*: $\mathbf{1} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$. К основным сигналам относят *единичный импульс* $\delta = \delta_N = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$.

Двуместные операции $\circ$ и $*$ коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны, в пространстве $\mathbb{C}^N$ обладают нейтральными элементами $\mathbf{1}$ и δ соответственно. Приведённые операции линейны.

В пространстве $\mathbb{C}^N$ введём норму $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2}$.

Утверждение 1. В обозначениях $X = \mathcal{F}[x]$, $Y = \mathcal{F}[y]$ имеем

$$\mathcal{F}[x * y] = X \circ Y, \quad N\mathcal{F}[x \circ y] = X * Y;$$

выполняется равенство Парсеваля

$$N\|x\|^2 = \|X\|^2.$$

Это утверждение (см. доказательство в [3]) и следующие две леммы легко проверяются.

Далее рассмотрим подпространство $\mathbb{C}_0^N$ пространства $\mathbb{C}^N$, состоящее из сигналов $x \in \mathbb{C}^N$, удовлетворяющих *условию нормировки* (аналог (5)):

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k) = 0. \quad (9)$$

Лемма 1. Приведённые операции, за исключением умножения сигналов $\circ$ и ДПФ, замкнуты в пространстве $\mathbb{C}_0^N$.

Лемма 2. В структуре $(\mathbb{C}_0^N; *)$ единственный нейтральный элемент $\left(\delta - \frac{1}{N}\mathbf{1}\right)$.

Лемма 3. Если $b \in \mathbb{C}_0^N$, то решение $x \in \mathbb{C}_0^N$ разностного уравнения $\Delta[x] = b$ единственно.

Доказательство. Приведём алгоритм вычисления $x \in \mathbb{C}_0^N$. Полагаем $x(0) = C$, не определяя пока C . Уравнение $\Delta[x] = b$ перепишем в виде $x(j) = x(j-1) + b(j-1)$, откуда вытекает, что $x(j) = C + b(0) + b(1) + \dots + b(j-1)$ для j от 1 до $N-1$. По условию нормировки (9) составляем уравнение

$$NC + \sum_{j=0}^{N-2} (N-j-1)b(j) = 0, \quad (10)$$

позволяющее однозначно вычислить C , через которое восстанавливаем все отсчёты сигнала x . ■

Итак, в классе сигналов $\mathbb{C}_0^N$ определена обратная к операции вычисления конечной разности операция $\Delta^{-1} : \mathbb{C}_0^N \rightarrow \mathbb{C}_0^N$.

Выделим возможные специальные виды сигналов класса $\mathbb{C}_0^N$. Сигнал x назовём *симметричным* с центром в t и обозначим $x \in S(m)$, если $x(m-k) = x(m+k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично, если $x(m-k) = x(m+k+1)$, то $x \in S(m+1/2)$. Сигнал x назовём *антисимметричным* с центром в t и обозначим $x \in AS(m)$, если $x(m-k) = -x(m+k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично, $x \in AS(m+1/2)$, если имеем $x(m-k) = -x(m+k+1)$.

За счёт периодичности сигнала его центры повторяются через $N/2$: $x \in S(m)$ влечёт $x \in S(m \pm N/2)$ и т. д.

Утверждение 2. Пусть $x \in \mathbb{C}_0^N$, $t = n/2$ при $n \in \mathbb{Z}$.

Если $x \in S(t)$, то $\Delta[x] \in AS(t-1/2)$, $\Delta^{-1}[x] \in AS(t+1/2)$.

Если $x \in AS(t)$, то $\Delta[x] \in S(t-1/2)$, $\Delta^{-1}[x] \in S(t+1/2)$.

Доказательство, которое можно провести проверкой всех восьми случаев отдельно (хотя явно выписаны четыре случая, помним, что t может быть целым или дробным), продемонстрируем на примере одного из более сложных случаев.

Пусть $x \in S(0)$, $y = \Delta^{-1}[x]$. Предложим $y(0) = -x(0)/2$ как вариант начального значения. Формула $y(j+1) = y(j) + x(j)$ из леммы 3 допускает обращение в виде $y(j-1) = y(j) - x(j-1)$. По этим формулам: $y(k) = x(0)/2 + x(1) + x(2) + \dots + x(k-1)$, $y(1-k) = -y(k)$ при $k = 2, 3, \dots, (N+1)/2$ и $y(1) = x(0)/2$, что влечёт $y \in AS(1/2)$. Осталось доказать справедливость условия нормировки (9) для построенного y , что означает верность выбора начального значения $y(0)$.

Если N чётное, то условие (9) выполняется автоматически. Пусть N нечётное. Получили, что

$$y((N+1)/2) = x(0)/2 + x(1) + x(2) + \dots + x((N+1)/2 - 1) \quad (11)$$

и $y((N+1)/2) = -y(1 - (N+1)/2)$. По условию периодичности $y((N+1)/2) = y(1 - (N+1)/2)$. Значит, должно быть $y((N+1)/2) = 0$. Проверим — так ли это? При $x \in S(0)$ имеем $x \in S(N/2)$, что влечёт $y((N+1)/2) = x(N-1) + \dots + x((N+1)/2) + x(N)/2$ из (11). Сложим эти два представления: $2y((N+1)/2) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) = 0$ по условию $x \in \mathbb{C}_0^N$.

Ввиду периодичности считаем, что доказан случай

$$x \in S(m) \Rightarrow \Delta^{-1}[x] \in AS(m+1/2).$$

3. Сигналы Бернулли

Основным представителем класса $\mathbb{C}_0^N$ служат *дискретные периодические функции Бернулли* [3, с. 171] порядка s , координаты которых определяются равенством

$$b_s(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-s} \cdot \omega^{kj}, \quad s, j \in \mathbb{Z}, \quad \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right). \quad (12)$$

Будем называть их короче — *сигналами Бернулли* порядка s (периода N , где N считаем фиксированным). В частности, начальный сигнал Бернулли (для наглядности добавили разделительные запятые)

$$b_0 = \delta - \frac{1}{N} \mathbf{1} = \frac{1}{N} (N-1, -1, -1, \dots, -1).$$

По свойствам корней N -й степени из единицы

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kj} = 0 \quad \text{при всех } 1 \leq j < N, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kN} = N \quad (13)$$

проверяется указанный вид b_0 , принадлежность всех ДЭФ (кроме $\mathbf{1}$) пространству $\mathbb{C}_0^N$ и следующая лемма.

Лемма 4. Для сигналов Бернулли любого целого порядка $b_s \in \mathbb{C}_0^N$.

Лемма 5. Для сигналов Бернулли $b_s = \Delta[b_{s+1}]$ и $b_{s+1} = \Delta^{-1}[b_s]$.

