

УДК 519.718.7

**СИНТЕЗ ЛЕГКОТЕСТИРУЕМЫХ СХЕМ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ
НА ВХОДАХ И ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ¹**

К. А. Попков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

Доказаны следующие утверждения: для любого натурального k существует базис из булевых функций от не более чем $2k + 2$ переменных (от не более чем $4k + 2$ переменных), в котором любую булеву функцию, кроме константы 1, можно реализовать схемой из функциональных элементов, избыточной и допускающей проверяющий тест длины не более 3 (соответственно, диагностический тест длины не более 4) относительно не более k произвольных константных неисправностей на входах и выходах элементов. Показано, что при рассмотрении только произвольных константных неисправностей на входах элементов указанные оценки длин тестов можно понизить до 2.

Ключевые слова: *схема из функциональных элементов, произвольная константная неисправность, проверяющий тест, диагностический тест.*

DOI 10.17223/20710410/43/6

**SYNTHESIS OF EASILY TESTABLE LOGIC NETWORKS
UNDER ARBITRARY STUCK-AT FAULTS
AT INPUTS AND OUTPUTS OF GATES**

K. A. Popkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Two binary vectors are called k -adjacent if they differ in at most k components, where $k \in \mathbb{N}$. For $\alpha \in \{0, 1\}$ and $s \in \mathbb{N}$, let α^s be the Boolean vector (α, \dots, α) with s coordinates α . For each natural k , consider the bases $B(k) = \{\varphi(x_1, \dots, x_{2k+2}), x_1 \dots x_{k+1} \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{k+1}, \bar{x}, 0\}$ and $B'(k) = \{\varphi(x_1, \dots, x_{2k+2}), \xi(x_1, \dots, x_{3k+2}), \eta(x_1, \dots, x_{4k+2}), \bar{x}, 0\}$, where $\varphi(x_1, \dots, x_{2k+2})$ is an arbitrary non-self-dual Boolean function taking the value α on the vector α^{2k+2} and the value $\bar{\alpha}$ on all other vectors k -adjacent to this vector; $\xi(x_1, \dots, x_{3k+2})$ is an arbitrary Boolean function taking the value α on the vector α^{3k+2} , the value $\bar{\alpha}$ on all other vectors k -adjacent to this vector, and the value α on all vectors k -adjacent to the vector $(\alpha^{k+1}, \bar{\alpha}^{2k+1})$; $\eta(x_1, \dots, x_{4k+2})$ is an arbitrary Boolean function taking the value 1 on the vector α^{4k+2} , the value 0 on all other vectors k -adjacent to this vector, and the value α on all vectors k -adjacent to the vector $(\alpha_{2k+1}, \bar{\alpha}^{2k+1})$. Let $D_k(I)(f)$ ($D_k(IO)(f)$), $D'_k(I)(f)$, $D'_k(IO)(f)$ be the least length of a fault detection test (fault detection test, diagnostic test, diagnostic test, respectively) for irredundant logic networks consisting of logic gates in the basis $B(k)$ (basis $B(k)$, basis $B'(k)$, basis $B'(k)$, respectively), implementing given Boolean function $f(x_1, \dots, x_n)$, and having at most k arbitrary

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00337.

stuck-at faults on inputs of gates (on inputs and/or outputs of gates, on inputs of gates, on inputs and/or outputs of gates, respectively). Let a Boolean function $f(x_1, \dots, x_n)$ be called palindromic if it takes the same value on any two opposite binary n -tuples. The following facts are obtained. The quantity $D_{k(I)}(f)$ equals 0 iff f is an identical function (i.e., $f \equiv x_i$ for some $i \in \{1, \dots, n\}$) and equals 2 otherwise. The quantity $D_{k(IO)}(f)$ equals 0 iff f is an identical function, equals 1 iff $f \equiv 0$, equals 2 iff f is not an identical or palindromic function, equals 3 iff f is a palindromic function and $f \neq 0, 1$, and is undefined iff $f \equiv 1$. The quantity $D'_{k(I)}(f)$ equals 0 iff f is an identical function and equals 2 otherwise. The quantity $D'_{1(IO)}(f)$ equals 0 iff f is an identical function, equals 1 iff $f \equiv 0$, equals 2 iff $f \equiv \bar{x}_i$ for some $i \in \{1, \dots, n\}$, equals 3 iff f is not a self-dual function and $f \neq 0, 1$, equals 4 iff f is a self-dual function and $f \notin \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, and is undefined iff $f \equiv 1$. For each $k \in \mathbb{N}$, the equality $D'_{k(IO)}(f) = 4$ holds true under $n \geq 3$, and in the case $k \geq 2$, the proportion of those Boolean functions f in n variables, for which $D'_{k(IO)}(f) = 4$, tends to 1 under $n \rightarrow \infty$.

Keywords: *logic network, arbitrary stuck-at fault, fault detection test, diagnostic test.*

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход применим также к тестированию схем из функциональных элементов [2–4]. Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f . Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S , называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2–4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных x_1, \dots, x_n , что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных x_1, \dots, x_n , что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n . Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* [4, с. 110–111], т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой (такие функции неисправности называют *нетривиальными*).

Назовём проверяющий (диагностический) тест *k-проверяющим* (*k-диагностическим*), если в схеме могут быть неисправны не более k элементов, где $k \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать такие тесты только для *k-неизбыточных схем* [5, с. 68], в которых любая

допустимая неисправность не менее одного и не более k элементов приводит к нетривиальной функции неисправности. Очевидно, что понятия 1-проверяющего теста, 1-диагностического теста и 1-неизбыточной схемы совпадают с понятиями единичного проверяющего теста, единичного диагностического теста и избыточной схемы соответственно.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — единичный проверяющий тест для некоторой схемы из функциональных элементов S в базисе B . Введём следующие обозначения: пусть $D_{\text{ЕП}}^B(T)$ — длина теста T ; $D_{\text{ЕП}}^B(S) = \min D_{\text{ЕП}}^B(T)$, где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам T для схемы S ; $D_{\text{ЕП}}^B(f) = \min D_{\text{ЕП}}^B(S)$, где минимум берётся по всем избыточным схемам S в базисе B , реализующим функцию f ; $D_{\text{ЕП}}^B(n) = \max D_{\text{ЕП}}^B(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D_{\text{ЕП}}^B(f)$. Функция $D_{\text{ЕП}}^B(n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного проверяющего теста. По аналогии с функциями $D_{\text{ЕП}}^B$ можно ввести функции $D_{\text{ПП}}^B$, $D_{k\text{-П}}^B$, $D_{\text{ЕД}}^B$, $D_{\text{ПД}}^B$ и $D_{k\text{-Д}}^B$ для соответственно полного проверяющего, k -проверяющего, единичного, полного диагностического и k -диагностического тестов, зависящие от T , S , f и n (в определениях функций $D_{\text{ПП}}^B(f)$ и $D_{\text{ПД}}^B(f)$ не предполагается избыточность схем, а в определениях функций $D_{k\text{-П}}^B(f)$ и $D_{k\text{-Д}}^B(f)$ предполагается k -неизбыточность схем). Так, например, $D_{k\text{-Д}}^B(n)$ — функция Шеннона длины k -диагностического теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на входах и выходах элементов, а также только на входах элементов, при которых значение на неисправном входе (выходе) любого элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на входах и выходах элементов называются однотипными константными типа p , если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна p , и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой D после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «0, 1» или « p » в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности или однотипные константные неисправности типа p , $p \in \{0, 1\}$, на входах/выходах элементов, а под буквой D после символов, обозначающих вид функции, — символы «(IO)» или «(I)» в случаях, когда в схемах допускаются неисправности соответственно на входах и выходах элементов или только на входах элементов. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа α , то у элемента, её реализующего, нет входов и не может быть неисправности типа α на его выходе.

В [4, с. 116] для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ показано, что $D_{\text{ЕП}}^{B_1; 0,1}(\text{IO})(n) \leq n + 3$; при этом используется метод построения схем из работы [6]. К. К. Салуджа и С. М. Редди в [7] получили оценку $D_{k\text{-П}}^{*B_1; 0,1}(\text{IO})(n) \leq 4 + \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 2k \rceil} C_i^n$; наличие звёздочки над буквой D обусловлено тем, что в указанной работе рассматривались схемы, содержащие, помимо входных переменных x_1, \dots, x_n , дополнительную входную переменную h_0 , вместо которой при реализации функций подавалась булева константа, но которая принимала значения как 0, так и 1 на наборах из теста. Д. С. Романовым и Е. Ю. Романовой в [8] для базисов $B'_1 = \{\&, \oplus, 1\}$, $B''_1 = \{\&, \oplus, \sim\}$ установлены

неравенства $D_{\text{ЕП(Ю)}}^{B'_1;0,1}(n) \leq 16$ и $D_{\text{ЕП(Ю)}}^{B''_1;0,1}(n) \leq 16$; в частности, при $n \geq 14$ улучшен упомянутый результат из [4] (любая схема в базисе B'_1 является также схемой в базисе B_1). Н. П. Редькин в [9–11] для базиса $B_2 = \{\&, \vee, \neg\}$ получил оценки $D_{\text{ПП(Ю)}}^{B_2;p}(n) \lesssim 4 \left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \right)$, $D_{\text{ЕД(Ю)}}^{B_2;p}(n) \lesssim 4 \left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \right)$ и $D_{\text{ПП(Ю)}}^{B_2;0,1}(n) \lesssim \frac{2^n}{\sqrt{\log_2 n}}$ соответственно, где $p = 0$ или 1 . В работе [12] для любого натурального k и для любой булевой константы p доказано существование базиса $B_3(k, p)$, состоящего из булевой функции от $\max(k+1, 3)$ переменных и функции \bar{x} , для которого, в частности, $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_3(k,p);p}(n) = 2$ при $n \geq 1$ и $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_3(k,p);p}(n) = 1$ при $n \geq 0$, а также существование базиса $B_4(k, p)$, состоящего из булевой функции от не более чем $2,5k+2$ переменных и отрицания этой функции, для которого, в частности, $D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_4(k,p);p}(n) = 2$ и $D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_4(k,p);p}(n) = 1$ при $n \geq 0$ (следствия 1–4 и двойственные им результаты).

