

УДК 519.718.7

**СИНТЕЗ ЛЕГКОТЕСТИРУЕМЫХ СХЕМ  
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ  
НА ВХОДАХ И ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ<sup>1</sup>**

К. А. Попков

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия*

Доказаны следующие утверждения: для любого натурального  $k$  существует базис из булевых функций от не более чем  $2k + 2$  переменных (от не более чем  $4k + 2$  переменных), в котором любую булеву функцию, кроме константы 1, можно реализовать схемой из функциональных элементов, избыточной и допускающей проверяющий тест длины не более 3 (соответственно, диагностический тест длины не более 4) относительно не более  $k$  произвольных константных неисправностей на входах и выходах элементов. Показано, что при рассмотрении только произвольных константных неисправностей на входах элементов указанные оценки длин тестов можно понизить до 2.

**Ключевые слова:** *схема из функциональных элементов, произвольная константная неисправность, проверяющий тест, диагностический тест.*

DOI 10.17223/20710410/43/6

**SYNTHESIS OF EASILY TESTABLE LOGIC NETWORKS  
UNDER ARBITRARY STUCK-AT FAULTS  
AT INPUTS AND OUTPUTS OF GATES**

K. A. Popkov

*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia*

**E-mail:** kirill-formulist@mail.ru

Two binary vectors are called  $k$ -adjacent if they differ in at most  $k$  components, where  $k \in \mathbb{N}$ . For  $\alpha \in \{0, 1\}$  and  $s \in \mathbb{N}$ , let  $\alpha^s$  be the Boolean vector  $(\alpha, \dots, \alpha)$  with  $s$  coordinates  $\alpha$ . For each natural  $k$ , consider the bases  $B(k) = \{\varphi(x_1, \dots, x_{2k+2}), x_1 \dots x_{k+1} \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{k+1}, \bar{x}, 0\}$  and  $B'(k) = \{\varphi(x_1, \dots, x_{2k+2}), \xi(x_1, \dots, x_{3k+2}), \eta(x_1, \dots, x_{4k+2}), \bar{x}, 0\}$ , where  $\varphi(x_1, \dots, x_{2k+2})$  is an arbitrary non-self-dual Boolean function taking the value  $\alpha$  on the vector  $\alpha^{2k+2}$  and the value  $\bar{\alpha}$  on all other vectors  $k$ -adjacent to this vector;  $\xi(x_1, \dots, x_{3k+2})$  is an arbitrary Boolean function taking the value  $\alpha$  on the vector  $\alpha^{3k+2}$ , the value  $\bar{\alpha}$  on all other vectors  $k$ -adjacent to this vector, and the value  $\alpha$  on all vectors  $k$ -adjacent to the vector  $(\alpha^{k+1}, \bar{\alpha}^{2k+1})$ ;  $\eta(x_1, \dots, x_{4k+2})$  is an arbitrary Boolean function taking the value 1 on the vector  $\alpha^{4k+2}$ , the value 0 on all other vectors  $k$ -adjacent to this vector, and the value  $\alpha$  on all vectors  $k$ -adjacent to the vector  $(\alpha_{2k+1}, \bar{\alpha}^{2k+1})$ . Let  $D_k(I)(f)$  ( $D_k(IO)(f)$ ),  $D'_k(I)(f)$ ,  $D'_k(IO)(f)$  be the least length of a fault detection test (fault detection test, diagnostic test, diagnostic test, respectively) for irredundant logic networks consisting of logic gates in the basis  $B(k)$  (basis  $B(k)$ , basis  $B'(k)$ , basis  $B'(k)$ , respectively), implementing given Boolean function  $f(x_1, \dots, x_n)$ , and having at most  $k$  arbitrary

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00337.

stuck-at faults on inputs of gates (on inputs and/or outputs of gates, on inputs of gates, on inputs and/or outputs of gates, respectively). Let a Boolean function  $f(x_1, \dots, x_n)$  be called palindromic if it takes the same value on any two opposite binary  $n$ -tuples. The following facts are obtained. The quantity  $D_{k(I)}(f)$  equals 0 iff  $f$  is an identical function (i.e.,  $f \equiv x_i$  for some  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) and equals 2 otherwise. The quantity  $D_{k(IO)}(f)$  equals 0 iff  $f$  is an identical function, equals 1 iff  $f \equiv 0$ , equals 2 iff  $f$  is not an identical or palindromic function, equals 3 iff  $f$  is a palindromic function and  $f \neq 0, 1$ , and is undefined iff  $f \equiv 1$ . The quantity  $D'_{k(I)}(f)$  equals 0 iff  $f$  is an identical function and equals 2 otherwise. The quantity  $D'_{1(IO)}(f)$  equals 0 iff  $f$  is an identical function, equals 1 iff  $f \equiv 0$ , equals 2 iff  $f \equiv \bar{x}_i$  for some  $i \in \{1, \dots, n\}$ , equals 3 iff  $f$  is not a self-dual function and  $f \neq 0, 1$ , equals 4 iff  $f$  is a self-dual function and  $f \notin \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ , and is undefined iff  $f \equiv 1$ . For each  $k \in \mathbb{N}$ , the equality  $D'_{k(IO)}(f) = 4$  holds true under  $n \geq 3$ , and in the case  $k \geq 2$ , the proportion of those Boolean functions  $f$  in  $n$  variables, for which  $D'_{k(IO)}(f) = 4$ , tends to 1 under  $n \rightarrow \infty$ .

**Keywords:** *logic network, arbitrary stuck-at fault, fault detection test, diagnostic test.*

## Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход применим также к тестированию схем из функциональных элементов [2–4]. Пусть имеется схема из функциональных элементов  $S$  с одним выходом, реализующая булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , где  $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$ . Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы  $S$  могут перейти в неисправное состояние. В результате схема  $S$  вместо исходной функции  $f(\tilde{x}^n)$  будет реализовывать некоторую булеву функцию  $g(\tilde{x}^n)$ , вообще говоря, отличную от  $f$ . Все такие функции  $g(\tilde{x}^n)$ , получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы  $S$ , называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2–4]. *Проверяющим тестом* для схемы  $S$  называется такое множество  $T$  наборов значений переменных  $x_1, \dots, x_n$ , что для любой отличной от  $f(\tilde{x}^n)$  функции неисправности  $g(\tilde{x}^n)$  схемы  $S$  в  $T$  найдётся набор  $\tilde{\sigma}$ , на котором  $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$ . *Диагностическим тестом* для схемы  $S$  называется такое множество  $T$  наборов значений переменных  $x_1, \dots, x_n$ , что  $T$  является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности  $g_1(\tilde{x}^n)$  и  $g_2(\tilde{x}^n)$  схемы  $S$  в  $T$  найдётся набор  $\tilde{\sigma}$ , на котором  $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$ . Число наборов в  $T$  называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины  $2^n$  для схемы  $S$  всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины  $n$ . Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* [4, с. 110–111], т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой (такие функции неисправности называют *нетривиальными*).