Доказательство. Вычислим координаты сигнала

$$\begin{aligned} \Delta[b_{s+1}](j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-(s+1)} \omega^{k(j+1)} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-(s+1)} \omega^{kj} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-(s+1)} \omega^{kj} (\omega^k - 1) = b_s(j). \end{aligned}$$

По лемме 3 получаем второе утверждение леммы 5. ■

Замечание 1. В качестве альтернативного определения сигналов Бернулли можно предложить формулу $b_0 = \delta - \frac{1}{N} \mathbf{1}$ для сигнала Бернулли нулевого порядка и соотношения леммы 5.

Следствие 1. Для сдвига сигнала Бернулли верно $b_s^{\leftarrow} = b_s + b_{s-1}$.

Доказательство. В координатах доказанная формула $b_{s-1} = \Delta[b_s]$ выглядит так: $b_{s-1}(j) = b_s(j+1) - b_s(j)$ или $b_s(j+1) = b_s(j) + b_{s-1}(j)$. ■

Следствие 2. Отсчёты всех сигналов Бернулли вещественные. Более того, отсчёты всех сигналов Бернулли отрицательного порядка и координаты векторов $N^{k+1} \cdot b_k$ при неотрицательных k — целые числа.

Доказательство. Имеем $b_{-1} = \Delta[b_0] = (-1 \ 0 \ 0 \dots \ 0 \ 0 \ 1)$. Так как отсчёты b_{-1} целые, то по лемме 5 получаем, что отсчёты каждого следующего сигнала Бернулли отрицательного порядка целые.

Координаты вектора $N \cdot b_0 = N\delta - \mathbf{1}$ суть целые числа. Для сигналов Бернулли следующих (больших) порядков, согласно формуле $b_{s+1} = \Delta^{-1}[b_s]$, вычисляем координаты по алгоритму леммы 3, решая при этом уравнение (10) для C и накапливая множитель N в знаменателе. ■

Утверждение 3. При $k \leq N$ имеет место следующее представление для сдвигов сигнала Бернулли: $b_{s+k}^{k\leftarrow} = \sum_{m=0}^k C_k^m b_{s+m}$. В частности, при $k = N$ получаем аналог формулы (1), который справедлив лишь для N , равного размеру сетки:

$$\sum_{m=0}^{N-1} C_N^m b_{s+m} = 0. \quad (14)$$

Доказательство. Применив формулу $b_{s+1}^{\leftarrow} = b_{s+1} + b_s$ следствия 1 трижды, получаем базу индукции

$$b_{s+2}^{2\leftarrow} = b_{s+2}^{\leftarrow} + b_{s+1}^{\leftarrow} = b_{s+2} + b_{s+1} + b_{s+1} + b_s.$$

Аналогично доказываем индуктивный переход от $k - 1$ к случаю k :

$$\begin{aligned} b_{s+k}^{k\leftarrow} &= b_{s+1+k-1}^{(k-1)\leftarrow} + b_{s+k-1}^{(k-1)\leftarrow} = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m b_{s+1+m} + \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m b_{s+m} = \\ &= \sum_{j=1}^k C_{k-1}^{j-1} b_{s+j} + \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j b_{s+j} = \sum_{j=0}^k C_k^j b_{s+j}, \end{aligned}$$

где применили известное свойство биномиальных коэффициентов

$$C_{k-1}^{j-1} + C_{k-1}^j = C_k^j. \quad (15)$$

Формула (14) вытекает из равенства $b^{N\leftarrow} = b$ для $b \in \mathbb{C}^N$. ■

Замечание 2. Формулу (14) при небольших N можно использовать как следующий рекуррентный способ вычисления значений сигналов Бернулли:

$$b_s = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} C_N^{k+1} b_{s-k}.$$

В частности, $b_s = -\frac{1}{2}b_{s-1}$ при $N = 2$, $b_s = -b_{s-1} - \frac{1}{3}b_{s-2}$ при $N = 3$ и т. д.

Следствие 3 (теорема сложения аргументов, аналог (4)). При $k \geq 0$ верно

$$b_n(j+k) = \sum_{l=0}^k C_k^l b_{n-l}(j).$$

Замечание 3. В следствии 2 приведено утверждение о целочисленности отсчётов сигналов $N^{k+1}b_k$, которое довольно грубое. Анализ биномиальных коэффициентов в соотношении линейной зависимости (14) позволяет получить следующее утверждение:

Если $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_j , $j = 1, \dots, k$, — простые числа, $n \geq 0$, то отсчёты сигналов

$$N p_1^{\lfloor \frac{n}{p_1-1} \rfloor} p_2^{\lfloor \frac{n}{p_2-1} \rfloor} \dots p_k^{\lfloor \frac{n}{p_k-1} \rfloor} b_n$$

целочисленные. Доказательство не приводим из-за его громоздкости.

Лемма 6. Дискретное преобразование Фурье сигналов Бернулли имеет вид

$$\mathcal{F}[b_n](0) = 0, \quad \mathcal{F}[b_n](j) = (\omega^j - 1)^{-n} \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, N-1,$$

что короче записывается при $n \in \mathbb{N}$ двумя формулами:

$$\mathcal{F}[b_{-n}] = (r - 1)^n \quad \text{и условно } \mathcal{F}[b_n] = (r - 1)^{-n}.$$

Доказательство. По лемме 4 имеем $\mathcal{F}[b_n](0) = 0$. Для остальных отсчётов

$$\mathcal{F}[b_n](j) = \sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-n} \omega^{ks} \omega^{-sj} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-n} \sum_{s=0}^{N-1} \omega^{(k-j)s}.$$

Применяя (13), получаем $\mathcal{F}[b_n](j) = (\omega^j - 1)^{-n}$. ■

Следующее свойство сигналов Бернулли первым, по-видимому, отметил В. Н. Малоземов.

Теорема 1. Циклическая свертка сигналов Бернулли равна соответствующему сигналу Бернулли:

$$b_n * b_m = b_{n+m}.$$

Доказательство. Первый способ — проверяем непосредственно:

$$\begin{aligned} (b_n * b_m)(j) &= \sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-n} \omega^{sk} \sum_{l=1}^{N-1} (\omega^l - 1)^{-m} \omega^{(j-s)l} = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-n} \sum_{l=1}^{N-1} (\omega^l - 1)^{-m} \omega^{jl} \sum_{s=0}^{N-1} \omega^{s(k-l)}. \end{aligned}$$

Продолжаем по формуле (13):

$$(b_n * b_m)(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-n} (\omega^k - 1)^{-m} \omega^{jk} = b_{n+m}(j).$$

Второй способ — через ДПФ. По утверждению 1 и лемме 6 с учётом того, что нулевой отсчёт всех спектров Фурье равен нулю, получаем

$$\mathcal{F}[b_n * b_m] = \mathcal{F}[b_n] \circ \mathcal{F}[b_m] = (r - \mathbf{1})^{-n} \circ (r - \mathbf{1})^{-m} = \mathcal{F}[b_{n+m}].$$

Теорема доказана. ■

Есть третий (более длинный) способ доказательства через итерации операторов Δ и Δ^{-1} . Его укажем в виде следствия теоремы.