В данной работе рассматриваются k -проверяющие и k -диагностические тесты при $k \in \mathbb{N}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на входах и выходах элементов, а также только на входах элементов. Определены базисы $B_5(k)$ и $B_6(k)$, состоящие из булевых функций от не более чем $2k+2$ и $4k+2$ переменных соответственно, для которых доказаны равенства $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_5(k);0,1}(n) = D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_6(k);0,1}(n) = 2$ при $n \geq 0$, $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_5(k);0,1}(n) = 3$ при $n \geq 2$ и $D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_6(k);0,1}(n) = 4$ при $n \geq 3$ (следствия 1–4 и теорема 5).

В дальнейшем для краткости верхние индексы $0, 1$ у величин вида $D_{\dots}^{B_5(k);0,1}$ и $D_{\dots}^{B_6(k);0,1}$, зависящих от f или n , будем опускать.

Введём обозначения $\tilde{0}^r = \underbrace{0, \dots, 0}_r$, $\tilde{1}^r = \underbrace{1, \dots, 1}_r$, где $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Два двоичных набора называются *противоположными*, если они различаются во всех компонентах. Будем называть два двоичных набора k -соседними, если они различаются не более чем в k компонентах.

1. Проверяющие тесты

Рассмотрим базис $B_5(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \psi(\tilde{x}^{k+1}), \bar{x}, 0\}$, где $\psi(\tilde{x}^{k+1}) = x_1 \dots x_{k+1} \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{k+1}$, а $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ — произвольная несамодвойственная булева функция (определение самодвойственной булевой функции можно найти, например, в [13, с. 16]), для которой выполнены следующие условия:

- (i) $\varphi(\tilde{\alpha}^{2k+2}) = \alpha$ для $\alpha = 0, 1$;
- (ii) $\varphi(\tilde{\sigma}) = \bar{\alpha}$, где $\alpha = 0, 1$, а $\tilde{\sigma}$ — любой двоичный набор длины $2k+2$, k -соседний с набором $(\tilde{\alpha}^{2k+2})$, кроме него самого.

Отметим, что условия (i), (ii) однозначно определяют значения функции $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ на всех наборах, кроме наборов ровно с $k+1$ нулевой и $k+1$ единичной компонентами. Для выполнения условия несамодвойственности необходимо и достаточно, чтобы на каких-то двух противоположных наборах ровно с $k+1$ нулевой и $k+1$ единичной компонентами функция φ принимала одинаковые значения.

Легко видеть, что функция ψ обладает следующими свойствами:

$$(iii) \quad \psi(x, \underbrace{y, \dots, y}_k) = x \oplus y \oplus 1;$$

$$(iv) \quad \psi(\tilde{\sigma}') = 0, \text{ где } \tilde{\sigma}' \text{ — любой двоичный набор длины } k+1, \text{ отличный от наборов } (\tilde{0}^{k+1}) \text{ и } (\tilde{1}^{k+1}).$$

Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ (вида $\psi(\tilde{x}^{k+1}, \bar{x}, 0)$), будем называть φ -элементом (соответственно, ψ -элементом, инвертором, элементом «константа 0»).

Назовём булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $n \geq 1$, *тождественной*, если $f \equiv x_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Лемма 1. Любую тождественную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k -неизбыточной схемой в базе $B_5(k)$, допускающей k -проверяющий тест длины 0 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

Доказательство. Функцию f , очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество является для неё k -проверяющим тестом. ■

Лемма 2. В случае $f \equiv 0$ справедливы равенства $D_{k-\Pi(1)}^{B_5(k)}(f) = 0$, $D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f) = 1$.

Доказательство. Функцию f можно реализовать схемой S , состоящей из одного элемента «константа 0» (обозначим этот элемент через E). Он не имеет входов, поэтому пустое множество является для данной схемы k -проверяющим тестом относительно неисправностей на входах элементов, откуда следует равенство $D_{k-\Pi(1)}^{B_5(k)}(f) = 0$. При рассмотрении неисправностей на входах и выходах элементов единственной возможной неисправностью схемы S является неисправность типа 1 на выходе элемента E , при которой схема станет реализовывать константу 1. Указанная неисправность обнаруживается на любом двоичном наборе длины n , поэтому $D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f) \leq 1$. С другой стороны, выход любой схемы в базе $B_5(k)$, реализующей константу 0, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности типа 1 выхода этого элемента получающаяся схема станет реализовывать константу 1, которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f) \geq 1$. ■

Лемма 3. Для любой k -неизбыточной схемы в базе $B_5(k)$, реализующей не тождественную и отличную от константы 0 булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, любой k -проверяющий тест относительно неисправностей на входах элементов содержит хотя бы два набора.

Доказательство. Выход любой k -неизбыточной схемы S , реализующей функцию f , не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента E , отличного от элемента «константа 0» и, как следствие, имеющего хотя бы один вход. Тогда при неисправности типа α , $\alpha \in \{0, 1\}$, любого фиксированного входа этого элемента получающаяся схема будет реализовывать нетривиальную функцию неисправности, которая может отличаться от функции $f(\tilde{x}^n)$ только на тех наборах, на которых в случае отсутствия неисправностей в схеме S на указанном входе элемента E возникает значение $\bar{\alpha}$. Данные два множества наборов при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ не пересекаются, а в любой k -проверяющий тест для схемы S относительно неисправностей на входах элементов должно входить хотя бы по одному набору из каждого из этих множеств. ■

Назовём булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ *палиндромной*, если на любой паре противоположных наборов длины n она принимает одинаковые значения.

Будем говорить, что функциональный элемент E' расположен в схеме S *ниже* функционального элемента E , если в этой схеме существует ориентированный путь от E к E' .

Введём обозначение $\alpha^\beta = \alpha \oplus \beta \oplus 1$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Очевидно, что $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^0 = \bar{\alpha}$, $1^\beta = \beta$ и $0^\beta = \bar{\beta}$.

Лемма 4. Любую не палиндромную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k -неизбыточной схемой в базисе $B_5(k)$, состоящей только из φ -элементов и инверторов и допускающей k -проверяющий тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, где $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ — произвольные два противоположных двоичных набора длины n , такие, что $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$.

Замечание 1. Существование таких наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ следует из того, что функция f не является палиндромной.

Доказательство леммы 4. Пусть $A = [\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}]$ — замыкание множества $\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}$, тогда $A \subseteq T_{01}$ в силу условия (i) (определения замыкания и замкнутого класса T_{01} можно найти, например, в [13] на с. 14 и 34 соответственно). Докажем, что $A = T_{01}$. Как было отмечено выше, функция φ принимает одинаковые значения на каких-то двух противоположных наборах длины $2k + 2$, содержащих $k + 1$ нулевую и $k + 1$ единичную компоненты. Без ограничения общности это наборы $(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1})$ и $(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1})$. Если $\varphi(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1}) = \varphi(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1}) = 0$, то из определения функции φ нетрудно получить, что $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_{k+1}, \underbrace{y, \dots, y}_{k+1}) = xy$, $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_k, \underbrace{y, \dots, y}_k, xy, xy) = x \vee y$ и

$$\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_k, \underbrace{x \vee y, \dots, x \vee y}_k, x \vee yz, x \vee yz) = x \vee y\bar{z}; \quad (1)$$

если же $\varphi(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1}) = \varphi(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1}) = 1$, то из определения функции φ получим, что $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_{k+1}, \underbrace{y, \dots, y}_{k+1}) = x \vee y$, $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_k, \underbrace{y, \dots, y}_k, x \vee y, x \vee y) = xy$ и выполнено соотношение (1). Таким образом, $\{x \vee y\bar{z}, xy\} \subseteq A$, следовательно, $T_{01} = [\{x \vee y\bar{z}, xy\}] \subseteq A$ (равенство $T_{01} = [\{x \vee y\bar{z}, xy\}]$ установлено, например, в [13, с. 41]). Отсюда и из соотношения $A \subseteq T_{01}$ получаем, что $A = T_{01}$, т. е. любую булеву функцию $h(\tilde{x}^n)$ из класса T_{01} можно выразить формулой ϕ_h над множеством $\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}$. Тогда существует схема S_h в базисе $B_5(k)$, моделирующая формулу ϕ_h и состоящая только из входных переменных x_1, \dots, x_n и φ -элементов, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента.

На наборе $(\tilde{\alpha}^n)$ на всех $2k + 2$ входах и на выходе каждого элемента схемы S_h в силу условия (i) возникнет значение α , где $\alpha = 0, 1$. Предположим, что среди всех входов и выходов элементов схемы S_h есть не менее одного и не более k неисправных. Из всех элементов схемы, у которых хотя бы один вход и/или выход неисправны, выберем произвольный «нижний» элемент E , ниже которого в схеме S_h не существует элемента с указанным свойством (это можно сделать, так как схема S конечна и не содержит ориентированных циклов). Пусть значение на выходе элемента E , если он неисправен, либо значение на произвольном неисправном входе элемента E , если выход этого элемента исправен, равно $\bar{\delta}$, $\delta \in \{0, 1\}$.