Назовём проверяющий (диагностический) тест *k-проверяющим* (*k-диагностическим*), если в схеме могут быть неисправны не более  $k$  элементов, где  $k \in \mathbb{N}$ . Будем рассматривать такие тесты только для *k-неизбыточных схем* [5, с. 68], в которых любая

допустимая неисправность не менее одного и не более  $k$  элементов приводит к нетривиальной функции неисправности. Очевидно, что понятия 1-проверяющего теста, 1-диагностического теста и 1-неизбыточной схемы совпадают с понятиями единичного проверяющего теста, единичного диагностического теста и избыточной схемы соответственно.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов,  $B$  — произвольный функционально полный базис и  $T$  — единичный проверяющий тест для некоторой схемы из функциональных элементов  $S$  в базисе  $B$ . Введём следующие обозначения: пусть  $D_{\text{ЕП}}^B(T)$  — длина теста  $T$ ;  $D_{\text{ЕП}}^B(S) = \min D_{\text{ЕП}}^B(T)$ , где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам  $T$  для схемы  $S$ ;  $D_{\text{ЕП}}^B(f) = \min D_{\text{ЕП}}^B(S)$ , где минимум берётся по всем избыточным схемам  $S$  в базисе  $B$ , реализующим функцию  $f$ ;  $D_{\text{ЕП}}^B(n) = \max D_{\text{ЕП}}^B(f)$ , где максимум берётся по всем булевым функциям  $f$  от  $n$  переменных, для которых определено значение  $D_{\text{ЕП}}^B(f)$ . Функция  $D_{\text{ЕП}}^B(n)$  называется *функцией Шеннона* длины единичного проверяющего теста. По аналогии с функциями  $D_{\text{ЕП}}^B$  можно ввести функции  $D_{\text{ПП}}^B$ ,  $D_{k\text{-П}}^B$ ,  $D_{\text{ЕД}}^B$ ,  $D_{\text{ПД}}^B$  и  $D_{k\text{-Д}}^B$  для соответственно полного проверяющего,  $k$ -проверяющего, единичного, полного диагностического и  $k$ -диагностического тестов, зависящие от  $T$ ,  $S$ ,  $f$  и  $n$  (в определениях функций  $D_{\text{ПП}}^B(f)$  и  $D_{\text{ПД}}^B(f)$  не предполагается избыточность схем, а в определениях функций  $D_{k\text{-П}}^B(f)$  и  $D_{k\text{-Д}}^B(f)$  предполагается  $k$ -неизбыточность схем). Так, например,  $D_{k\text{-Д}}^B(n)$  — функция Шеннона длины  $k$ -диагностического теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на входах и выходах элементов, а также только на входах элементов, при которых значение на неисправном входе (выходе) любого элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на входах и выходах элементов называются однотипными константными типа  $p$ , если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна  $p$ , и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой  $D$  после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «0, 1» или « $p$ » в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности или однотипные константные неисправности типа  $p$ ,  $p \in \{0, 1\}$ , на входах/выходах элементов, а под буквой  $D$  после символов, обозначающих вид функции, — символы «(IO)» или «(I)» в случаях, когда в схемах допускаются неисправности соответственно на входах и выходах элементов или только на входах элементов. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа  $\alpha$ , то у элемента, её реализующего, нет входов и не может быть неисправности типа  $\alpha$  на его выходе.

В [4, с. 116] для базиса Жегалкина  $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$  показано, что  $D_{\text{ЕП}}^{B_1; 0,1}(\text{IO})(n) \leq n + 3$ ; при этом используется метод построения схем из работы [6]. К. К. Салуджа и С. М. Редди в [7] получили оценку  $D_{k\text{-П}}^{*B_1; 0,1}(\text{IO})(n) \leq 4 + \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 2k \rceil} C_i^n$ ; наличие звёздочки над буквой  $D$  обусловлено тем, что в указанной работе рассматривались схемы, содержащие, помимо входных переменных  $x_1, \dots, x_n$ , дополнительную входную переменную  $h_0$ , вместо которой при реализации функций подавалась булева константа, но которая принимала значения как 0, так и 1 на наборах из теста. Д. С. Романовым и Е. Ю. Романовой в [8] для базисов  $B'_1 = \{\&, \oplus, 1\}$ ,  $B''_1 = \{\&, \oplus, \sim\}$  установлены

неравенства  $D_{\text{ЕП(Ю)}}^{B'_1;0,1}(n) \leq 16$  и  $D_{\text{ЕП(Ю)}}^{B''_1;0,1}(n) \leq 16$ ; в частности, при  $n \geq 14$  улучшен упомянутый результат из [4] (любая схема в базисе  $B'_1$  является также схемой в базисе  $B_1$ ). Н. П. Редькин в [9–11] для базиса  $B_2 = \{\&, \vee, \neg\}$  получил оценки  $D_{\text{ПП(Ю)}}^{B_2;p}(n) \lesssim 4 \left( 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \right)$ ,  $D_{\text{ЕД(Ю)}}^{B_2;p}(n) \lesssim 4 \left( 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \right)$  и  $D_{\text{ПП(Ю)}}^{B_2;0,1}(n) \lesssim \frac{2^n}{\sqrt{\log_2 n}}$  соответственно, где  $p = 0$  или  $1$ . В работе [12] для любого натурального  $k$  и для любой булевой константы  $p$  доказано существование базиса  $B_3(k, p)$ , состоящего из булевой функции от  $\max(k+1, 3)$  переменных и функции  $\bar{x}$ , для которого, в частности,  $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_3(k,p);p}(n) = 2$  при  $n \geq 1$  и  $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_3(k,p);p}(n) = 1$  при  $n \geq 0$ , а также существование базиса  $B_4(k, p)$ , состоящего из булевой функции от не более чем  $2,5k+2$  переменных и отрицания этой функции, для которого, в частности,  $D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_4(k,p);p}(n) = 2$  и  $D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_4(k,p);p}(n) = 1$  при  $n \geq 0$  (следствия 1–4 и двойственные им результаты).