Следствие 4. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ конечная разность всех порядков и её обращение для $x \in \mathbb{C}_0^N$ представима как

$$\Delta^m[x] = b_{-m} * x.$$

Эту формулу можно переписать в виде $x = \Delta^m[x] * b_m$, полученным в [1] и применённым в [4] для анализа В-сплайнов.

Следствие 5. Сигнал Бернулли любого порядка есть соответствующая степень образующего сигнала b_1 :

$$b_n = b_1^{n*}, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 7 (аналог теоремы дополнения (3)). Для сигналов Бернулли верно

$$b_m(m - j) = (-1)^m b_m(j).$$

Доказательство. По определению (12) и условию $\omega^N = 1$ имеем

$$\begin{aligned} b_m(m - j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-m} \omega^{k(m-j)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \omega^{-k})^{-m} \omega^{-kj} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \omega^{N-k})^{-m} \omega^{(N-k)j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \omega^k)^{-m} \omega^{kj} = (-1)^m b_m(j). \end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

Из утверждения 2 вытекает

Утверждение 4 (свойство симметрии, антисимметрии). Сигнал Бернулли чёт-ного порядка симметричен, нечётно-го — антисимметричен:

$$b_{2m} \in S(m), \quad b_{2m+1} \in AS(m + 1/2).$$

Следствие 6. Для отдельных отсчётов верно $b_1(0) = -\frac{N-1}{2N}$ и $b_1(1) = \frac{N-1}{2N}$. Для остальных отсчётов $b_1(1+k) = \frac{N-1-2k}{2N}$.

Доказательство. Имеем $b_0 \in S(0)$, $b_1 \in AS(1/2)$, $b_0(0) = \frac{N-1}{N}$; обозначим $2C = \frac{N-1}{N}$. Тогда $b_1(0) = -C$ и $b_1(1) = C$; далее по лемме 3. ■

При $1 \leq k < N$ следующая формула для b_{-k} даёт явный вид начальных отрицательных сигналов Бернулли в виде сдвинутого набора биномиальных коэффициентов с чередующимися знаками. Её частные случаи:

$$\begin{aligned} b_{-1} &= (-1 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0 \ 1), \quad b_{-2} = (1 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0 \ 1 \ -2), \\ b_{-3} &= (-1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ -3 \ 3), \quad b_{-4} = (1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ -4 \ 6 \ -4) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Утверждение 5. Для сигналов Бернулли отрицательного порядка имеет место

$$b_{-k} = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \delta^{(k-j)\leftarrow}; \quad (16)$$

$$\|b_{-k}\|^2 = \frac{4^k (2k-1)!!}{(2k)!!}. \quad (17)$$

Доказательство. Следствие 1 влечёт базу индукции для (16):

$$b_{-1} = b_0^{\leftarrow} - b_0 = \delta^{\leftarrow} - \delta - \frac{1}{N}(\mathbf{1}^{\leftarrow} - \mathbf{1}) = \delta^{\leftarrow} - \delta, \quad b_{-2} = b_{-1}^{\leftarrow} - b_{-1} = \delta^{2\leftarrow} - 2\delta^{\leftarrow} + \delta.$$

Индуктивный переход (во второй сумме заменяем $s = j+1$, переобозначаем символом j и применяем (15)):

$$\begin{aligned} b_{-k} &= b_{-k+1}^{\leftarrow} - b_{-k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_{k-1}^j \delta^{(k-j)\leftarrow} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_{k-1}^j \delta^{(k-1-j)\leftarrow} = \\ &= \delta^{k\leftarrow} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j (C_{k-1}^j + C_{k-1}^{j-1}) \delta^{(k-j)\leftarrow} + (-1)^k \delta = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \delta^{(k-j)\leftarrow}. \end{aligned}$$

Из (16) вытекает приведённый явный вид сигналов и квадрат нормы:

$$\|b_{-k}\|^2 = \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2.$$

По тождеству Вандермонда [11, с. 27]

$$\sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 = C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(2k)!!(2k-1)!!}{(k!)(k!)} = \frac{2^k(2k-1)!!}{k!} = \frac{4^k(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Утверждение доказано. ■

Следствие 7. Набор из $N - 1$ сигналов Бернулли подряд идущих порядков составляет базис пространства $\mathbb{C}_0^N$.

Доказательство. Подпространство $\mathbb{C}_0^N$ N -мерного пространства $\mathbb{C}^N$ имеет размерность $N - 1$. Если отсчёты с номером 0 временно удалим, как допускающие восстановление по свойству нормировки (9), то заметим, что векторы $b_{-1}, b_{-2}, \dots, b_{-N+1}$ линейно независимы, как обладающие диагональной структурой. Значит, они составляют базис пространства $\mathbb{C}_0^N$. По формуле (14) линейной зависимости этот базис можно сдвигать на одну позицию в любую сторону. ■

Замечание 4. Очевидно, что для любого $x \in \mathbb{C}_0^N$ полный набор его сдвигов линейно зависим: $\sum_{k=0}^{N-1} x^{k \rightarrow} = 0$. Зато набор из $(N - 1)$ -го сдвига любого сигнала Бернулли составляет базис пространства $\mathbb{C}_0^N$. Для сигнала Бернулли порядка -1 это легко проверяется, а далее доказывается по лемме 3.

Рассмотрим простейшие частные случаи сигналов Бернулли.

С л у ч а й $N = 2$. Пространство $\mathbb{C}_0^2$ одномерно и при всех целых s

$$b_s = \frac{(-1)^s}{2^{s+1}} (1 \ -1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^s b_0.$$

С л у ч а й $N = 3$. Пространство $\mathbb{C}_0^3$ двумерно с базисом

$$b_0 = \frac{1}{3}(2 \ -1 \ -1) \quad \text{и} \quad b_{-1} = (-1 \ 0 \ 1)$$

и соотношением $b_{k+2} = -\frac{1}{3}b_k^{\rightarrow}$.

С л у ч а й $N = 4$. Хотя пространство $\mathbb{C}_0^4$ трёхмерно, сигналы Бернулли группируются не по тройкам, а по парам (чётные и нечётные порядки), а именно (отделили координаты запятыми):

$$b_{2s} = \frac{(-1)^s}{2^{2s+2}} (2^{s+1} + 1, \ -1, \ -2^{s+1} + 1, \ -1)^{s \rightarrow},$$

$$b_{2s-1} = \frac{(-1)^{s-1}}{2^{2s+1}} (2^s + 1, \ 2^s - 1, \ -2^s + 1, \ -2^s - 1)^{s \rightarrow}.$$

Для остальных N общих формул представления всех сигналов Бернулли нет.