Докажем, что значение на выходе этого элемента на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ в схеме S_h равно $\bar{\delta}$. Если неисправен выход элемента E , то утверждение очевидно. Если этот выход исправен, то хотя бы один из входов элемента E неисправен и значение на нём равно $\bar{\delta}$. Тогда на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ значения не менее чем на одном и не более чем на k входах этого элемента в схеме S_h отличны от «правильных», т. е. от δ , поскольку всего в этой схеме неисправны не более k входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся. Тогда в силу условия (ii) значение на выходе элемента E на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ в схеме S равно $\bar{\delta}$, что и требовалось доказать.

Далее изменение значения на выходе элемента E на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ в схеме S_h с «правильного» значения δ на $\bar{\delta}$ пройдёт по цепочке до выхода схемы S_h (здесь снова используются тот факт, что всего в этой схеме неисправны не более k входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся, и условие (ii)). Таким образом, неисправность схемы S_h будет обнаружена на наборе $(\tilde{\delta}^n)$. Отсюда следует, что данная схема k -неизбыточна и множество $\{(\tilde{0}^n, \tilde{1}^n)\}$ является для неё k -проверяющим тестом.

Пусть $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ и $f'(\tilde{x}^n) = f(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$. Тогда $\tilde{\sigma}_0 = (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n)$,

$$\begin{aligned} f'(\tilde{0}^n) &= f(0^{\sigma_1}, \dots, 0^{\sigma_n}) = f(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n) = f(\tilde{\sigma}_0) = 0, \\ f'(\tilde{1}^n) &= f(1^{\sigma_1}, \dots, 1^{\sigma_n}) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1, \end{aligned}$$

поэтому $f'(\tilde{x}^n) \in T_{01}$. Значит, существует k -неизбыточная схема $S_{f'}$ в базисе $B_5(k)$, реализующая функцию f' и допускающая k -проверяющий тест из наборов $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$. Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ в случае $\sigma_i = 1$ подадим на вход данной схемы, отвечающий переменной x_i , саму эту переменную, а в случае $\sigma_i = 0$ соединим каждый вход каждого элемента схемы $S_{f'}$, на который подавалась переменная x_i , с выходом (своего) инвертора, на вход которого подадим переменную x_i . Полученную схему (с тем же выходным элементом, что и у схемы $S_{f'}$) обозначим через S ; легко видеть, что на её выходе реализуется функция $f'(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}) = f(\tilde{x}^n)$.

Заметим, что неисправность на входе и/или выходе каждого «добавленного» инвертора схемы S равносильна некоторой неисправности на входе элемента, соединённого с выходом этого инвертора. Поэтому можно считать, что неисправными в схеме S могут быть только входы/выходы элементов из её подсхемы $S_{f'}$. На наборе $\tilde{\sigma}_1$ на все входы подсхемы $S_{f'}$ по построению поступят единицы, а на наборе $\tilde{\sigma}_0$ — нули. Множество $\{(\tilde{0}^n), (\tilde{1}^n)\}$ позволяет обнаружить любую неисправность не более k входов/выходов элементов в этой подсхеме. Отсюда следует, что схема S является k -неизбыточной и допускает k -проверяющий тест из наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$. ■

Лемма 5. Любую палиндромную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, отличную от константы 0, можно реализовать схемой в базисе $B_5(k)$, k -неизбыточной и допускающей k -проверяющий тест длины 2 относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе выходного элемента схемы.

Доказательство. Существуют такие два противоположных набора длины n , на каждом из которых функция f принимает значение 1, поскольку $f \neq 0$. Обозначим тот из них, первая компонента которого равна единице, через $\tilde{\sigma}_1$, а другой — через $\tilde{\sigma}_0$. Пусть $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ и $\hat{f}(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1$. Тогда $\sigma_1 = 1$, $\tilde{\sigma}_0 = (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n)$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\tilde{\sigma}_0) &= f(\tilde{\sigma}_0) \oplus \bar{\sigma}_1 \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \\ \hat{f}(\tilde{\sigma}_1) &= f(\tilde{\sigma}_1) \oplus \sigma_1 \oplus 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \end{aligned}$$

поэтому $\hat{f}(\tilde{x}^n)$ — не палиндромная функция. Тогда в силу леммы 4 существует k -неизбыточная схема S' в базисе $B_5(k)$, реализующая функцию \hat{f} и допускающая k -проверяющий тест из наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Соединим выход данной схемы со входом ψ -элемента E , отвечающим переменной x_1 , а на все остальные входы этого элемента подадим переменную x_1 . Выход элемента E объявим выходом полученной схемы, которую обозначим через S . В силу свойства (iii) она реализует функцию

$$\psi(\hat{f}(\tilde{x}^n), \underbrace{x_1, \dots, x_1}_k) = \hat{f}(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1 = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1 \oplus x_1 \oplus 1 = f(\tilde{x}^n).$$

При отсутствии неисправностей в схеме S в силу равенств $\hat{f}(\tilde{\sigma}_1) = 1$, $\sigma_1 = 1$ и $\hat{f}(\tilde{\sigma}_0) = 0$ на все входы элемента E на наборе $\tilde{\sigma}_1$ поступят единицы, а на наборе $\tilde{\sigma}_0$ — нули. Если выход элемента E исправен, а хотя бы один из его входов или из входов/выходов элементов подсхемы S' неисправен, то хотя бы на одном из этих наборов не менее чем на одном и не более чем на k входах элемента E возникнут «неправильные» значения, а тогда в силу свойства (iv) значение на выходе элемента E , т. е. на выходе схемы S , изменится, поэтому неисправность будет обнаружена на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$. Наконец, неисправность типа 0 на выходе элемента E обнаруживается на любом из этих двух наборов, так как $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Поэтому схема S является k -неизбыточной относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе её выходного элемента, и допускает k -проверяющий тест из наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ относительно неисправностей указанного вида. ■

Теорема 1. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство

$$D_{k-\Pi(1)}^{B_5(k)}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция или } f \equiv 0, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Вместо $D_{k-\Pi(1)}^{B_5(k)}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Равенство $D(f) = 0$ в случаях, когда f — тождественная функция и $f \equiv 0$, следует из лемм 1 и 2 соответственно. Если функция f не тождественная и отлична от константы 0, то неравенство $D(f) \geq 2$ вытекает из леммы 3, а неравенство $D(f) \leq 2$ — из лемм 4 и 5. ■

Следствие 1. Для любого $n \geq 0$ справедливо равенство $D_{k-\Pi(1)}^{B_5(k)}(n) = 2$.

Лемма 6. Не существует схем в базисе $B_5(k)$, реализующих константу 1 и k -неизбыточных относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

Доказательство. Выход любой схемы в базисе $B_5(k)$, реализующей константу 1, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности типа 1 на выходе этого элемента получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать константу 1, т. е. исходная схема k -избыточна. ■

Очевидно, что никакая тождественная функция не является палиндромной, а константа 0 является палиндромной функцией.

Теорема 2. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 1, справедливо равенство

$$D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция,} \\ 1, & \text{если } f \equiv 0, \\ 2, & \text{если } f \text{ — не тождественная и не палиндромная функция,} \\ 3, & \text{если } f \text{ — палиндромная функция и } f \neq 0. \end{cases}$$

Если $f \equiv 1$, то значение $D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f)$ не определено.

Доказательство. Вместо $D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. В случае $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу леммы 6. Равенства $D(f) = 0$, если функция f тождественная, и $D(f) = 1$, если $f \equiv 0$, следуют из лемм 1 и 2 соответственно. В случае, когда функция f не тождественная и не палиндромная, неравенство $D(f) \geq 2$ следует из леммы 3, а $D(f) \leq 2$ — из леммы 4.

Пусть f — палиндромная функция и $f \neq 0, 1$. В силу леммы 5 функцию f можно реализовать схемой S в базисе $B_5(k)$, k -неизбыточной и допускающей k -проверяющий тест длины 2 относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе выходного элемента схемы. Добавим в этот тест любой двоичный набор длины n , на котором функция f принимает значение 0. На нём обнаруживается неисправность типа 1 на выходе выходного элемента схемы S (возможно, при наличии в ней других неисправных входов/выходов элементов). Поэтому данная схема k -неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов и допускает k -проверяющий тест длины не более 3 относительно неисправностей указанного вида. Отсюда следует, что $D(f) \leq 3$.

Докажем неравенство $D(f) \geq 3$. Предположим, что это не так, т. е. $D(f) \leq 2$. В силу леммы 3 имеем $D(f) \geq 2$, поэтому $D(f) = 2$. Значит, существует k -неизбыточная схема S' в базисе $B_5(k)$, реализующая функцию f и допускающая k -проверяющий тест из каких-то двух наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$. Пусть x_{i_1}, \dots, x_{i_s} — все существенные переменные функции f . Предположим, что i_j -е (слева) компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают для некоторого $j \in \{1, \dots, s\}$ и равны α . Переменная x_{i_j} обязана подаваться хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы S' , поскольку $x_{i_j} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$. Тогда неисправность типа α этого входа нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$; противоречие. Следовательно, наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в каждой из i_1 -й, \dots , i_s -й компонент.

Далее, пусть $\tilde{\pi}'_1$ — набор, противоположный набору $\tilde{\pi}_1$. Тогда $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}'_1)$ в силу палиндромности функции f . Наборы $\tilde{\pi}'_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают в i_1 -й, \dots , i_s -й компонентах, а функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит только от переменных x_{i_1}, \dots, x_{i_s} , поэтому $f(\tilde{\pi}'_1) = f(\tilde{\pi}_2)$. Таким образом, $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2)$. Отсюда следует, что неисправность типа $f(\tilde{\pi}_1)$ на выходе выходного элемента схемы S' нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$, т. е. множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ не является k -проверяющим тестом для этой схемы. Полученное противоречие означает, что $D(f) \geq 3$. ■

Следствие 2. Для любого $n \geq 2$ справедливо равенство $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_5(k)}(n) = 3$.