В данной работе рассматриваются  $k$ -проверяющие и  $k$ -диагностические тесты при  $k \in \mathbb{N}$ , а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на входах и выходах элементов, а также только на входах элементов. Определены базисы  $B_5(k)$  и  $B_6(k)$ , состоящие из булевых функций от не более чем  $2k+2$  и  $4k+2$  переменных соответственно, для которых доказаны равенства  $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_5(k);0,1}(n) = D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_6(k);0,1}(n) = 2$  при  $n \geq 0$ ,  $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_5(k);0,1}(n) = 3$  при  $n \geq 2$  и  $D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_6(k);0,1}(n) = 4$  при  $n \geq 3$  (следствия 1–4 и теорема 5).

В дальнейшем для краткости верхние индексы  $0, 1$  у величин вида  $D_{\dots}^{B_5(k);0,1}$  и  $D_{\dots}^{B_6(k);0,1}$ , зависящих от  $f$  или  $n$ , будем опускать.

Введём обозначения  $\tilde{0}^r = \underbrace{0, \dots, 0}_r$ ,  $\tilde{1}^r = \underbrace{1, \dots, 1}_r$ , где  $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Два двоичных набора называются *противоположными*, если они различаются во всех компонентах. Будем называть два двоичных набора  $k$ -соседними, если они различаются не более чем в  $k$  компонентах.

## 1. Проверяющие тесты

Рассмотрим базис  $B_5(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \psi(\tilde{x}^{k+1}), \bar{x}, 0\}$ , где  $\psi(\tilde{x}^{k+1}) = x_1 \dots x_{k+1} \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{k+1}$ , а  $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$  — произвольная несамодвойственная булева функция (определение самодвойственной булевой функции можно найти, например, в [13, с. 16]), для которой выполнены следующие условия:

- (i)  $\varphi(\tilde{\alpha}^{2k+2}) = \alpha$  для  $\alpha = 0, 1$ ;
- (ii)  $\varphi(\tilde{\sigma}) = \bar{\alpha}$ , где  $\alpha = 0, 1$ , а  $\tilde{\sigma}$  — любой двоичный набор длины  $2k+2$ ,  $k$ -соседний с набором  $(\tilde{\alpha}^{2k+2})$ , кроме него самого.

Отметим, что условия (i), (ii) однозначно определяют значения функции  $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$  на всех наборах, кроме наборов ровно с  $k+1$  нулевой и  $k+1$  единичной компонентами. Для выполнения условия несамодвойственности необходимо и достаточно, чтобы на каких-то двух противоположных наборах ровно с  $k+1$  нулевой и  $k+1$  единичной компонентами функция  $\varphi$  принимала одинаковые значения.

Легко видеть, что функция  $\psi$  обладает следующими свойствами:

$$(iii) \quad \psi(x, \underbrace{y, \dots, y}_k) = x \oplus y \oplus 1;$$

$$(iv) \quad \psi(\tilde{\sigma}') = 0, \text{ где } \tilde{\sigma}' \text{ — любой двоичный набор длины } k+1, \text{ отличный от наборов } (\tilde{0}^{k+1}) \text{ и } (\tilde{1}^{k+1}).$$

Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида  $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$  (вида  $\psi(\tilde{x}^{k+1}, \bar{x}, 0)$ ), будем называть  $\varphi$ -элементом (соответственно,  $\psi$ -элементом, инвертором, элементом «константа 0»).

Назовём булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , где  $n \geq 1$ , тождественной, если  $f \equiv x_i$  для некоторого  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Лемма 1.** Любую тождественную булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$  можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой в базе  $B_5(k)$ , допускающей  $k$ -проверяющий тест длины 0 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

**Доказательство.** Функцию  $f$ , очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество является для неё  $k$ -проверяющим тестом. ■

**Лемма 2.** В случае  $f \equiv 0$  справедливы равенства  $D_{k-\Pi(1)}^{B_5(k)}(f) = 0$ ,  $D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f) = 1$ .

**Доказательство.** Функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$ , состоящей из одного элемента «константа 0» (обозначим этот элемент через  $E$ ). Он не имеет входов, поэтому пустое множество является для данной схемы  $k$ -проверяющим тестом относительно неисправностей на входах элементов, откуда следует равенство  $D_{k-\Pi(1)}^{B_5(k)}(f) = 0$ . При рассмотрении неисправностей на входах и выходах элементов единственной возможной неисправностью схемы  $S$  является неисправность типа 1 на выходе элемента  $E$ , при которой схема станет реализовывать константу 1. Указанная неисправность обнаруживается на любом двоичном наборе длины  $n$ , поэтому  $D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f) \leq 1$ . С другой стороны, выход любой схемы в базе  $B_5(k)$ , реализующей константу 0, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности типа 1 выхода этого элемента получающаяся схема станет реализовывать константу 1, которую надо отличить от функции  $f$  хотя бы на одном наборе, откуда следует, что  $D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f) \geq 1$ . ■

**Лемма 3.** Для любой  $k$ -неизбыточной схемы в базе  $B_5(k)$ , реализующей не тождественную и отличную от константы 0 булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , любой  $k$ -проверяющий тест относительно неисправностей на входах элементов содержит хотя бы два набора.

**Доказательство.** Выход любой  $k$ -неизбыточной схемы  $S$ , реализующей функцию  $f$ , не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента  $E$ , отличного от элемента «константа 0» и, как следствие, имеющего хотя бы один вход. Тогда при неисправности типа  $\alpha$ ,  $\alpha \in \{0, 1\}$ , любого фиксированного входа этого элемента получающаяся схема будет реализовывать нетривиальную функцию неисправности, которая может отличаться от функции  $f(\tilde{x}^n)$  только на тех наборах, на которых в случае отсутствия неисправностей в схеме  $S$  на указанном входе элемента  $E$  возникает значение  $\bar{\alpha}$ . Данные два множества наборов при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  не пересекаются, а в любой  $k$ -проверяющий тест для схемы  $S$  относительно неисправностей на входах элементов должно входить хотя бы по одному набору из каждого из этих множеств. ■

Назовём булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$  палиндромной, если на любой паре противоположных наборов длины  $n$  она принимает одинаковые значения.

Будем говорить, что функциональный элемент  $E'$  расположен в схеме  $S$  ниже функционального элемента  $E$ , если в этой схеме существует ориентированный путь от  $E$  к  $E'$ .