По теореме 1 в кольце $(\mathbb{C}_0^N; +, *)$ легко вычисляется обратный элемент к сигналам Бернулли. Для произвольного обратимого $x \in \mathbb{C}_0^N$ есть две стандартные схемы вычисления обратного, то есть такого $y \in \mathbb{C}_0^N$, что $x * y = b_0$. Один приём «в лоб» методом неопределённых коэффициентов — составление и решение системы N -го порядка. С использованием циркулянтной матрицы $C(x)$ для сигнала x (её определение см. в [9, с. 40]) уравнение записывается в матричном виде $y \cdot C(x) = b_0$.

Второй приём покажем на примере сигнала $x = (1, 0, 3, -4)$. Вычислим ДПФ от него: $X = \mathcal{F}[x] = (0, -2 - 4i, 8, -2 + 4i)$. Найдём Y , такой, что $X \circ Y = \mathbf{1} - \delta = (0, 1, 1, 1)$: $Y = \left(0, \frac{-1 + 2i}{10}, \frac{1}{8}, \frac{-1 - 2i}{10}\right)$. Через обратное ДПФ от Y найдём искомым $y = \frac{1}{160}(-3, -21, 13, 11)$.

Предложим третий приём. Произвольный $x \in \mathbb{C}_0^N$ легко раскладывается по базису $\{b_{-1}, b_{-2}, \dots, b_{-N+1}\}$. В случае $x = (1, 0, 3, -4)$ имеем $x = 2b_{-1} + 3b_{-2}$. Искомый $y \in \mathbb{C}_0^4$,

такой, что $x * y = b_0$, будем искать в сдвинутом базисе в виде $y = \alpha b_1 + \beta b_0 + \gamma b_{-1}$. По линейности циклической свертки и теореме 1 имеем

$$x * y = 2\alpha b_0 + (3\alpha + 2\beta)b_{-1} + (3\beta + 2\gamma)b_{-2} + 3\gamma b_{-3}.$$

Здесь на помощь приходит соотношение (14) линейной зависимости, которое добавим с некоторым неопределённым коэффициентом s :

$$x * y = b_0 + s(4b_0 + 6b_{-1} + 4b_{-2} + b_{-3}).$$

Приравняв коэффициенты, получаем систему, которая решается последовательно:

$$\gamma = \frac{s}{3}, \quad \beta = \frac{10}{9}s, \quad \alpha = \frac{34}{27}s, \quad s = -\frac{27}{40} \quad \rightarrow \quad \alpha = -\frac{17}{20}, \quad \beta = -\frac{3}{4}, \quad \gamma = -\frac{9}{40}.$$

При $N \geq 5$ первые два приёма слишком сложны для использования без привлечения компьютера, а с помощью третьего можно решать и вручную.

4. Производящая функция сигналов Бернулли

Производящей функцией последовательности $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется [11]

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Введём производящие функции для N отсчётов последовательности сигналов Бернулли (12) неотрицательного порядка:

$$\varphi_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s(k) x^s, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Теорема 2. Производящая вектор-функция $\Phi(x) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s$ для всех отсчётов сигналов Бернулли неотрицательного порядка равна

$$\Phi(x) = \delta + \varphi(x; N) \left((1+x)^{N-1}, 1, (1+x), (1+x)^2, \dots, (1+x)^{N-2} \right),$$

где $\varphi(x; N) = \frac{x}{1 - (1+x)^N}$.

Доказательство. По формуле $b_s(k) = b_s(k-1) + b_{s-1}(k-1)$ из следствия 1 имеем

$$\varphi_k(x) = b_0(k) + \sum_{s=1}^{\infty} b_s(k) x^s = b_0(k) + \sum_{s=1}^{\infty} (b_s(k-1) x^s + b_{s-1}(k-1) x^s).$$

При $2 \leq k \leq N-1$ получим

$$\varphi_k(x) = -\frac{1}{N} + \sum_{s=1}^{\infty} b_s(k-1) x^s + x \sum_{s=0}^{\infty} b_s(k-1) x^s = \varphi_{k-1}(x) + x \varphi_{k-1}(x).$$

Небольшое отличие при $k=1$ и $k=N$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= b_0(1) + \sum_{s=1}^{\infty} (b_s(0) x^s + b_{s-1}(0) x^s) = b_0(1) - b_0(0) + (1+x) \varphi_0(x), \\ \varphi_N(x) &= b_0(N) - b_0(N-1) + (1+x) \varphi_{N-1}(x). \end{aligned}$$

Получили формулы

$$\varphi_1(x) = -1 + (1+x)\varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) = \varphi_N(x) = 1 + (1+x)\varphi_{N-1}(x).$$

Выразим все рассмотренные производящие функции через одну:

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= (1+x)^{k-1}\varphi_1(x) \quad \text{при } 1 \leq k \leq N-1, \\ \varphi_0(x) &= \frac{1+\varphi_1(x)}{x+1}, \quad \varphi_0(x) = 1 + (1+x)^{N-1}\varphi_1(x). \end{aligned}$$

Приравняв две последние, получим

$$\varphi(x; N) = \varphi_1(x) = \frac{x}{1 - (1+x)^N}.$$

Теорема доказана. ■

Следствие 8. Отсчёт сигналов Бернулли с номером 1 порядков $s \geq 2$ как функция от размера сетки N есть многочлен нечётного порядка; гарантируется, что среди его корней присутствуют корни $N = \pm 1$.

Доказательство. Для $\varphi(x; N) = \varphi_1(x) = \frac{x}{1 - (1+x)^N}$ вычислим

$$\varphi(x; -N) = \frac{x}{1 - (1+x)^{-N}} = x - \varphi(x; N),$$

что влечёт первое утверждение. Более того, из доказательства следствия 2 вытекает наличие N в знаменателях всех отсчётов сигналов Бернулли положительного порядка.

Рассмотрим величины $-Nb_s(1)$ как чётные многочлены степени s от переменной N . Из условия $\varphi(x; 1) = -1$ вытекает, что при $s \geq 2$ числа $N = \pm 1$ служат корнями этого многочлена. ■

5. Тригонометрические суммы

Через производящую функцию теоремы 2, взятую в виде $-N\varphi(x; N)$, в [5, 12] вычисляются суммы чётных отрицательных степеней синусов в равноотстоящих узлах окружности. В. Н. Малоземов в [2] предложил более красивое изложение этих результатов с распространением на положительные степени. Эти суммы имеют практическое применение [13].