Замечание 2. Среди всех схем, построенных при доказательстве верхних оценок величин $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_5(k)}(f)$ и $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_5(k)}(f)$ в теоремах 1 и 2 соответственно, элемент «константа 0» использовался только в построении схем, реализующих тождественный нуль, а ψ -элемент — только в построении схем, реализующих отличные от нуля палиндромные функции (причём в единственном числе).

2. Диагностические тесты

Пусть $\xi(\tilde{x}^{3k+2}), \eta(\tilde{x}^{4k+2})$ — булевы функции, удовлетворяющие следующим условиям при $\alpha = 0, 1$:

- (v) $\xi(\tilde{\alpha}^{3k+2}) = \alpha$;
- (vi) на всех наборах, k -соседних с набором $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, кроме него самого, функция ξ принимает значение $\bar{\alpha}$;
- (vii) на всех наборах, k -соседних с набором $\tilde{\rho}_\alpha = (\tilde{\alpha}^{k+1}, \tilde{\alpha}^{2k+1})$, функция ξ принимает значение α ;
- (viii) $\eta(\tilde{\alpha}^{4k+2}) = 1$;
- (ix) на всех наборах, k -соседних с набором $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$, кроме него самого, функция η принимает значение 0;
- (x) на всех наборах, k -соседних с набором $\tilde{\gamma}_\alpha = (\tilde{\alpha}^{2k+1}, \tilde{\alpha}^{2k+1})$, функция η принимает значение α .

На всех остальных двоичных наборах длины $3k + 2$ (длины $4k + 2$) функция ξ (соответственно η) может принимать произвольные значения.

Покажем, что каждая из функций $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$, $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ определена корректно, т. е. множества наборов, на которых она принимает значения 0 и 1, не пересекаются. Заметим, что для любого $\alpha \in \{0, 1\}$ набор $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ отличается от каждого из наборов $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, $\tilde{\rho}_\alpha$ по крайней мере в $(2k + 1)$ компонентах, поэтому любой набор, k -соседний с набором $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, отличается от каждого из наборов $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, $\tilde{\rho}_\alpha$ по крайней мере в $(k + 1)$ компонентах, т. е. не может быть k -соседним ни с одним из этих наборов. Набор $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ отличается от набора $\tilde{\rho}_{\bar{\alpha}}$ в $(k + 1)$ компонентах, поэтому не является k -соседним с этим набором. Кроме того, наборы $\tilde{\rho}_0$ и $\tilde{\rho}_1$ различаются в $(3k + 2)$ компонентах, поэтому никакой набор, k -соседний с набором $\tilde{\rho}_0$, не может быть k -соседним с набором $\tilde{\rho}_1$. Из приведённых рассуждений и условий (v)–(vii) следует, что множества наборов, на которых функция $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$ принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Далее, для любого $\alpha \in \{0, 1\}$ набор $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$ отличается от набора $\tilde{\nu}_1$ в $(2k + 1)$ компонентах, поэтому никакой набор, k -соседний с набором $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$, не может быть k -соседним с набором $\tilde{\nu}_1$. Наборы $\tilde{\nu}_0$ и $\tilde{\nu}_1$ различаются в $(4k + 2)$ компонентах, поэтому никакой набор, k -соседний с набором $\tilde{\nu}_0$, не может быть k -соседним с набором $\tilde{\nu}_1$. Кроме того, любые два из наборов $(\tilde{0}^{4k+2})$, $(\tilde{1}^{4k+2})$ и $\tilde{\nu}_0$ различаются по крайней мере в $(2k + 1)$ компонентах, поэтому не являются k -соседними. Из приведённых рассуждений и условий (viii)–(x) следует, что множества наборов, на которых функция $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Рассмотрим базис $B_6(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \xi(\tilde{x}^{3k+2}), \eta(\tilde{x}^{4k+2}), \bar{x}, 0\}$, где $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ — булева функция из базиса $B_5(k)$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$ ($\eta(\tilde{x}^{4k+2})$), будем называть ξ -элементом (соответственно η -элементом).

По аналогии с леммами соответственно 1, 2, 3 и 6 доказываются следующие утверждения.

Лемма 7. Любую тождественную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k -неизбыточной схемой в базисе $B_6(k)$, допускающей k -диагностический тест длины 0 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

Лемма 8. В случае $f \equiv 0$ справедливы равенства $D_{k-Д(1)}^{B_6(k)}(f) = 0$, $D_{k-Д(10)}^{B_6(k)}(f) = 1$.

Лемма 9. Для любой k -неизбыточной схемы в базисе $B_6(k)$, реализующей не тождественную и отличную от константы 0 булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, любой k -диагностический тест относительно неисправностей на входах элементов содержит хотя бы два набора.

Лемма 10. Не существует схем в базисе $B_6(k)$, реализующих константу 1 и k -неизбыточных относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

Через $I_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^n)$ будем обозначать булеву функцию, принимающую значение 1 на наборе $\tilde{\sigma}$ и 0 на всех остальных наборах длины n .

Лемма 11. Любую не палиндромную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, принимающую значения 0 и 1 на каких-то противоположных наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ соответственно, можно реализовать схемой в базисе $B_6(k)$, k -неизбыточной и допускающей k -диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$.

Доказательство. Пусть $f' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1$. Тогда справедливы соотношения

$$f'(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_0) \oplus 1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \quad (2)$$

$$f'(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_1) \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \quad (3)$$

из которых следует, что функция $f'(\tilde{x}^n)$ не является палиндромной.

Построим схему S в базисе $B_6(k)$, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ (рис. 1). Схема S состоит из $(3k + 2)$ подсхем S_1, \dots, S_{3k+2} и выходного ξ -элемента E , входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы S_1 , ..., $(3k + 2)$ -й вход — с выходом подсхемы S_{3k+2}). Каждая из подсхем S_1, \dots, S_{k+1} реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, а каждая из подсхем S_{k+2}, \dots, S_{3k+2} — функцию $f'(\tilde{x}^n)$, причём каждая из подсхем S_1, \dots, S_{3k+2} является k -неизбыточной схемой, состоящей только из φ -элементов и инверторов и допускающей k -проверяющий тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов; существование таких схем следует из леммы 4. При этом используется тот факт, что функции f и f' не являются палиндромными, а также соотношения $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$, $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, (2) и (3).

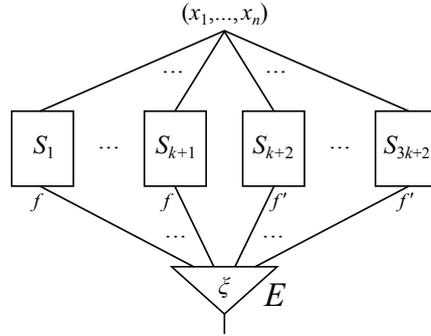


Рис. 1. Схема S

Докажем, что построенная схема S в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Всюду ниже в доказательстве леммы 11 предполагаем, что α — произвольное число из множества $\{0, 1\}$. На любом двоичном наборе $\tilde{\tau}_\alpha$ ($\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_\alpha$), на котором функция f принимает значение α , на выходе каждой из подсхем S_1, \dots, S_{k+1} возникнет значение α , а на выходе каждой из подсхем S_{k+2}, \dots, S_{3k+2} — значение $f'(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = \bar{\alpha}$, поскольку $\tilde{\tau}_\alpha \notin \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ (действительно, $\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_\alpha$ по определению и $\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_{\bar{\alpha}}$ в силу того, что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha \neq f(\tilde{\sigma}_{\bar{\alpha}})$). Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $\tilde{\rho}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S , возникнет значение $\xi(\tilde{\rho}_\alpha) = \alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (vii). Далее, на наборе $\tilde{\sigma}_\alpha$ на выходе каждой из подсхем S_1, \dots, S_{k+1} возникнет значение $f(\tilde{\sigma}_\alpha) = \alpha$, а на выходе каждой из подсхем S_{k+2}, \dots, S_{3k+2} — значение

$$f'(\tilde{\sigma}_\alpha) = f(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_\alpha}(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_{\bar{\alpha}}}(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = \alpha.$$

Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S , возникнет значение $\xi(\tilde{\alpha}^{3k+2}) = \alpha = f(\tilde{\sigma}_\alpha)$ в силу условия (v). Таким образом, на выходе схемы S реализуется функция $f(\tilde{x}^n)$.

Найдём все возможные функции неисправности схемы S относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента E схемы исправен. Неисправность на i -м входе элемента E равносильна неисправности такого

же типа на выходе выходного элемента подсхемы S_i , где i — произвольный индекс от 1 до $3k + 2$. Поэтому можно считать, что неисправными в схеме S могут быть только входы/выходы элементов из её подсхем S_1, \dots, S_{3k+2} . При произвольной неисправности не менее одного и не более k входов/выходов таких элементов на любом входном наборе схемы S могут измениться значения не более чем на k входах элемента E . Поэтому на любом наборе $\tilde{\tau}_\alpha$ ($\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_\alpha$), на котором функция f принимает значение α , на входы элемента E поступит набор, k -соседний с набором $\tilde{\rho}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S , возникнет значение $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (vii).

На наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ на входы элемента E поступят наборы $\tilde{\pi}_0$ и $\tilde{\pi}_1$ длины $3k + 2$, k -соседние с наборами $(\tilde{0}^{3k+2})$ и $(\tilde{1}^{3k+2})$ соответственно. При этом выполнено хотя бы одно из соотношений $\tilde{\pi}_0 \neq (\tilde{0}^{3k+2})$, $\tilde{\pi}_1 \neq (\tilde{1}^{3k+2})$, поскольку множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ является k -проверяющим тестом для каждой из k -неизбыточных схем S_1, \dots, S_{3k+2} (значение на выходе любой из этих схем, содержащей хотя бы один неисправный элемент, изменится хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$). Следовательно, значение на выходе элемента E , т. е. на выходе схемы S , изменится хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$ в силу условий (v), (vi). Таким образом, на выходе схемы S возникнет функция неисправности, отличающаяся от функции f по крайней мере на одном из этих двух наборов и совпадающая с функцией f на всех наборах длины n , отличных от указанных двух.