Введём обозначение  $\alpha^\beta = \alpha \oplus \beta \oplus 1$ , где  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ . Очевидно, что  $\alpha^1 = \alpha$ ,  $\alpha^0 = \bar{\alpha}$ ,  $1^\beta = \beta$  и  $0^\beta = \bar{\beta}$ .

**Лемма 4.** Любую не палиндромную булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$  можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой в базисе  $B_5(k)$ , состоящей только из  $\varphi$ -элементов и инверторов и допускающей  $k$ -проверяющий тест  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, где  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  — произвольные два противоположных двоичных набора длины  $n$ , такие, что  $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$  и  $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$ .

**Замечание 1.** Существование таких наборов  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  следует из того, что функция  $f$  не является палиндромной.

**Доказательство леммы 4.** Пусть  $A = [\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}]$  — замыкание множества  $\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}$ , тогда  $A \subseteq T_{01}$  в силу условия (i) (определения замыкания и замкнутого класса  $T_{01}$  можно найти, например, в [13] на с. 14 и 34 соответственно). Докажем, что  $A = T_{01}$ . Как было отмечено выше, функция  $\varphi$  принимает одинаковые значения на каких-то двух противоположных наборах длины  $2k+2$ , содержащих  $k+1$  нулевую и  $k+1$  единичную компоненты. Без ограничения общности это наборы  $(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1})$  и  $(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1})$ . Если  $\varphi(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1}) = \varphi(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1}) = 0$ , то из определения функции  $\varphi$  нетрудно получить, что  $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_{k+1}, \underbrace{y, \dots, y}_{k+1}) = xy$ ,  $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_k, \underbrace{y, \dots, y}_k, xy, xy) = x \vee y$  и

$$\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_k, \underbrace{x \vee y, \dots, x \vee y}_k, x \vee yz, x \vee yz) = x \vee y\bar{z}; \quad (1)$$

если же  $\varphi(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1}) = \varphi(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1}) = 1$ , то из определения функции  $\varphi$  получим, что  $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_{k+1}, \underbrace{y, \dots, y}_{k+1}) = x \vee y$ ,  $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_k, \underbrace{y, \dots, y}_k, x \vee y, x \vee y) = xy$  и выполнено соотношение (1). Таким образом,  $\{x \vee y\bar{z}, xy\} \subseteq A$ , следовательно,  $T_{01} = [\{x \vee y\bar{z}, xy\}] \subseteq A$  (равенство  $T_{01} = [\{x \vee y\bar{z}, xy\}]$  установлено, например, в [13, с. 41]). Отсюда и из соотношения  $A \subseteq T_{01}$  получаем, что  $A = T_{01}$ , т. е. любую булеву функцию  $h(\tilde{x}^n)$  из класса  $T_{01}$  можно выразить формулой  $\phi_h$  над множеством  $\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}$ . Тогда существует схема  $S_h$  в базисе  $B_5(k)$ , моделирующая формулу  $\phi_h$  и состоящая только из входных переменных  $x_1, \dots, x_n$  и  $\varphi$ -элементов, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента.

На наборе  $(\tilde{\alpha}^n)$  на всех  $2k+2$  входах и на выходе каждого элемента схемы  $S_h$  в силу условия (i) возникнет значение  $\alpha$ , где  $\alpha = 0, 1$ . Предположим, что среди всех входов и выходов элементов схемы  $S_h$  есть не менее одного и не более  $k$  неисправных. Из всех элементов схемы, у которых хотя бы один вход и/или выход неисправны, выберем произвольный «нижний» элемент  $E$ , ниже которого в схеме  $S_h$  не существует элемента с указанным свойством (это можно сделать, так как схема  $S$  конечна и не содержит ориентированных циклов). Пусть значение на выходе элемента  $E$ , если он неисправен, либо значение на произвольном неисправном входе элемента  $E$ , если выход этого элемента исправен, равно  $\bar{\delta}$ ,  $\delta \in \{0, 1\}$ .

Докажем, что значение на выходе этого элемента на наборе  $(\tilde{\delta}^n)$  в схеме  $S_h$  равно  $\bar{\delta}$ . Если неисправен выход элемента  $E$ , то утверждение очевидно. Если этот выход исправен, то хотя бы один из входов элемента  $E$  неисправен и значение на нём равно  $\bar{\delta}$ . Тогда на наборе  $(\tilde{\delta}^n)$  значения не менее чем на одном и не более чем на  $k$  входах этого элемента в схеме  $S_h$  отличны от «правильных», т. е. от  $\delta$ , поскольку всего в этой схеме неисправны не более  $k$  входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся. Тогда в силу условия (ii) значение на выходе элемента  $E$  на наборе  $(\tilde{\delta}^n)$  в схеме  $S$  равно  $\bar{\delta}$ , что и требовалось доказать.

Далее изменение значения на выходе элемента  $E$  на наборе  $(\tilde{\delta}^n)$  в схеме  $S_h$  с «правильного» значения  $\delta$  на  $\bar{\delta}$  пройдёт по цепочке до выхода схемы  $S_h$  (здесь снова используются тот факт, что всего в этой схеме неисправны не более  $k$  входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся, и условие (ii)). Таким образом, неисправность схемы  $S_h$  будет обнаружена на наборе  $(\tilde{\delta}^n)$ . Отсюда следует, что данная схема  $k$ -неизбыточна и множество  $\{(\tilde{0}^n, \tilde{1}^n)\}$  является для неё  $k$ -проверяющим тестом.

Пусть  $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  и  $f'(\tilde{x}^n) = f(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$ . Тогда  $\tilde{\sigma}_0 = (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n)$ ,

$$\begin{aligned} f'(\tilde{0}^n) &= f(0^{\sigma_1}, \dots, 0^{\sigma_n}) = f(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n) = f(\tilde{\sigma}_0) = 0, \\ f'(\tilde{1}^n) &= f(1^{\sigma_1}, \dots, 1^{\sigma_n}) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1, \end{aligned}$$

поэтому  $f'(\tilde{x}^n) \in T_{01}$ . Значит, существует  $k$ -неизбыточная схема  $S_{f'}$  в базисе  $B_5(k)$ , реализующая функцию  $f'$  и допускающая  $k$ -проверяющий тест из наборов  $(\tilde{0}^n)$  и  $(\tilde{1}^n)$ . Для каждого  $i \in \{1, \dots, n\}$  в случае  $\sigma_i = 1$  подадим на вход данной схемы, отвечающий переменной  $x_i$ , саму эту переменную, а в случае  $\sigma_i = 0$  соединим каждый вход каждого элемента схемы  $S_{f'}$ , на который подавалась переменная  $x_i$ , с выходом (своего) инвертора, на вход которого подадим переменную  $x_i$ . Полученную схему (с тем же выходным элементом, что и у схемы  $S_{f'}$ ) обозначим через  $S$ ; легко видеть, что на её выходе реализуется функция  $f'(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}) = f(\tilde{x}^n)$ .