Теорема 3. Суммы чётных степеней синусов в равноотстоящих узлах выражаются через нормы сигналов Бернулли ($s > 0$):

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2s} \frac{\pi k}{N} = \frac{N}{4^s} \|b_{-s}\|^2, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2s}(\pi k/N)} = 4^s N \|b_s\|^2.$$

В частности, при $s < N$ имеем

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2s} \frac{\pi k}{N} = N \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}. \quad (18)$$

Сумма $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2s}(\pi k/N)}$ при натуральном s равна чётному многочлену от N степени $2s$, содержащему множитель $(N^2 - 1)$. В качестве формулы для вычисления этих многочленов предлагается

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2s}(\pi k/N)} = \frac{4^s N}{(s!)^2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^{2s}}{\partial z^s \partial t^s} \left(\frac{(z-1)(t-1)((zt)^N - 1)}{(z^N - 1)(t^N - 1)(zt - 1)} \right). \quad (19)$$

Доказательство. По равенству Парсеваля (утверждение 1) $N\|b_s\|^2 = \|\mathcal{F}[b_s]\|^2$. Правую часть вычислим согласно результатам леммы 6:

$$\|\mathcal{F}[b_s]\|^2 = \|(r-1)^{-s}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} |\omega^k - 1|^{-2s} = \sum_{k=1}^{N-1} |\omega^{k/2} - \omega^{-k/2}|^{-2s} \cdot |\omega|^{-sk}.$$

По формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ получим

$$\|\mathcal{F}[b_s]\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \left| 2 \sin \frac{\pi k}{N} \right|^{-2s}.$$

Далее считаем $s > 0$ и запишем две формулы:

$$N\|b_{-s}\|^2 = 4^s \sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2s} \frac{\pi k}{N}, \quad N\|b_s\|^2 = 4^{-s} \sum_{k=1}^{N-1} \sin^{-2s} \frac{\pi k}{N}.$$

Для первой из них по формуле (17) при $s < N$ получаем (18). Сигналы Бернулли положительного порядка восстанавливаются через производящую вектор-функцию теоремы 2: $b_s = \frac{1}{s!} (\Phi(x))^{(s)}|_{x=0}$, а для отдельных отсчётов

$$b_s(k) = \frac{1}{s!} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{d^s}{du^s} \varphi_k(u) \right) = \frac{1}{s!} \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{d^s}{dz^s} \frac{z^{k-1}(z-1)}{1-z^N} \right).$$

При вычислении квадрата нормы вместо нулевого отсчёта берем отсчёт с номером N :

$$\|b_s\|^2 = \left(\frac{1}{s!} \right)^2 \sum_{k=1}^N \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^{2s}}{\partial z^s \partial t^s} \left(\frac{z^{k-1}(z-1)t^{k-1}(t-1)}{(z^N-1)(t^N-1)} \right),$$

что равносильно (19).

Так как при замене N на $-N$ в правой части (19) ничего не меняется, эта функция чётная. К тому же эта функция является многочленом, что нетрудно проверить (в [5] это доказано для очень близкой конструкции). Один из корней этого многочлена $N = 1$, так как при $N = 1$ правая часть (19) обращается в нуль. Из чётности многочлена вытекает, что и $N = -1$ есть корень. ■

Приведём частные случаи результатов теоремы 3:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi k}{N} &= \frac{N}{2} \text{ при } N \geq 2, & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^4 \frac{\pi k}{N} &= \frac{3N}{8} \text{ при } N \geq 3, \\ \sum_{k=1}^{N-1} \sin^6 \frac{\pi k}{N} &= \frac{5N}{16} \text{ при } N \geq 4, & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^8 \frac{\pi k}{N} &= \frac{35N}{128} \text{ при } N \geq 5. \end{aligned}$$

Из курса математического анализа известно [14, с. 434], что

$$\int_0^\pi \sin^{2s} x \, dx = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{2s+1}{2})}{\Gamma(s+1)} = \pi \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}. \quad (20)$$

Сравнивая (20) с формулой (18), замечаем, что для интеграла $\int_0^\pi \sin^{2s} x \, dx$ обе формулы прямоугольников (при $\Delta x = \pi/N$) точны при достаточном ($N \geq s+1$) числе узлов:

$$\Delta x \sum_{k=0}^{N-1} \sin^{2s}(k\Delta x) = \Delta x \sum_{k=1}^N \sin^{2s}(k\Delta x) = \int_0^\pi \sin^{2s} x \, dx.$$

Верны следующие частные случаи:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2(\pi k/N)} &= \frac{N^2 - 1}{3}, & \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^4(\pi k/N)} &= \frac{(N^2 - 1)(N^2 + 11)}{45}, \\ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^6(\pi k/N)} &= \frac{(N^2 - 1)(2N^4 + 23N^2 + 191)}{945}, \\ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^8(\pi k/N)} &= \frac{(N^2 - 1)(3N^6 + 43N^4 + 337N^2 + 2497)}{14175}, \\ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{10}(\pi k/N)} &= \frac{(N^2 - 1)(2N^8 + 35N^6 + 321N^4 + 2125N^2 + 14797)}{93555}.\end{aligned}$$

Из этого набора формул легко вычисляются суммы чётных степеней котангенсов в равноотстоящих узлах, приведённые в [15] и востребованные в механике.

По алгоритму леммы 3 и формуле теоремы 3 составлена программа [16] вычисления

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2s}(\pi k/N)}$$

по произвольным заданным N и s .

6. Связь с числами и многочленами Коробова

При построении производящей функции в теореме 2 более удобный вид получается при рассмотрении обратного сдвига. Поэтому далее рассмотрим следующую последовательность дискретных периодических функций (называемых сигналами):

$$-N \cdot b_0^{\leftarrow}, -N \cdot b_1^{\leftarrow}, -N \cdot b_2^{\leftarrow}, \dots, -N \cdot b_s^{\leftarrow}, \dots$$

Будем использовать предложенные в [6] названия и обозначения:

— *специальные числа* P_s для начальных отсчётов этих сигналов:

$$P_s = -N \cdot b_s^{\leftarrow}(0) = -N \cdot b_s(1);$$

— *специальные многочлены* $P_s(k)$ для остальных отсчётов этих сигналов (за одним исключением: последняя координата начального сигнала выпадает из общей конструкции, $P_0(x) \equiv 1$):

$$P_s(k) = -N \cdot b_s(k+1), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Специальные числа P_s и специальные многочлены $P_s(x)$, а также производящие функции для них

$$\psi(u) = \sum_{s=0}^{\infty} P_s u^s, \quad \Psi(u, x) = \sum_{s=0}^{\infty} P_s(x) u^s$$

введены и вычислены в [5, 6]. В [5] обозначения другие. После естественного видоизменения эти специальные числа и многочлены приобрели вид *чисел Коробова* и *многочленов Коробова* первого рода [8]

$$K_s = s!P_s, \quad K_s(x) = s!P_s(x)$$

с теми же экспоненциальными (термин из [11]) производящими функциями

$$\psi(u) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{K_s}{s!} u^s, \quad \Psi(u, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{K_s(x)}{s!} u^s.$$

Из теоремы 2 вытекает

Утверждение 6. Экспоненциальные производящие функции чисел и многочленов Коробова первого рода имеют следующий вид:

$$\psi(u) = \psi(u; N) = \frac{Nu}{(u+1)^N - 1}, \quad \Psi(u, x) = \Psi(u, x; N) = \frac{Nu(u+1)^x}{(u+1)^N - 1}.$$

Основной результат работы [5] сформулируем в принятых обозначениях, используя понятие *обобщённой степени* $k^{(s)} = k(k-1)\dots(k-s+1)$.