Тем самым показано, что все возможные функции неисправности схемы S принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Каждую из них можно отличить от любой другой и от функции f хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$, поэтому схема S является k -неизбыточной и допускает k -диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход её выходного элемента исправен. ■

Лемма 12. Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, для которой существуют такие два противоположных двоичных набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n , что $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, можно реализовать схемой в базисе $B_6(k)$, k -неизбыточной и допускающей k -диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$, а в случае $k = 1$ — множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$.

Доказательство. Пусть $f' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$, $f'' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1$. Тогда справедливы соотношения

$$f'(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_0) = 1 \oplus 1 = 0, \quad (4)$$

$$f'(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_1) = 1 \oplus 0 = 1, \quad (5)$$

$$f''(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_0) \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \quad (6)$$

$$f''(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_1) \oplus 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \quad (7)$$

из которых следует, что функции $f'(\tilde{x}^n)$ и $f''(\tilde{x}^n)$ не являются палиндромными.

Построим схему S в базисе $B_6(k)$, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ (рис. 2). Схема S состоит из $4k + 2$ подсхем S_1, \dots, S_{4k+2} и выходного η -элемента E , входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы $S_1, \dots, (4k + 2)$ -й вход — с выходом подсхемы S_{4k+2}). Каждая из подсхем S_1, \dots, S_{2k+1} реализует функцию $f'(\tilde{x}^n)$, а каждая из подсхем $S_{2k+2}, \dots, S_{4k+2}$ — функцию $f''(\tilde{x}^n)$, причём каждая из подсхем S_1, \dots, S_{4k+2} является k -неизбыточной схемой, состоящей только из φ -элементов и инверторов и допускающей k -проверяющий тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправ-

ностей на входах и выходах элементов; существование таких схем следует из леммы 4, из того, что функции f' и f'' не являются палиндромными, и из соотношений (4)–(7).

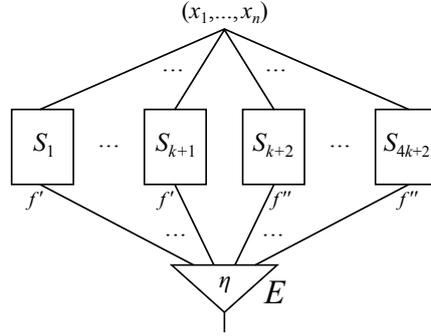


Рис. 2. Схема S

Докажем, что построенная схема S в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Всюду ниже в доказательстве леммы предполагаем, что α — произвольное число из множества $\{0, 1\}$. На любом двоичном наборе $\tilde{\tau}_\alpha$ длины n , на котором функция f принимает значение α , отличным от наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, на выходе каждой из подсхем S_1, \dots, S_{2k+1} возникнет значение

$$f'(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha \oplus 0 = \alpha,$$

а на выходе каждой из подсхем $S_{2k+2}, \dots, S_{4k+2}$ — значение

$$f''(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 0 \oplus 1 = \bar{\alpha}.$$

Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $\tilde{\nu}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S , возникнет значение $\eta(\tilde{\nu}_\alpha) = \alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (x). Далее, на наборе $\tilde{\sigma}_\alpha$ на выходе каждой из подсхем S_1, \dots, S_{4k+2} возникнет значение α в силу (4), (6) при $\alpha = 0$ и (5), (7) при $\alpha = 1$. Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S , возникнет значение $\eta(\tilde{\alpha}^{4k+2}) = 1 = f(\tilde{\sigma}_\alpha)$ в силу условия (viii). Таким образом, на выходе схемы S реализуется в точности функция $f(\tilde{x}^n)$.

Найдём все возможные функции неисправности схемы S относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента E схемы исправен. Неисправность на i -м входе элемента E равносильна неисправности такого же типа на выходе выходного элемента подсхемы S_i , где i — произвольный индекс от 1 до $4k + 2$. Поэтому можно считать, что неисправными в схеме S могут быть только входы/выходы элементов из её подсхем S_1, \dots, S_{4k+2} . При произвольной неисправности не менее одного и не более k входов/выходов таких элементов на любом входном наборе схемы S могут измениться значения не более чем на k входах элемента E . Поэтому на любом наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, на котором функция f принимает значение α , отличным от наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, на входы элемента E поступит набор, k -соседний с набором $\tilde{\nu}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S , возникнет значение $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (x).

На наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ на входы элемента E поступят наборы $\tilde{\pi}_0$ и $\tilde{\pi}_1$ длины $4k+2$, k -соседние с наборами $(\tilde{0}^{4k+2})$ и $(\tilde{1}^{4k+2})$ соответственно. При этом выполнено хотя бы одно из соотношений $\tilde{\pi}_0 \neq (\tilde{0}^{4k+2})$, $\tilde{\pi}_1 \neq (\tilde{1}^{4k+2})$, поскольку множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ является k -проверяющим тестом для каждой из k -неизбыточных схем S_1, \dots, S_{4k+2} . Следовательно, значение на выходе элемента E , т. е. на выходе схемы S , изменится хотя бы на

одном из наборов $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$ в силу условий (viii), (ix). Таким образом, на выходе схемы S возникнет функция неисправности, отличающаяся от функции f по крайней мере на одном из этих двух наборов и совпадающая с функцией f на всех наборах длины n , отличных от указанных двух.

Тем самым показано, что все возможные функции неисправности схемы S принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Каждую из них можно отличить от любой другой и от функции f хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$, поэтому схема S является k -неизбыточной и допускает k -диагностический тест $T = \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход её выходного элемента исправен.

Пусть $k = 1$. Если при отсутствии неисправностей в схеме S на некотором входе/выходе некоторого элемента этой схемы, кроме выхода элемента E , на двух наборах из множества T возникает одно и то же значение β , то неисправность типа β указанного входа/выхода нельзя обнаружить на наборах из данного множества, однако это противоречит последнему предложению предыдущего абзаца. Поэтому на любом входе/выходе любого элемента схемы S , за исключением выхода элемента E , на двух наборах из множества T возникают различные значения. Тогда неисправность типа γ , $\gamma \in \{0, 1\}$, любого входа/выхода любого элемента этой схемы, кроме выхода элемента E , обнаруживается только на том наборе $\tilde{\sigma}'$ из множества T , на котором значение на указанном входе/выходе в отсутствие неисправностей равно $\bar{\gamma}$, и не обнаруживается на другом наборе $\tilde{\sigma}''$ из данного множества. Значит, при рассматриваемой неисправности на наборе $\tilde{\sigma}'$ схема S выдаст значение $\bar{f}(\tilde{\sigma}')$, а на наборе $\tilde{\sigma}''$ — «правильное» значение $f(\tilde{\sigma}'')$.

Приведённые рассуждения показывают, что любая функция неисправности схемы S отличается от функции $f(\tilde{x}^n)$ ровно на одном наборе из множества T и совпадает с ней на всех остальных наборах, т. е. принадлежит множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. ■

Теорема 3. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство

$$D_{k-D(1)}^{B_6(k)}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция или } f \equiv 0, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Вместо $D_{k-D(1)}^{B_6(k)}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Равенство $D(f) = 0$ в случаях, когда f — тождественная функция и $f \equiv 0$, следует из лемм 7 и 8 соответственно. Если же функция f не тождественна и отлична от константы 0, то неравенство $D(f) \geq 2$ вытекает из леммы 9, а $D(f) \leq 2$ — из лемм 11 и 12. Стоит отметить, что если f — не палиндромная функция, то существуют такие два противоположных набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n , для которых $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, а в случае, когда f — палиндромная функция и $f \not\equiv 0$, существуют такие два противоположных набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n , что $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. ■

Следствие 3. Для любого $n \geq 0$ справедливо равенство $D_{k-D(1)}^{B_6(k)}(n) = 2$.

Лемма 13. Любую не палиндромную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать схемой в базисе $B_6(k)$, k -неизбыточной и допускающей k -диагностический тест длины не более 4 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

Доказательство. Существуют такие противоположные наборы $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n , что $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. По лемме 11 функцию f можно реализовать схемой S

в базисе $B_6(k)$, k -неизбыточной и допускающей k -диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Если указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы S возникнет функция неисправности, тождественно равная нулю (соответственно единице) и тем самым отличная от функции f , поскольку константы 0 и 1 являются палиндромными функциями. Таким образом, данная схема k -неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Составим таблицу значений функции f и всех возможных функций неисправности схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Наборы	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	0	1	0	1	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$ от константы 1, если $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \neq 1$, а также функцию $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$ от константы 0, если $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \neq 0$. В случае $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \neq 1$ добавим в множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ произвольный набор длины n , на котором функция $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$ принимает значение 0, а в случае $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \neq 0$ — произвольный набор длины n , на котором функция $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$ принимает значение 1. Итоговое множество будет являться k -диагностическим тестом длины не более 4 для схемы S относительно неисправностей на входах и выходах элементов. ■

Лемма 14. Пусть x_{i_1}, \dots, x_{i_s} , где $s \geq 2$, — все существенные переменные булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, а двоичные наборы $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3$ длины n и элементы $\alpha, \gamma \in \{0, 1\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$, таковы, что i_j -я (слева) компонента каждого из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ равна γ , $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$, а $f(\tilde{\pi}_3) = \bar{\alpha}$. Пусть схема S в базисе $B_6(k)$ является k -неизбыточной, реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ и множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$ является для неё k -диагностическим тестом относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Тогда на любом наборе длины n , i_j -я компонента которого равна γ , функция f принимает значение α .