Заметим, что неисправность на входе и/или выходе каждого «добавленного» инвертора схемы  $S$  равносильна некоторой неисправности на входе элемента, соединённого с выходом этого инвертора. Поэтому можно считать, что неисправными в схеме  $S$  могут быть только входы/выходы элементов из её подсхемы  $S_{f'}$ . На наборе  $\tilde{\sigma}_1$  на все входы подсхемы  $S_{f'}$  по построению поступят единицы, а на наборе  $\tilde{\sigma}_0$  — нули. Множество  $\{(\tilde{0}^n), (\tilde{1}^n)\}$  позволяет обнаружить любую неисправность не более  $k$  входов/выходов элементов в этой подсхеме. Отсюда следует, что схема  $S$  является  $k$ -неизбыточной и допускает  $k$ -проверяющий тест из наборов  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$ . ■

**Лемма 5.** Любую палиндромную булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , отличную от константы 0, можно реализовать схемой в базисе  $B_5(k)$ ,  $k$ -неизбыточной и допускающей  $k$ -проверяющий тест длины 2 относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе выходного элемента схемы.

**Доказательство.** Существуют такие два противоположных набора длины  $n$ , на каждом из которых функция  $f$  принимает значение 1, поскольку  $f \neq 0$ . Обозначим тот из них, первая компонента которого равна единице, через  $\tilde{\sigma}_1$ , а другой — через  $\tilde{\sigma}_0$ . Пусть  $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  и  $\hat{f}(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1$ . Тогда  $\sigma_1 = 1$ ,  $\tilde{\sigma}_0 = (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n)$ ,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\tilde{\sigma}_0) &= f(\tilde{\sigma}_0) \oplus \bar{\sigma}_1 \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \\ \hat{f}(\tilde{\sigma}_1) &= f(\tilde{\sigma}_1) \oplus \sigma_1 \oplus 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \end{aligned}$$

поэтому  $\hat{f}(\tilde{x}^n)$  — не палиндромная функция. Тогда в силу леммы 4 существует  $k$ -неизбыточная схема  $S'$  в базисе  $B_5(k)$ , реализующая функцию  $\hat{f}$  и допускающая  $k$ -проверяющий тест из наборов  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Соединим выход данной схемы со входом  $\psi$ -элемента  $E$ , отвечающим переменной  $x_1$ , а на все остальные входы этого элемента подадим переменную  $x_1$ . Выход элемента  $E$  объявим выходом полученной схемы, которую обозначим через  $S$ . В силу свойства (iii) она реализует функцию

$$\psi(\hat{f}(\tilde{x}^n), \underbrace{x_1, \dots, x_1}_k) = \hat{f}(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1 = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1 \oplus x_1 \oplus 1 = f(\tilde{x}^n).$$

При отсутствии неисправностей в схеме  $S$  в силу равенств  $\hat{f}(\tilde{\sigma}_1) = 1$ ,  $\sigma_1 = 1$  и  $\hat{f}(\tilde{\sigma}_0) = 0$  на все входы элемента  $E$  на наборе  $\tilde{\sigma}_1$  поступят единицы, а на наборе  $\tilde{\sigma}_0$  — нули. Если выход элемента  $E$  исправен, а хотя бы один из его входов или из входов/выходов элементов подсхемы  $S'$  неисправен, то хотя бы на одном из этих наборов не менее чем на одном и не более чем на  $k$  входах элемента  $E$  возникнут «неправильные» значения, а тогда в силу свойства (iv) значение на выходе элемента  $E$ , т. е. на выходе схемы  $S$ , изменится, поэтому неисправность будет обнаружена на одном из наборов  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$ . Наконец, неисправность типа 0 на выходе элемента  $E$  обнаруживается на любом из этих двух наборов, так как  $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$ . Поэтому схема  $S$  является  $k$ -неизбыточной относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе её выходного элемента, и допускает  $k$ -проверяющий тест из наборов  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  относительно неисправностей указанного вида. ■

**Теорема 1.** Для любой булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$  справедливо равенство

$$D_{k-\Pi(1)}^{B_5(k)}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция или } f \equiv 0, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

*Доказательство.* Вместо  $D_{k-\Pi(1)}^{B_5(k)}(f)$  для краткости будем писать  $D(f)$ . Равенство  $D(f) = 0$  в случаях, когда  $f$  — тождественная функция и  $f \equiv 0$ , следует из лемм 1 и 2 соответственно. Если функция  $f$  не тождественная и отлична от константы 0, то неравенство  $D(f) \geq 2$  вытекает из леммы 3, а неравенство  $D(f) \leq 2$  — из лемм 4 и 5. ■

**Следствие 1.** Для любого  $n \geq 0$  справедливо равенство  $D_{k-\Pi(1)}^{B_5(k)}(n) = 2$ .

**Лемма 6.** Не существует схем в базисе  $B_5(k)$ , реализующих константу 1 и  $k$ -неизбыточных относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

*Доказательство.* Выход любой схемы в базисе  $B_5(k)$ , реализующей константу 1, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности типа 1 на выходе этого элемента получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать константу 1, т. е. исходная схема  $k$ -избыточна. ■

Очевидно, что никакая тождественная функция не является палиндромной, а константа 0 является палиндромной функцией.

**Теорема 2.** Для любой булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$ , отличной от константы 1, справедливо равенство

$$D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция,} \\ 1, & \text{если } f \equiv 0, \\ 2, & \text{если } f \text{ — не тождественная и не палиндромная функция,} \\ 3, & \text{если } f \text{ — палиндромная функция и } f \neq 0. \end{cases}$$

Если  $f \equiv 1$ , то значение  $D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f)$  не определено.

*Доказательство.* Вместо  $D_{k-\Pi(10)}^{B_5(k)}(f)$  для краткости будем писать  $D(f)$ . В случае  $f \equiv 1$  значение  $D(f)$  не определено в силу леммы 6. Равенства  $D(f) = 0$ , если функция  $f$  тождественная, и  $D(f) = 1$ , если  $f \equiv 0$ , следуют из лемм 1 и 2 соответственно. В случае, когда функция  $f$  не тождественная и не палиндромная, неравенство  $D(f) \geq 2$  следует из леммы 3, а  $D(f) \leq 2$  — из леммы 4.