Теорема 4. Решение бесконечной (так как $s \in \mathbb{N}$) системы разностных уравнений

$$\Delta[P_s] = P_{s-1}$$

с условием нормировки $\sum_{k=0}^{N-1} P_s(k) = 0$ и начальным условием $P_0(k) \equiv 1$ имеет следующий вид:

$$P_s(k) = P_0 \frac{k^{(s)}}{s!} + P_1 \frac{k^{(s-1)}}{(s-1)!} + \dots + P_{s-1} \frac{k^{(1)}}{1!} + P_s. \quad (21)$$

Здесь специальные числа P_s имеют вид многочленов степени s от параметра N со старшим коэффициентом $B_s/s!$, где B_s — числа Бернулли. Начиная с $s = 2$, это чётные многочлены (то есть многочлены от N^2), для которых числа 1 и -1 служат корнями.

Рекуррентная формула для вычисления чисел P_s как многочленов от N имеет следующий вид:

$$P_0 \frac{N^{(s+1)}}{(s+1)!} + P_1 \frac{N^{(s)}}{s!} + \dots + P_{s-1} \frac{N^{(2)}}{2!} + P_s N = 0. \quad (22)$$

Доказательство. По условию нормировки из соображений симметрии имеем $P_1(k) = k - \frac{N-1}{2}$, что можно представить в виде $P_1(k) = P_0 k^{(1)} + P_1$, где $P_1 = -\frac{N-1}{2}$. Это база индукции для доказательства (21) и (22).

Предположим, что

$$P_{s-1}(k) = P_0 \frac{k^{(s-1)}}{(s-1)!} + P_1 \frac{k^{(s-2)}}{(s-2)!} + \dots + P_{s-2} \frac{k^{(1)}}{1!} + P_{s-1}.$$

Так как $\Delta[k^{(n)}] = nk^{(n-1)}$, решение уравнения $\Delta[P_s] = P_{s-1}$, согласно лемме 3, имеет вид (21), где P_s пока не найдено. Ищем его методом прогонки:

$$P_s(0) = P_s, \quad P_s(1) = P_s + P_{s-1}, \quad P_s(2) = P_s + 2P_{s-1} + P_{s-2}, \dots$$

Общий вид формулы для $0 \leq k \leq N-1$:

$$P_s(k) = \sum_{j=0}^k C_k^j P_{s-j}.$$

По условию нормировки $\sum_{k=0}^{N-1} P_s(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^k C_k^j P_{s-j} = 0$. Отделим старшее слагаемое и поменяем пределы суммирования:

$$NP_s + \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{i=j}^{N-1} C_i^j \right) P_{s-j} = 0.$$

Согласно [11, задача 1.2], получили $\sum_{j=1}^{N-1} C_N^{j+1} P_{s-j} + N P_s = 0$. Запись этого выражения в виде многочлена от N приводит к (22).

Теперь рассмотрим специальные числа P_s как многочлены от N степени s , где старший коэффициент при N^s может оказаться нулём. Этот коэффициент найдём анализом старших слагаемых.

База индукции: $P_0 = B_0 = 1$, $P_1 = B_1 N + O(N^{1-1})$, где $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ — числа Бернулли.

Индуктивное предположение: $P_k = \frac{B_k}{k!} n^k + O(N^{k-1})$ при всех k от 1 до $n-1$. Так как формулу (22) анализируем для всех N , отмечаем, что с ростом N она обрывается на n :

$$P_n = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \frac{N^{(j+1)}}{(j+1)!} P_{n-j}.$$

Следим только за старшим коэффициентом:

$$\begin{aligned} P_n &= -\sum_{j=1}^n \frac{(N-1)^{(j)}}{(j+1)!} \left(\frac{B_{n-j}}{(n-j)!} N^{n-j} + O(N^{n-j-1}) \right) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{-B_{n-j}}{(j+1)!(n-j)!} \right) N^n + \\ &+ O(N^{n-1}) = \left(\frac{-1}{n!} \sum_{j=1}^n \frac{n!}{(j+1)!(n-j)!} B_{n-j} \right) N^n + O(N^{n-1}) = \frac{B_n}{n!} + O(N^{n-1}) \end{aligned}$$

по свойству (1).

Чётность P_n как многочлена от N и наличие множителя $(N^2 - 1)$ (при $n \geq 2$) доказаны в следствии 8. ■

В [12] отмечено, что решение данной системы разностных уравнений уже получено, найдены производящие функции для них и приведена формула (19) для тригонометрических сумм.

В [6] специальные числа P_s вводятся формулой (22) с начальным условием $P_0 = 1$, а специальные многочлены $P_s(x)$, для которых $P_s(k) = -N b_s(k+1)$ на сетке, — формулой (21) с начальным условием $P_0(x) \equiv 1$, без мотивировки происхождения этих формул. В [8] предложен подход к определению P_s и $P_s(x)$ через производящие функции.

Утверждение 7. Три следующих способа определения специальных чисел P_s и специальных многочленов $P_s(x)$ (а следовательно, также чисел и многочленов Коробова первого рода) эквивалентны:

- 1) в виде решения системы разностных уравнений с нормировкой (9);
- 2) формулами (21), (22);
- 3) через производящие функции $\psi(u) = \frac{Nu}{(u+1)^N - 1}$ и $\Psi(u, x) = \frac{Nu(u+1)^x}{(u+1)^N - 1}$ соответственно.

Переходы $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$ доказаны в [5] (см. также теорему 4 и утверждение 6), переход $2 \rightarrow 3$ — в [6], а переход $3 \rightarrow 1$ — в [8].

Замечание 5. Существует четвёртый (рекуррентный) способ определения специальных многочленов $P_n(k)$ (от целочисленного аргумента k на сетке) с помощью формулы (14). Этот способ аналогичен формуле (22) для вычисления специальных чисел. Однако для него нужно слегка поправить определение $P_0(k)$: оставляем неизменным $P_0(k) = 1$ при $0 \leq k \leq N-2$ и изменяем один отсчёт $P_0(N-1) = 1 - N$. За счёт

этой поправки, которая не влияет на вычисление последующих многочленов $P_n(k)$, добились того, что и для начального многочлена верно условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_n(k) = 0. \quad (23)$$

Введение поправки позволяет определить и вычислять, применяя операцию Δ , «специальные многочлены отрицательного порядка» по аналогии с сигналами Бернулли. В качестве начальных данных предлагаемого четвёртого способа достаточно вычислить $N - 2$ таких «многочленов», начиная от P_{-1} до $P_{-(N-2)}$. Формулы для вычисления их отсчётов, удовлетворяющих условию (23): $P_{-k}(j) = 0$ при $0 \leq j \leq N - k - 2$, $P_{-k}(N - k - 1 + s) = (-1)^{s+1} N C_k^s$ при $0 \leq s \leq k$.