Доказательство. Переменная x_{i_j} обязана подаваться хотя бы на один вход v хотя бы одного элемента схемы S , поскольку $x_{i_j} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$. Тогда неисправность типа γ этого входа нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$, значит, она должна обнаруживаться на наборе $\tilde{\pi}_3$. Отсюда вытекает, что для получающейся функции неисправности g схемы S справедливы равенства $g(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_1) = \alpha$, $g(\tilde{\pi}_2) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$ и $g(\tilde{\pi}_3) = \bar{f}(\tilde{\pi}_3) = \alpha$, т. е. функцию g нельзя отличить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3$ от константы α , возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа α на выходе её выходного элемента. С учётом того, что множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$ является k -диагностическим тестом для схемы S , это может быть только в том случае, когда $g \equiv \alpha$.

При подаче на входы схемы S произвольного двоичного набора длины n , i_j -я компонента которого равна γ , на вход v поступает значение γ , поэтому функция g , возникающая на выходе схемы при неисправности типа γ этого входа, на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция f . С учётом тождества $g \equiv \alpha$ получаем, что на любом наборе длины n , i_j -я компонента которого равна γ , функция f принимает значение α . ■

В следующей теореме рассмотрен случай неисправностей на входах и выходах элементов при $k = 1$, т. е. когда неисправным может быть только один вход/выход только одного элемента.

Теорема 4. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 1, справедливо равенство

$$D_{\text{ЕД(ИО)}}^{B_6(1)}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция,} \\ 1, & \text{если } f \equiv 0, \\ 2, & \text{если } f \equiv \bar{x}_i \text{ для некоторого } i \in \{1, \dots, n\}, \\ 3, & \text{если } f \text{ — несамодвойственная функция и } f \not\equiv 0, \\ 4, & \text{если } f \text{ — самодвойственная функция} \\ & \text{и } f \notin \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}. \end{cases}$$

Если $f \equiv 1$, то значение $D_{\text{ЕД(ИО)}}^{B_6(1)}(f)$ не определено.

Доказательство. Вместо $D_{\text{ЕД(ИО)}}^{B_6(1)}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. В случае $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу леммы 10. Равенства $D(f) = 0$, если функция f тождественная, и $D(f) = 1$, если $f \equiv 0$, следуют из лемм 7 и 8 соответственно. Пусть $f \equiv \bar{x}_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда функцию f можно реализовать схемой в базисе $B_6(1)$, состоящей из одного инвертора, на вход которого подаётся переменная x_i . Очевидно, что у данной схемы есть только две функции неисправности — константы 0 и 1, которые можно отличить друг от друга и от функции f на множестве, состоящем из любых двух двоичных наборов длины n , i -я (слева) компонента одного из которых равна единице, а другого — нулю. Отсюда следует неравенство $D(f) \leq 2$. С другой стороны, $D(f) \geq 2$ в силу леммы 9, поэтому $D(f) = 2$.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, не принадлежащая множеству $\{0, 1, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. Докажем неравенство $D(f) \geq 3$. Предположим, что это не так, т. е. $D(f) \leq 2$. В силу леммы 9 имеем $D(f) \geq 2$, поэтому $D(f) = 2$. Значит, существует избыточная схема S в базисе $B_6(1)$, реализующая функцию f и допускающая единичный диагностический тест из каких-то двух наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ длины n . Заметим, что

$$f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2), \quad (8)$$

поскольку в противном случае неисправность типа $f(\tilde{\pi}_1)$ на выходе выходного элемента схемы S нельзя было бы обнаружить ни на одном из этих двух наборов. Пусть x_i — произвольная существенная переменная функции f . Переменная x_i обязана подаваться хотя бы на один вход v хотя бы одного элемента схемы S . Если i -е (слева) компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают и равны β , то неисправность типа β данного входа нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$; противоречие. Значит, i -е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ равны соответственно γ и $\bar{\gamma}$ для некоторого $\gamma \in \{0, 1\}$. Тогда неисправность типа γ входа v обнаруживается на наборе $\tilde{\pi}_2$ и не обнаруживается на наборе $\tilde{\pi}_1$, т. е. при рассматриваемой неисправности на наборе $\tilde{\pi}_1$ схема S выдаст значение $f(\tilde{\pi}_1)$, а на наборе $\tilde{\pi}_2$ — значение $\bar{f}(\tilde{\pi}_2)$, которое равно $f(\tilde{\pi}_1)$ в силу (8). Таким образом, полученную функцию неисправности g_1 схемы S нельзя отличить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ от константы $f(\tilde{\pi}_1)$, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа $f(\tilde{\pi}_1)$ на выходе её выходного элемента. С учётом того, что $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ — единичный диагностический тест для схемы S , это может быть только в том случае, когда

$g_1 \equiv f(\tilde{\pi}_1)$. Аналогично при неисправности типа $\bar{\gamma}$ входа v на выходе схемы S возникнет функция неисправности g_2 , принимающая на наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ значения $\bar{f}(\tilde{\pi}_1)$ и $f(\tilde{\pi}_2) = \bar{f}(\tilde{\pi}_1)$ соответственно. Её нельзя отличить ни на одном из этих наборов от константы $\bar{f}(\tilde{\pi}_1)$, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа $\bar{f}(\tilde{\pi}_1)$ на выходе её выходного элемента, поэтому $g_2 \equiv \bar{f}(\tilde{\pi}_1)$.

Далее заметим, что при подаче на входы схемы S произвольного двоичного набора длины n , i -я компонента которого равна γ , на вход v поступает значение γ , поэтому функция g_1 , возникающая на выходе схемы при неисправности типа γ этого входа, на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция f . С учётом тождества $g_1 \equiv f(\tilde{\pi}_1)$ получаем, что на любом наборе длины n , i -я компонента которого равна γ , функция f принимает значение $f(\tilde{\pi}_1)$. Аналогично на любом наборе длины n , i -я компонента которого равна $\bar{\gamma}$, функция g_2 принимает такое же значение, как и функция f . С учётом тождества $g_2 \equiv \bar{f}(\tilde{\pi}_1)$ получаем, что на любом таком наборе функция f принимает значение $\bar{f}(\tilde{\pi}_1)$. Но тогда легко проверить, что на любом наборе длины n функция f принимает такое же значение, как и функция $x_i \oplus \gamma \oplus f(\tilde{\pi}_1)$, т. е. $f \equiv x_i \oplus \gamma \oplus f(\tilde{\pi}_1)$. Это означает, что либо $f \equiv x_i$, либо $f \equiv \bar{x}_i$, но в таком случае $f \in \{0, 1, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$; противоречие. Неравенство $D(f) \geq 3$ доказано.

Пусть f — несамодвойственная функция и $f \not\equiv 0, 1$. Докажем, что $D(f) \leq 3$; тогда с учётом неравенства $D(f) \geq 3$ будет установлено равенство $D(f) = 3$. Функция f принимает одно и то же значение на каких-то двух противоположных наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n . Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Тогда по лемме 12 (при $k = 1$) функцию f можно реализовать схемой S' в базисе $B_6(1)$, избыточной и допускающей единичный диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. В случае, если указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы S' возникнет функция неисправности, тождественно равная нулю (соответственно единице). Таким образом, данная схема избыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Составим таблицу значений функции f и всех возможных функций неисправности схемы S' на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ (табл. 2).

Таблица 2

Наборы	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	1	0	1	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию f от константы 1. Добавим к этим наборам ещё один произвольный набор длины n , на котором функция f принимает значение 0. Полученное множество будет являться единичным диагностическим тестом длины 3 для схемы S' , откуда следует $D(f) \leq 3$. Случай 1 разобран.

2. Пусть $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 0$. Функция \bar{f} принимает значение 1 на каких-то противоположных наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, поэтому по лемме 12 (при $k = 1$) её можно реализовать схемой \hat{S}' в базисе $B_6(1)$, избыточной и допускающей единичный диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента E схемы исправен, причём все функции неисправности схемы \hat{S}' принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Соединим выход этой схемы со

выходом инвертора I , выход которого объявим выходом полученной схемы; обозначим её через S' . Тогда при неисправности любого входа/выхода любого элемента подсхемы \hat{S}' , кроме выхода элемента E , на выходе схемы S' возникнет одна из функций неисправности

$$\begin{aligned}\overline{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}} &= f \oplus 1 \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus 1 = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, \\ \overline{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}} &= f \oplus 1 \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1 = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1},\end{aligned}$$

а при произвольной неисправности входа или выхода элемента I либо выхода выходного элемента подсхемы \hat{S}' — одна из булевых констант 0 или 1. Таким образом, схема S' неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Составим таблицу значений функции f и всех возможных функций неисправности данной схемы на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ (табл. 3).

Таблица 3

Наборы	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	0	1	0	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	0	0	1	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию f от константы 0. Добавим к этим наборам ещё один произвольный набор длины n , на котором функция f принимает значение 1. Полученное множество будет являться единичным диагностическим тестом длины 3 для схемы S' , откуда следует $D(f) \leq 3$. Случай 2 разобран. Равенство $D(f) = 3$ доказано.

Пусть теперь $f(\tilde{x}^n)$ — самодвойственная функция и $f \notin \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. Неравенство $D(f) \leq 4$ следует из леммы 13 (при $k = 1$) и того, что функция f , очевидно, не является палиндромной. Докажем неравенство $D(f) \geq 4$. Предположим, что это не так, т. е. $D(f) \leq 3$. Выше установлено, что $D(f) \geq 3$, поэтому $D(f) = 3$. Значит, существует неизбыточная схема S'' в базисе $B_6(1)$, реализующая функцию f и допускающая единичный диагностический тест из каких-то трёх наборов длины n . Данная функция не может принимать одинаковое значение β на всех этих наборах, поскольку в противном случае её нельзя было бы отличить на них от константы β , возникающей при неисправности типа β на выходе выходного элемента схемы S'' . Поэтому на каких-то двух наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ из теста функция f принимает значение α , а на третьем наборе $\tilde{\pi}_3$ из теста — значение $\bar{\alpha}$, где $\alpha \in \{0, 1\}$.