Пусть  $f$  — палиндромная функция и  $f \neq 0, 1$ . В силу леммы 5 функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$  в базисе  $B_5(k)$ ,  $k$ -неизбыточной и допускающей  $k$ -проверяющий тест длины 2 относительно неисправностей на входах и выходах элементов, кроме неисправности типа 1 на выходе выходного элемента схемы. Добавим в этот тест любой двоичный набор длины  $n$ , на котором функция  $f$  принимает значение 0. На нём обнаруживается неисправность типа 1 на выходе выходного элемента схемы  $S$  (возможно, при наличии в ней других неисправных входов/выходов элементов). Поэтому данная схема  $k$ -неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов и допускает  $k$ -проверяющий тест длины не более 3 относительно неисправностей указанного вида. Отсюда следует, что  $D(f) \leq 3$ .

Докажем неравенство  $D(f) \geq 3$ . Предположим, что это не так, т. е.  $D(f) \leq 2$ . В силу леммы 3 имеем  $D(f) \geq 2$ , поэтому  $D(f) = 2$ . Значит, существует  $k$ -неизбыточная схема  $S'$  в базисе  $B_5(k)$ , реализующая функцию  $f$  и допускающая  $k$ -проверяющий тест из каких-то двух наборов  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$ . Пусть  $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$  — все существенные переменные функции  $f$ . Предположим, что  $i_j$ -е (слева) компоненты наборов  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  совпадают для некоторого  $j \in \{1, \dots, s\}$  и равны  $\alpha$ . Переменная  $x_{i_j}$  обязана подаваться хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы  $S'$ , поскольку  $x_{i_j} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$ . Тогда неисправность типа  $\alpha$  этого входа нельзя обнаружить ни на одном из наборов  $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ ; противоречие. Следовательно, наборы  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  различаются в каждой из  $i_1$ -й,  $\dots$ ,  $i_s$ -й компонент.

Далее, пусть  $\tilde{\pi}'_1$  — набор, противоположный набору  $\tilde{\pi}_1$ . Тогда  $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}'_1)$  в силу палиндромности функции  $f$ . Наборы  $\tilde{\pi}'_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  совпадают в  $i_1$ -й,  $\dots$ ,  $i_s$ -й компонентах, а функция  $f(\tilde{x}^n)$  существенно зависит только от переменных  $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ , поэтому  $f(\tilde{\pi}'_1) = f(\tilde{\pi}_2)$ . Таким образом,  $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2)$ . Отсюда следует, что неисправность типа  $f(\tilde{\pi}_1)$  на выходе выходного элемента схемы  $S'$  нельзя обнаружить ни на одном из наборов  $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ , т. е. множество  $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$  не является  $k$ -проверяющим тестом для этой схемы. Полученное противоречие означает, что  $D(f) \geq 3$ . ■

**Следствие 2.** Для любого  $n \geq 2$  справедливо равенство  $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_5(k)}(n) = 3$ .

**Замечание 2.** Среди всех схем, построенных при доказательстве верхних оценок величин  $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_5(k)}(f)$  и  $D_{k\text{-П(Ю)}}^{B_5(k)}(f)$  в теоремах 1 и 2 соответственно, элемент «константа 0» использовался только в построении схем, реализующих тождественный нуль, а  $\psi$ -элемент — только в построении схем, реализующих отличные от нуля палиндромные функции (причём в единственном числе).

## 2. Диагностические тесты

Пусть  $\xi(\tilde{x}^{3k+2}), \eta(\tilde{x}^{4k+2})$  — булевы функции, удовлетворяющие следующим условиям при  $\alpha = 0, 1$ :

- (v)  $\xi(\tilde{\alpha}^{3k+2}) = \alpha$ ;
- (vi) на всех наборах,  $k$ -соседних с набором  $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ , кроме него самого, функция  $\xi$  принимает значение  $\bar{\alpha}$ ;
- (vii) на всех наборах,  $k$ -соседних с набором  $\tilde{\rho}_\alpha = (\tilde{\alpha}^{k+1}, \tilde{\alpha}^{2k+1})$ , функция  $\xi$  принимает значение  $\alpha$ ;
- (viii)  $\eta(\tilde{\alpha}^{4k+2}) = 1$ ;
- (ix) на всех наборах,  $k$ -соседних с набором  $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$ , кроме него самого, функция  $\eta$  принимает значение 0;
- (x) на всех наборах,  $k$ -соседних с набором  $\tilde{\gamma}_\alpha = (\tilde{\alpha}^{2k+1}, \tilde{\alpha}^{2k+1})$ , функция  $\eta$  принимает значение  $\alpha$ .

На всех остальных двоичных наборах длины  $3k + 2$  (длины  $4k + 2$ ) функция  $\xi$  (соответственно  $\eta$ ) может принимать произвольные значения.

Покажем, что каждая из функций  $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$ ,  $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$  определена корректно, т. е. множества наборов, на которых она принимает значения 0 и 1, не пересекаются. Заметим, что для любого  $\alpha \in \{0, 1\}$  набор  $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$  отличается от каждого из наборов  $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ ,  $\tilde{\rho}_\alpha$  по крайней мере в  $(2k + 1)$  компонентах, поэтому любой набор,  $k$ -соседний с набором  $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ , отличается от каждого из наборов  $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ ,  $\tilde{\rho}_\alpha$  по крайней мере в  $(k + 1)$  компонентах, т. е. не может быть  $k$ -соседним ни с одним из этих наборов. Набор  $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$  отличается от набора  $\tilde{\rho}_{\bar{\alpha}}$  в  $(k + 1)$  компонентах, поэтому не является  $k$ -соседним с этим набором. Кроме того, наборы  $\tilde{\rho}_0$  и  $\tilde{\rho}_1$  различаются в  $(3k + 2)$  компонентах, поэтому никакой набор,  $k$ -соседний с набором  $\tilde{\rho}_0$ , не может быть  $k$ -соседним с набором  $\tilde{\rho}_1$ . Из приведённых рассуждений и условий (v)–(vii) следует, что множества наборов, на которых функция  $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$  принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Далее, для любого  $\alpha \in \{0, 1\}$  набор  $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$  отличается от набора  $\tilde{\nu}_1$  в  $(2k + 1)$  компонентах, поэтому никакой набор,  $k$ -соседний с набором  $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$ , не может быть  $k$ -соседним с набором  $\tilde{\nu}_1$ . Наборы  $\tilde{\nu}_0$  и  $\tilde{\nu}_1$  различаются в  $(4k + 2)$  компонентах, поэтому никакой набор,  $k$ -соседний с набором  $\tilde{\nu}_0$ , не может быть  $k$ -соседним с набором  $\tilde{\nu}_1$ . Кроме того, любые два из наборов  $(\tilde{0}^{4k+2})$ ,  $(\tilde{1}^{4k+2})$  и  $\tilde{\nu}_0$  различаются по крайней мере в  $(2k + 1)$  компонентах, поэтому не являются  $k$ -соседними. Из приведённых рассуждений и условий (viii)–(x) следует, что множества наборов, на которых функция  $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$  принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Рассмотрим базис  $B_6(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \xi(\tilde{x}^{3k+2}), \eta(\tilde{x}^{4k+2}), \bar{x}, 0\}$ , где  $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$  — булева функция из базиса  $B_5(k)$ . Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида  $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$  ( $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ ), будем называть  $\xi$ -элементом (соответственно  $\eta$ -элементом).