Наличие величин, которые названы «многочленами», позволяет запустить процесс вычисления специальных многочленов по формуле

$$P_s(j) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} C_N^{k-1} P_{s-k}(j) = 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Приведём несколько начальных чисел Коробова, вычисленных по формуле (22) и соотношению $K_s = s! P_s$ (отметим, что в [6–8] вычисления выполнены до третьего порядка):

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{N-1}{2}, \quad K_2 = \frac{N^2-1}{6}, \quad K_3 = -\frac{N^2-1}{4}, \quad K_4 = -\frac{1}{30}(N^2-1)(N^2-19), \\ K_5 &= \frac{(N^2-1)(N^2-9)}{4}, \quad K_6 = \frac{1}{84}(N^2-1)(2N^4-145N^2+863), \\ K_7 &= -\frac{5}{24}(N^2-1)(N^2-25)(2N^2-11). \end{aligned}$$

Следующие числа Коробова вычислены методом неопределённых коэффициентов с использованием результатов теоремы 4:

$$\begin{aligned} K_8 &= -\frac{1}{90}(N^2-1)(3N^6-497N^4+9247N^2-33953), \\ K_9 &= \frac{7}{20}(N^2-1)(N^2-49)(3N^4-50N^2+167), \\ K_{10} &= \frac{5}{660}(N^2-1)(10N^8-2993N^6+114597N^4-1184767N^2+3250433), \\ K_{11} &= -\frac{15}{8}(N^2-1)(N^2-9)(N^2-81)(2N^4-49N^2+173), \\ K_{12} &= -\frac{N^2-1}{5460}(1382N^{10}-653818N^8+42418211N^6-845983589N^4+6117468907N^2- \\ &\quad -13695779093), \\ K_{13} &= \frac{11}{840}(N^2-1)(N^2-121)(1382N^8-77096N^6+1336965N^4-8756954N^2+18382103). \end{aligned}$$

Из наблюдения за видом чисел Коробова вытекает

Гипотеза 1.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K_{2n+1}}{K_{2n}} = \frac{1-4n^2}{2}.$$

Если гипотеза верна, то нам известны старшие ненулевые коэффициенты всех чисел Коробова. В качестве упражнения можно попробовать методом неопределённых коэффициентов продолжить вычисления чисел Коробова, общий вид которых (при верности гипотезы) следующий:

$$K_{14} = \frac{7}{6}(N^2 - 1)T_{12}(N), \quad K_{15} = -\frac{455}{4}(N^2 - 1)(N^2 - 169)T_{10}(N),$$

$$K_{16} = \frac{-3617}{510}(N^2 - 1)T_{14}(N), \quad K_{17} = \frac{3617}{4}(N^2 - 1)(N^2 - 9)(N^2 - 25)(N^2 - 225)T_8(N).$$

Здесь $T_n(N)$ — чётный многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, коэффициенты которого и следует вычислить. Для применения метода неопределённых коэффициентов предлагается таблица значений отдельных специальных чисел $P_n = K_n/n!$ в зависимости от размера сетки N .

n	N					
	2	3	4	5	6	7
14	$1/2^{14}$	$2/2187$	$-255/16384$	$8/125$	$71698571/35831808$	$445/49$
15	$-1/2^{15}$	$-1/2187$	$255/32768$	$-21/125$	$-71698571/71663616$	$357/49$
16	$1/2^{16}$	$1/6561$	$1/65536$	$76/625$	$-429909599/429981696$	$-948/49$
17	$-1/2^{17}$	0	$-513/131072$	0	$262143/131072$	$474/49$

Для вычисления K_{16} добавим недостающее значение $P_{16} = -6684671/2^{16}$ при $N = 8$. Приведем также вид начальных многочленов Коробова:

$$K_0(x) = 1, \quad K_1(x) = x - \frac{N-1}{2}, \quad K_2(x) = x^2 - Nx + \frac{N^2-1}{6},$$

$$K_3(x) = x^3 - \frac{3(N+1)}{2}x^2 + \frac{N(N+3)}{2}x - \frac{N^2-1}{4},$$

$$K_4(x) = x^4 - (2N+4)x^3 + (N^2+6N+4)x^2 - 2N(N+2)x - \frac{(N^2-1)(N^2-19)}{30},$$

$$K_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}(N+3)x^4 + \frac{5}{3}(N^2+9N+11)x^3 - \frac{5}{2}(3N^2+11N+6)x^2 -$$

$$- \frac{1}{6}(N^4 - 55N^2 - 90N)x + \frac{1}{4}(N^2-1)(N^2-9),$$

$$K_6(x) = x^6 - 3(N+4)x^5 + \frac{5}{2}(N^2+12N+21)x^4 - 5(4N^2+21N+20)x^3 +$$

$$+ \frac{1}{2}(-N^4 + 105N^2 + 300N + 144)x^2 + (2N^4 - 50N^2 - 72N)x + K_6,$$

$$K_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}(N+5)x^6 + \frac{7}{2}(N^2+15N+34)x^5 - \frac{35}{4}(5N^2+34N+45)x^4 +$$

$$+ \frac{7}{6}(-N^4 + 170N^2 + 675N + 548)x^3 + \frac{7}{4}(5N^4 - 225N^2 - 548N - 240)x^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}(N^6 - 119N^4 + 1918N^2 + 2520N)x + K_7.$$

По свойству многочленов Коробова первого рода $\Delta K_s(x) = sK_{s-1}(x)$ и числам Коробова $K_s = K_s(0)$ в качестве начальных условий вычисляется следующий общий вид старших коэффициентов многочленов Коробова первого рода:

$$K_n(x) = x^n - \frac{n(N+n-2)}{2}x^{n-1} + C_n^2 \frac{2N^2 + 6(n-2)N + 3n^2 - 13n + 12}{12}x^{n-2} -$$

$$- C_n^3 \frac{(2n-4)N^2 + (3n^2 - 13n + 12)N + (n^3 - 7n^2 + 14n - 8)}{8}x^{n-3} + \dots$$

При фиксированном N численное значение чисел и многочленов Коробова на сетке удобнее вычислять не по этим формулам, а с помощью леммы 3 или формулы (24).