Пусть x_{i_1}, \dots, x_{i_s} — все существенные переменные функции f . Предположим, что наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в каждой из i_1 -й, \dots , i_s -й (слева) компонент. Пусть $\tilde{\pi}'_1$ — набор, противоположный набору $\tilde{\pi}_1$. Тогда $f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}'_1)$ в силу самодвойственности функции f . Наборы $\tilde{\pi}'_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают в i_1 -й, \dots , i_s -й компонентах, а функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит только от переменных x_{i_1}, \dots, x_{i_s} , поэтому $f(\tilde{\pi}'_1) = f(\tilde{\pi}_2)$. Таким образом, $f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2)$, однако это противоречит тому, что $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$. Следовательно, наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают хотя бы в одной из i_1 -й, \dots , i_s -й компонент; обозначим номер этой компоненты через i_j , а её значение в каждом из указанных наборов — через γ . Тогда выполнены все условия леммы 14 (при $S = S''$), из которой следует, что на любом наборе длины n , i_j -я компонента которого равна γ , функция f принимает значение α . В таком случае на любом наборе длины n , i_j -я компонента которого равна $\bar{\gamma}$, данная функция в силу её самодвойственности принимает значение $\bar{\alpha}$. Но тогда легко проверить, что на любом наборе длины n функция f принимает такое

же значение, как и функция $x_i \oplus \gamma \oplus \alpha$, т. е. $f \equiv x_i \oplus \gamma \oplus \alpha$. Это означает, что либо $f \equiv x_i$, либо $f \equiv \bar{x}_i$, поэтому $f \in \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$; противоречие. Неравенство $D(f) \geq 4$ доказано.

В итоге получаем, что $D(f) = 4$. ■

Следствие 4. Для любого $n \geq 3$ справедливо равенство $D_{\text{ЕД}(\text{IO})}^{B_6(1)}(n) = 4$.

Для доказательства следствия 4 достаточно заметить, что функция $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ является самодвойственной.

Теорема 5. Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $D_{k\text{-Д}(\text{IO})}^{B_6(k)}(n) = 4$ при $n \geq 3$, причём в случае $k \geq 2$ доля тех булевых функций f от n переменных, для которых $D_{k\text{-Д}(\text{IO})}^{B_6(k)}(f) = 4$, стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Вместо $D_{k\text{-Д}(\text{IO})}^{B_6(k)}(n)$, $D_{k\text{-Д}(\text{IO})}^{B_6(k)}(f)$ для краткости будем писать соответственно $D(n)$, $D(f)$. Неравенство $D(n) \geq 4$ при $n \geq 3$ вытекает из следствия 4 (любой k -диагностический тест для любой k -неизбыточной схемы является единичным диагностическим тестом для той же схемы, которая при этом избыточна). Докажем неравенство $D(n) \leq 4$. Для этого достаточно доказать неравенство $D(f) \leq 4$ для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, для которой определено значение $D(f)$. При $f \equiv 1$ оно не определено в силу леммы 1; при $f \equiv 0$ указанное неравенство следует из леммы 8, а в случае, когда функция f не палиндромная, — из леммы 13.

Пусть f — палиндромная функция и $f \neq 0, 1$. Тогда существуют такие два противоположных двоичных набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ длины n , что $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. По лемме 12 функцию f можно реализовать k -неизбыточной схемой S в базисе $B_6(k)$, допускающей k -диагностический тест $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Если указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы S возникнет функция неисправности, тождественно равная нулю (соответственно единице). Таким образом, данная схема k -неизбыточна. Составим таблицу значений функции f и всех возможных функций неисправности схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ (табл. 4).

Т а б л и ц а 4

Наборы	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	1	0	1	0	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$ от константы 0, если $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \neq 0$, а также функцию f от константы 1. Добавим в множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ произвольный набор длины n , на котором функция f принимает значение 0, а в случае $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \neq 0$ добавим в полученное множество произвольный набор длины n , на котором функция $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$ принимает значение 1. Итоговое множество будет являться k -диагностическим тестом длины не более 4 для схемы S , откуда следует, что $D(f) \leq 4$. Неравенство $D(n) \leq 4$, а вместе с ним равенство $D(n) = 4$ при $n \geq 3$ доказаны.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $k \geq 2$, $n \geq 2$ и f — произвольная булева функция от n переменных, не принадлежащая множеству $U = \{0, 1, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, для которой $D(f) \leq 3$. Докажем, что $f \in F_n$, где F_n — множество булевых функций от n переменных, каждая из которых при подстановке вместо

каких-то двух её переменных каких-то булевых констант становится равна некоторой булевой константе. Из теоремы 4 следует, что $D(f) \geq 3$, поэтому $D(f) = 3$. Значит, существует избыточная схема S' в базисе $B_6(k)$, реализующая функцию f и допускающая k -диагностический тест из каких-то трёх наборов длины n . Данная функция не может принимать одинаковое значение β на всех этих наборах, поскольку в противном случае её нельзя было бы отличить на них от константы β , возникающей при неисправности типа β на выходе выходного элемента схемы S' . Поэтому на каких-то двух наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ из теста функция f принимает значение α , а на третьем наборе $\tilde{\pi}$ из теста — значение $\bar{\alpha}$, где $\alpha \in \{0, 1\}$.

Пусть x_{i_1}, \dots, x_{i_s} — все существенные переменные функции f . Ясно, что $s \geq 2$. Если i_j -е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают для некоторого $j \in \{1, \dots, s\}$, то выполнены все условия леммы 14 (при $S = S'$, $\tilde{\pi}_3 = \tilde{\pi}$). Из неё следует, что на любом наборе длины n , i_j -я компонента которого равна γ , функция f принимает значение α . Но тогда при подстановке вместо переменной x_{i_j} константы γ , а вместо любой другой переменной из множества x_1, \dots, x_n произвольной булевой константы данная функция становится равна константе α , откуда вытекает, что $f \in F_n$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в каждой из i_1 -й, \dots , i_s -й компонент. Наборы $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\pi}_1$ различаются хотя бы в одной из этих компонент, поскольку $f(\tilde{\pi}) \neq f(\tilde{\pi}_1)$. Пусть они различаются в i_q -й компоненте, $q \in \{1, \dots, s\}$, причём i_q -е компоненты наборов $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\pi}_1$ равны π_q и $\bar{\pi}_q$ соответственно. Тогда i_q -я компонента набора $\tilde{\pi}_2$ равна π_q . Аналогично наборы $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в какой-то i_t -й компоненте, $t \in \{1, \dots, s\}$, и их i_t -е компоненты равны π_t и $\bar{\pi}_t$ соответственно, где $\pi_t \in \{0, 1\}$, а i_t -я компонента набора $\tilde{\pi}_1$ равна π_t . При этом $t \neq q$, так как в противном случае i_q -я компонента набора $\tilde{\pi}_2$ была бы равна одновременно π_q и $\bar{\pi}_q$. Составим для наглядности таблицу значений i_q -й и i_t -й компонент наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ и $\tilde{\pi}$ (табл. 5).

Таблица 5

Наборы	i_q	i_t
$\tilde{\pi}_1$	$\bar{\pi}_q$	π_t
$\tilde{\pi}_2$	π_q	$\bar{\pi}_t$
$\tilde{\pi}$	π_q	π_t

Каждая из переменных x_{i_q}, x_{i_t} обязана подаваться хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы S' , поскольку $x_{i_q}, x_{i_t} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$; обозначим эти входы через v_q и v_t соответственно. Тогда неисправность типа π_q входа v_q нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}$, так как их i_q -е компоненты равны π_q . Значит, данная неисправность должна обнаруживаться на наборе $\tilde{\pi}_1$. Отсюда вытекает, что для получающейся функции неисправности g_q схемы S' справедливы равенства $g_q(\tilde{\pi}_1) = \bar{f}(\tilde{\pi}_1) = \bar{\alpha}$. Если, помимо неисправности типа π_q входа v_q , в схеме S' также имеет место неисправность типа π_t входа v_t , то для получающейся функции неисправности g_{qt} данной схемы справедливы равенства $g_{qt}(\tilde{\pi}_1) = g_q(\tilde{\pi}_1) = \bar{\alpha}$, поскольку на наборе $\tilde{\pi}_1$ на вход v_t в случае исправности этого входа и неисправности типа π_q входа v_q подаётся i_t -я компонента набора $\tilde{\pi}_1$, которая равна π_t и, следовательно, неисправность типа π_t входа v_t никак не отразится на значении, выдаваемом схемой S' на этом наборе.

Далее, неисправность типа π_t входа v_t нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}$, так как их i_t -е компоненты равны π_t . Значит, данная неисправность должна обнаруживаться на наборе $\tilde{\pi}_2$. Отсюда вытекает, что для получающейся функции

неисправности g_t схемы S' справедливы равенства $g_t(\tilde{\pi}_2) = \overline{f}(\tilde{\pi}_2) = \bar{\alpha}$. Если, помимо неисправности типа π_t входа v_t , в схеме S' также имеет место неисправность типа π_q входа v_q , то для получающейся функции неисправности g_{qt} данной схемы справедливы равенства $g_{qt}(\tilde{\pi}_2) = g_t(\tilde{\pi}_2) = \bar{\alpha}$, поскольку на наборе $\tilde{\pi}_2$ на вход v_q в случае исправности этого входа и неисправности типа π_t входа v_t подаётся i_q -я компонента набора $\tilde{\pi}_2$, которая равна π_q и, следовательно, неисправность типа π_q входа v_q никак не отразится на значении, выдаваемом схемой S' на этом наборе.