По аналогии с леммами соответственно 1, 2, 3 и 6 доказываются следующие утверждения.

**Лемма 7.** Любую тождественную булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$  можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой в базисе  $B_6(k)$ , допускающей  $k$ -диагностический тест длины 0 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

**Лемма 8.** В случае  $f \equiv 0$  справедливы равенства  $D_{k-Д(I)}^{B_6(k)}(f) = 0$ ,  $D_{k-Д(10)}^{B_6(k)}(f) = 1$ .

**Лемма 9.** Для любой  $k$ -неизбыточной схемы в базисе  $B_6(k)$ , реализующей не тождественную и отличную от константы 0 булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , любой  $k$ -диагностический тест относительно неисправностей на входах элементов содержит хотя бы два набора.

**Лемма 10.** Не существует схем в базисе  $B_6(k)$ , реализующих константу 1 и  $k$ -неизбыточных относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

Через  $I_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^n)$  будем обозначать булеву функцию, принимающую значение 1 на наборе  $\tilde{\sigma}$  и 0 на всех остальных наборах длины  $n$ .

**Лемма 11.** Любую не палиндромную булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , принимающую значения 0 и 1 на каких-то противоположных наборах  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  соответственно, можно реализовать схемой в базисе  $B_6(k)$ ,  $k$ -неизбыточной и допускающей  $k$ -диагностический тест  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству  $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1$ . Тогда справедливы соотношения

$$f'(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_0) \oplus 1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \quad (2)$$

$$f'(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_1) \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \quad (3)$$

из которых следует, что функция  $f'(\tilde{x}^n)$  не является палиндромной.

Построим схему  $S$  в базисе  $B_6(k)$ , реализующую функцию  $f(\tilde{x}^n)$  (рис. 1). Схема  $S$  состоит из  $(3k + 2)$  подсхем  $S_1, \dots, S_{3k+2}$  и выходного  $\xi$ -элемента  $E$ , входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы  $S_1, \dots, (3k + 2)$ -й вход — с выходом подсхемы  $S_{3k+2}$ ). Каждая из подсхем  $S_1, \dots, S_{k+1}$  реализует функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , а каждая из подсхем  $S_{k+2}, \dots, S_{3k+2}$  — функцию  $f'(\tilde{x}^n)$ , причём каждая из подсхем  $S_1, \dots, S_{3k+2}$  является  $k$ -неизбыточной схемой, состоящей только из  $\varphi$ -элементов и инверторов и допускающей  $k$ -проверяющий тест  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов; существование таких схем следует из леммы 4. При этом используется тот факт, что функции  $f$  и  $f'$  не являются палиндромными, а также соотношения  $f(\tilde{\sigma}_0) = 0, f(\tilde{\sigma}_1) = 1, (2)$  и  $(3)$ .

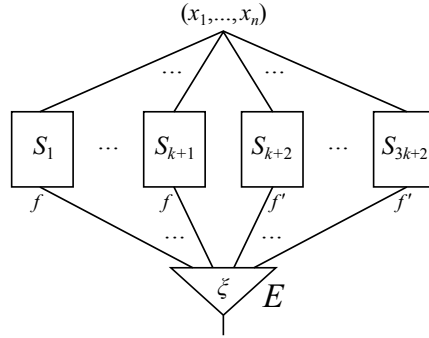


Рис. 1. Схема  $S$

Докажем, что построенная схема  $S$  в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию  $f(\tilde{x}^n)$ . Всюду ниже в доказательстве леммы 11 предполагаем, что  $\alpha$  — произвольное число из множества  $\{0, 1\}$ . На любом двоичном наборе  $\tilde{\tau}_\alpha$  ( $\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_\alpha$ ), на котором функция  $f$  принимает значение  $\alpha$ , на выходе каждой из подсхем  $S_1, \dots, S_{k+1}$  возникнет значение  $\alpha$ , а на выходе каждой из подсхем  $S_{k+2}, \dots, S_{3k+2}$  — значение  $f'(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = \bar{\alpha}$ , поскольку  $\tilde{\tau}_\alpha \notin \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  (действительно,  $\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_\alpha$  по определению и  $\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_{\bar{\alpha}}$  в силу того, что  $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha \neq f(\tilde{\sigma}_{\bar{\alpha}})$ ). Тогда на входы элемента  $E$  будет подан в точности набор  $\tilde{\rho}_\alpha$ , а на его выходе, т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $\xi(\tilde{\rho}_\alpha) = \alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$  в силу условия (vii). Далее, на наборе  $\tilde{\sigma}_\alpha$  на выходе каждой из подсхем  $S_1, \dots, S_{k+1}$  возникнет значение  $f(\tilde{\sigma}_\alpha) = \alpha$ , а на выходе каждой из подсхем  $S_{k+2}, \dots, S_{3k+2}$  — значение

$$f'(\tilde{\sigma}_\alpha) = f(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_\alpha}(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_{\bar{\alpha}}}(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = \alpha.$$

Тогда на входы элемента  $E$  будет подан в точности набор  $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ , а на его выходе, т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $\xi(\tilde{\alpha}^{3k+2}) = \alpha = f(\tilde{\sigma}_\alpha)$  в силу условия (v). Таким образом, на выходе схемы  $S$  реализуется функция  $f(\tilde{x}^n)$ .