В [8] предложен метод вывода многочленов Бернулли из многочленов Коробова

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K_n(Nx)}{N^n} = B_n(x).$$

Заключение

Дискретные периодические функции Бернулли служат естественным и достаточно удобным аппаратом при более подробном изложении теории дискретного преобразования Фурье. Поэтому не случайно на них практически одновременно и независимо друг от друга вышли проф. В. Н. Малоземов и автор работы. В рамках теории чисел дискретные периодические функции Бернулли представлены в виде многочленов Коробова и активно исследуются. Например, работа [17] в течение 2017 г. процитирована 5 раз. Кроме возможных приложений в технике, их востребованность обусловлена ещё и тем, что числа и многочлены Коробова служат одним из основных примеров для изложения теневого исчисления, развитого в работах Рота и его последователей [18]. В рамках теневого исчисления изучаются [8] также числа и многочлены Коробова второго рода, которые в данной работе не затрагиваются. Близким объектом служат многочлены Карлица.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бер М. Г., Малоземов В. Н. Наилучшие формулы для приближенного вычисления дискретного преобразования Фурье // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1992. Т. 32. № 11. С. 1709–1719.
2. Избранные главы дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования. Ч. 2 / под ред. В. Н. Малоземова. СПб.: Изд-во ВВМ, 2014. 605 с.
3. Малоземов В. Н., Машарский С. М. Основы дискретного гармонического анализа. СПб.: Лань, 2012. 304 с.
4. Малоземов В. Н., Певный А. Б. Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.
5. Беспалов М. С. Представление для сумм четных отрицательных степеней синусов в равноотстоящих узлах // Изв. вузов. Математика. 1996. Т. 8 (411). С. 6–12.
6. Коробов Н. М. Специальные полиномы и их приложения // Диофантовы приближения. Математические записки. 1996. Т. 2. С. 77–89.
7. Устинов А. В. О формулах суммирования и интерполяции // Чебышевский сб. 2001. Т. 1. № 1. С. 52–71.
8. Устинов А. В. Полиномы Коробова и теневой анализ // Чебышевский сб. 2003. Т. 4. № 4(8). С. 137–152.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
10. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
11. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / под ред. К. А. Рыбникова. М.: Наука, 1982. 368 с.
12. Беспалов М. С. О производящих функциях для некоторых тригонометрических сумм // Научные исследования института — техническому и культурному прогрессу. Материалы XXV научн. конф. ВПИ. Ч. 1. Владимир: ВПИ, 1990. С. 40.
13. Гузев М. А., Устинов А. В. Механические характеристики модели молекулярной динамики и полиномы Коробова // Дальневост. матем. журн. 2016. Т. 16. № 2. С. 39–43.

14. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. II. М.: Наука, 1984. 640 с.
15. Беспалов М. С. Тригонометрические суммы для задач молекулярной динамики // Междунар. конф. по матем. теории управления и механике. Тез. докл. Суздаль, 7–11 июля 2017. Владимир: ООО «Аркаим», 2017. С. 36–37.
16. Беспалов М. С., Панина Н. А. Программа вычисления точного значения сумм четных отрицательных степеней синусов в равноотстоящих узлах окружности. Зарегистрированная программа для ЭВМ. Свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2011616549 от 22 августа 2011 г.
17. Долгий Д. В., Ким Д. С., Ким Т. О полиномах Коробова первого рода // Матем. сб. 2017. Т. 206. № 1. С. 65–79.
18. Roman S. M. and Rota G.-C. The umbral calculus // Adv. Math. 1978. V. 27. P. 95–188.

REFERENCES

1. Ber M. G. and Malozemov V. N. The best formulas for approximate calculation of a discrete Fourier transform. Comput. Math. and Math. Physics, 1992, vol. 32, no. 11. pp. 1533–1544.
2. Izbrannye glavy discretnogo garmonicheskogo analiza i geometricheskogo modelirovaniya. Ch. 2. [Selected Chapters of Discrete Harmonic Analysis and Geometric Modeling. P. 2]. Ed. V. N. Malozemov. St. Petersburg, VVM Publ., 2014. 605 p. (in Russian)
3. Malozemov V. N. and Macharskiy S. M. Osnovy discretnogo garmonicheskogo analiza [Basics of Discrete Harmonic Analysis]. St. Petersburg, Lane Publ., 2012. 304 p. (in Russian)
4. Malozemov V. N. and Pevniy A. B. Discrete periodic splines and their computational application. Comput. Math. and Math. Physics, 1998, vol. 38, no. 8. pp. 1181–1192.
5. Bespalov M. S. Representation for sums of even negative degrees of sines in equidistant nodes. Russian Mathematics, 1996, vol. 40, no. 8, pp. 4–10.
6. Korobov N. M. Special'nye polinomy i ikh prilozheniya [Special polynomials and its application]. Diofantovy Priblizheniya. Matematicheskie Zapiski, 1996, vol. 2, pp. 77–89. (in Russian)
7. Ustinov A. V. O formulakh summirovaniya i interpolyacii [On summation and interpolation formulas]. Chebyshevskii Sbornik, 2001, vol. 1, no. 1, pp. 52–71. (in Russian)
8. Ustinov A. V. Polinomy Korobova i tenevoi analisis [Polynomials of Korobov and umbral analysis]. Chebyshevskii Sbornik, 2003, vol. 4, no. 4(8), pp. 137–152. (in Russian)
9. Horn R. A. and Johnson C. R. Matrix Analysis. Cambridge, Cambridge University Press, 1986. 662 p.
10. Trakhman A. M., Trakhman V. A. Osnovy teorii signalov na konechnikh intervalakh [Fundamentals of the Theory of Signals of Finite Intervals]. Moscow, Soviet Radio Publ., 1975. 208 p. (in Russian)
11. Kombinatorniy analisis. Zadachi i upragneniya [Combinatorial Analysis. Tasks and Exercises]. Ed. K. A. Rybnikov. Moscow, Nauka Publ., 1982. 368 p. (in Russian)
12. Bespalov M. S. O proizvodyachikh funkciyakh dlia nekotorykh trigonometricheskikh summ [On generating functions for same trigonometric sums]. Proc. XXV Sci. Conf. VPI. P. 1. Vladimir, VPI Publ., 1990, p. 40. (in Russian)
13. Guzev M. A. and Ustinov A. V. Mechanical characteristics of molecular dynamics model and Korobov polynomials. Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 39–43. (in Russian)
14. Zorich V. A. Matematicheskii analisis [Mathematical Analysis]. P. 2. Moscow, Nauka Publ., 1984. 640 p. (in Russian)
15. Bespalov M. S. Trigonometricheskie summy dlia zadach molekuliarnoy dinamiki [Trigonometric sums for problems of molecular dynamics]. Intern. Conf. Math. Control Theory and Mechanics. Vladimir, Arkaim Publ., 2017, pp. 36–37. (in Russian)

16. *Bespalov M. S. and Panina N. A.* Program calculation exact value for sums of even negative degrees of sines in equidistant nodes. Program for computation no. 2011616549. 22.08.2011.
17. *Dolgy D. V., Kim D. S., and Kim T.* Korobov polynomials of the first kind. Sb. Math. 2017, vol. 208, no. 1. pp. 60–74.
18. *Roman S. M. and Rota G.-C.* The umbral calculus. Adv. Math., 1978, vol. 27, pp. 95–188.