В случае отсутствия неисправностей в схеме S' на наборе $\tilde{\pi}$ на входы v_q и v_t поступают значения π_q и π_t соответственно, поскольку i_q -я (i_t -я) компонента набора $\tilde{\pi}$ равна π_q (соответственно π_t). Поэтому одновременная неисправность входа v_q типа π_q и входа v_t типа π_t никак не отразится на значении, выдаваемом схемой S' на указанном наборе. Отсюда следуют равенства $g_{qt}(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\pi}) = \bar{\alpha}$.

В итоге получаем, что функция неисправности g_{qt} схемы S' принимает значение $\bar{\alpha}$ на каждом из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ и $\tilde{\pi}$, поэтому её нельзя отличить ни на одном из этих наборов от константы $\bar{\alpha}$, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа $\bar{\alpha}$ на выходе её выходного элемента. С учётом того, что множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}\}$ является k -диагностическим тестом для схемы S' , это может быть только в том случае, когда $g_{qt} \equiv \bar{\alpha}$.

Заметим, что при подаче на входы схемы S' произвольного двоичного набора длины n , i_q -я компонента которого равна π_q , а i_t -я компонента равна π_t , на вход v_q поступает значение π_q , а на вход v_t — значение π_t , поэтому функция g_{qt} , возникающая на выходе схемы при одновременной неисправности входа v_q типа π_q и входа v_t типа π_t , на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция f . С учётом тождества $g_{qt} \equiv \bar{\alpha}$ получаем, что на любом наборе длины n , i_q -я компонента которого равна π_q , а i_t -я компонента равна π_t , функция f принимает значение $\bar{\alpha}$. Следовательно, при подстановке вместо переменной x_{i_q} константы π_q , а вместо переменной x_{i_t} константы π_t данная функция становится равна константе $\bar{\alpha}$, т. е. $f \in F_n$, что и требовалось доказать.

Тем самым установлено, что в случае $n \geq 2$ произвольная булева функция f от n переменных, не принадлежащая множеству U , для которой $D(f) \leq 3$, принадлежит множеству F_n . Среди функций из множества U могут быть функции f от n переменных, для которых $D(f) \leq 3$ (и даже точно есть — см. леммы 7 и 8), но все они принадлежат F_n , поскольку $U \subseteq F_n$ в силу определений этих множеств. Значит, все булевы функции f от n переменных, где $n \geq 2$, для которых $D(f) \leq 3$, принадлежат множеству F_n .

Оценим величину $|F_n|$. Пусть $F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}$ — подмножество множества F_n , состоящее из всех булевых функций, каждая из которых при подстановке вместо переменной x_i константы α , а вместо переменной x_j константы β , где $1 \leq i < j \leq n$, становится равна константе γ . Любая функция из множества $F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}$ принимает значение γ на любом из 2^{n-2} двоичных наборов длины n , i -я (слева) компонента которых равна α и j -я равна β , а на остальных $2^n - 2^{n-2}$ наборах может принимать произвольные значения, поэтому $|F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}| = 2^{2^n - 2^{n-2}}$. Любая функция из множества F_n принадлежит множеству $F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}$ для некоторых i, j, α, β и γ , откуда следуют соотношения

$$F_n \subseteq \bigcup_{\substack{1 \leq i < j \leq n, \\ \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}}} F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma},$$

$$|F_n| \leq \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n, \\ \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}}} |F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}| = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n, \\ \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}}} 2^{2^n - 2^{n-2}} = C_n^2 \cdot 2^3 \cdot 2^{2^n - 2^{n-2}} = 4n(n-1)2^{2^n - 2^{n-2}},$$

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} \leq \frac{4n(n-1)2^{2^n - 2^{n-2}}}{2^{2^n}} = \frac{4n(n-1)}{2^{2^{n-2}}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

т.е. отношение числа булевых функций из множества F_n к общему числу булевых функций от n переменных стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. В силу доказанного выше это означает, что доля тех булевых функций f от n переменных, для которых $D(f) \leq 3$, стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, доля тех булевых функций f от n переменных, для которых $D(f) \geq 4$, стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Осталось заметить, что при $f \neq 1$ из неравенства $D(f) \geq 4$ вытекает равенство $D(f) = 4$ в силу доказанного соотношения $D(f) \leq 4$ для любой булевой функции f от n переменных, кроме константы 1, а $1 \in F_n$. ■

Замечание 3. Среди всех схем, построенных при доказательстве верхних оценок величин $D_{k\text{-Д}(1)}^{B_6(k)}(f)$, $D_{k\text{-Д}(10)}^{B_6(k)}(f)$ и $D_{k\text{-Д}(10)}^{B_6(k)}(n)$ в теоремах 3, 4 и 5 соответственно, элемент «константа 0» использовался только в построении схем, реализующих тождественный нуль, ξ -элемент — только в построении схем, реализующих не палиндромные функции (теоремы 3 и 5) либо самодвойственные функции (теорема 4), причём не более чем в единственном числе, а η -элемент — только в построении схем, реализующих палиндромные функции (теоремы 3 и 5) либо несамодвойственные функции (теорема 4), причём не более чем в единственном числе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. 1958. Т. 51. С. 270–360.
2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всес. семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 7–12.
3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992. 192 с.
5. Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2013. 77 с.
6. Reddy S. M. Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. V. C-21. No. 11. P. 1183–1188.
7. Sahuja K. K. and Reddy S. M. Fault detecting test sets for Reed-Muller canonic networks // IEEE Trans. Comput. 1975. V. C-24. No. 10. P. 995–998.
8. Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. 2017. Т. 29. Вып. 4. С. 87–105.
9. Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Изв. вузов. Математика. 1988. № 7. С. 57–64.
10. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. 1989. Т. 1. Вып. 3. С. 71–76.
11. Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при константных неисправностях на входах элементов // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1997. № 1. С. 12–18.

12. Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 87. 18 с.
13. Угольников А. Б. Классы Поста: учеб. пособие. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008. 64 с.

REFERENCES

1. *Chegis I. A. and Yablonskiy S. V.* Logicheskie sposoby kontrolya raboty elektricheskikh skhem [Logical methods of control of work of electric circuits]. Trudy Mat. Inst. Steklov, 1958, vol. 51, pp. 270–360. (in Russian)
2. *Yablonskiy S. V.* Nadezhnost' i kontrol' upravlyayushchikh sistem [Reliability and verification of control systems]. Materialy Vsesoyuznogo seminaru po diskretnoy matematike i ee prilozheniyam (Moscow, 31 Jan.–2 Feb. 1984). Moscow, MSU Publ., 1986, pp. 7–12. (in Russian)
3. *Yablonskiy S. V.* Nekotorye voprosy nadezhnosti i kontrolya upravlyayushchikh sistem [Some questions of reliability and verification of control systems]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, iss. 1, Moscow, Nauka Publ., 1988, pp. 5–25. (in Russian)
4. *Red'kin N. P.* Nadezhnost' i diagnostika skhem [Circuits Reliability and Diagnostics]. Moscow, MSU Publ., 1992. 192 p. (in Russian)
5. *Kolyada S. S.* Verkhnie otsenki dlin proveryayushchikh testov dlya skhem iz funktsional'nykh elementov [Upper bounds on the lengths of fault detection tests for logic networks]. Cand. Sci. Dissertation, MSU, Moscow, 2013. 77 p. (in Russian)
6. *Reddy S. M.* Easily testable realizations for logic functions. IEEE Trans. Comput., 1972, vol. C-21, no. 11, pp. 1183–1188.
7. *Saluja K. K. and Reddy S. M.* Fault detecting test sets for Reed-Muller canonic networks. IEEE Trans. Comput., 1975. vol. C-24, no. 10, pp. 995–998.
8. *Romanov D. S. and Romanova E. Yu.* Metod sinteza neizbytochnykh skhem, dopuskayushchikh edinichnye proveryayushchie testy konstantnoy dliny [Method of synthesis of irredundant circuits allowing single fault detection tests of constant length]. Diskretnaya Matematika, 2017, vol. 29, iss. 4, pp. 87–105. (in Russian)
9. *Red'kin N. P.* O proveryayushchikh testakh dlya skhem pri odnotipnykh konstantnykh neispravnostyakh na vkhodakh elementov [On fault detection tests for logic networks under one-type stuck-at faults at inputs of gates]. Izvestiya Vuzov, Matematika, 1988, no. 7, pp. 57–64. (in Russian)
10. *Red'kin N. P.* O skhemah, dopuskayushchikh korotkie edinichnye diagnosticheskie testy [On circuits allowing short single diagnostic tests]. Diskretnaya Matematika, 1989, vol. 1, iss. 3, pp. 71–76. (in Russian)
11. *Red'kin N. P.* O proveryayushchikh testakh dlya skhem pri konstantnykh neispravnostyakh na vkhodakh elementov [On fault detection tests for logic networks under stuck-at faults at inputs of gates]. Vestnik MSU, Ser. 1, 1997, no. 1, pp. 12–18. (in Russian)
12. *Popkov K. A.* Sintez legkotestiruemykh skhem pri odnotipnykh konstantnykh neispravnostyakh na vkhodakh i vykhodakh elementov [Synthesis of Easily Testable Logic Networks under One-Type Stuck-at Faults at Inputs and Outputs of Gates]. Preprinty IPM im. M. V. Keldysha, 2018, no. 87. 18 p. (in Russian)
13. *Ugol'nikov A. B.* Klassy Posta: uchebnoe posobie [Post Classes: Tutorial]. Moscow, MSU, TsPI Publ., 2008. 64 p. (in Russian)