Найдём все возможные функции неисправности схемы  $S$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента  $E$  схемы исправен. Неисправность на  $i$ -м входе элемента  $E$  равносильна неисправности такого

же типа на выходе выходного элемента подсхемы  $S_i$ , где  $i$  — произвольный индекс от 1 до  $3k + 2$ . Поэтому можно считать, что неисправными в схеме  $S$  могут быть только входы/выходы элементов из её подсхем  $S_1, \dots, S_{3k+2}$ . При произвольной неисправности не менее одного и не более  $k$  входов/выходов таких элементов на любом входном наборе схемы  $S$  могут измениться значения не более чем на  $k$  входах элемента  $E$ . Поэтому на любом наборе  $\tilde{\tau}_\alpha$  ( $\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_\alpha$ ), на котором функция  $f$  принимает значение  $\alpha$ , на входы элемента  $E$  поступит набор,  $k$ -соседний с набором  $\tilde{\rho}_\alpha$ , а на его выходе, т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$  в силу условия (vii).

На наборах  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  на входы элемента  $E$  поступят наборы  $\tilde{\pi}_0$  и  $\tilde{\pi}_1$  длины  $3k + 2$ ,  $k$ -соседние с наборами  $(\tilde{0}^{3k+2})$  и  $(\tilde{1}^{3k+2})$  соответственно. При этом выполнено хотя бы одно из соотношений  $\tilde{\pi}_0 \neq (\tilde{0}^{3k+2})$ ,  $\tilde{\pi}_1 \neq (\tilde{1}^{3k+2})$ , поскольку множество  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  является  $k$ -проверяющим тестом для каждой из  $k$ -неизбыточных схем  $S_1, \dots, S_{3k+2}$  (значение на выходе любой из этих схем, содержащей хотя бы один неисправный элемент, изменится хотя бы на одном из наборов  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$ ). Следовательно, значение на выходе элемента  $E$ , т. е. на выходе схемы  $S$ , изменится хотя бы на одном из наборов  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$  в силу условий (v), (vi). Таким образом, на выходе схемы  $S$  возникнет функция неисправности, отличающаяся от функции  $f$  по крайней мере на одном из этих двух наборов и совпадающая с функцией  $f$  на всех наборах длины  $n$ , отличных от указанных двух.

Тем самым показано, что все возможные функции неисправности схемы  $S$  принадлежат множеству  $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$ . Каждую из них можно отличить от любой другой и от функции  $f$  хотя бы на одном из наборов  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$ , поэтому схема  $S$  является  $k$ -неизбыточной и допускает  $k$ -диагностический тест  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход её выходного элемента исправен. ■

**Лемма 12.** Любую булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , для которой существуют такие два противоположных двоичных набора  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  длины  $n$ , что  $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$ , можно реализовать схемой в базисе  $B_6(k)$ ,  $k$ -неизбыточной и допускающей  $k$ -диагностический тест  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству  $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$ , а в случае  $k = 1$  — множеству  $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$ ,  $f'' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1$ . Тогда справедливы соотношения

$$f'(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_0) = 1 \oplus 1 = 0, \quad (4)$$

$$f'(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_1) = 1 \oplus 0 = 1, \quad (5)$$

$$f''(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_0) \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \quad (6)$$

$$f''(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_1) \oplus 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \quad (7)$$

из которых следует, что функции  $f'(\tilde{x}^n)$  и  $f''(\tilde{x}^n)$  не являются палиндромными.

Построим схему  $S$  в базисе  $B_6(k)$ , реализующую функцию  $f(\tilde{x}^n)$  (рис. 2). Схема  $S$  состоит из  $4k + 2$  подсхем  $S_1, \dots, S_{4k+2}$  и выходного  $\eta$ -элемента  $E$ , входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы  $S_1, \dots, (4k + 2)$ -й вход — с выходом подсхемы  $S_{4k+2}$ ). Каждая из подсхем  $S_1, \dots, S_{2k+1}$  реализует функцию  $f'(\tilde{x}^n)$ , а каждая из подсхем  $S_{2k+2}, \dots, S_{4k+2}$  — функцию  $f''(\tilde{x}^n)$ , причём каждая из подсхем  $S_1, \dots, S_{4k+2}$  является  $k$ -неизбыточной схемой, состоящей только из  $\varphi$ -элементов и инверторов и допускающей  $k$ -проверяющий тест  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправ-

ностей на входах и выходах элементов; существование таких схем следует из леммы 4, из того, что функции  $f'$  и  $f''$  не являются палиндромными, и из соотношений (4)–(7).

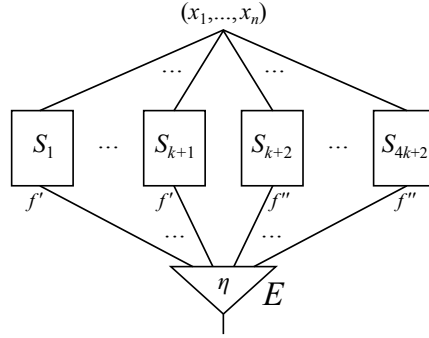


Рис. 2. Схема  $S$

Докажем, что построенная схема  $S$  в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию  $f(\tilde{x}^n)$ . Всюду ниже в доказательстве леммы предполагаем, что  $\alpha$  — произвольное число из множества  $\{0, 1\}$ . На любом двоичном наборе  $\tilde{\tau}_\alpha$  длины  $n$ , на котором функция  $f$  принимает значение  $\alpha$ , отличным от наборов  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$ , на выходе каждой из подсхем  $S_1, \dots, S_{2k+1}$  возникнет значение

$$f'(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha \oplus 0 = \alpha,$$

а на выходе каждой из подсхем  $S_{2k+2}, \dots, S_{4k+2}$  — значение

$$f''(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 0 \oplus 1 = \bar{\alpha}.$$

Тогда на входы элемента  $E$  будет подан в точности набор  $\tilde{\nu}_\alpha$ , а на его выходе, т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $\eta(\tilde{\nu}_\alpha) = \alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$  в силу условия (x). Далее, на наборе  $\tilde{\sigma}_\alpha$  на выходе каждой из подсхем  $S_1, \dots, S_{4k+2}$  возникнет значение  $\alpha$  в силу (4), (6) при  $\alpha = 0$  и (5), (7) при  $\alpha = 1$ . Тогда на входы элемента  $E$  будет подан в точности набор  $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$ , а на его выходе, т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $\eta(\tilde{\alpha}^{4k+2}) = 1 = f(\tilde{\sigma}_\alpha)$  в силу условия (viii). Таким образом, на выходе схемы  $S$  реализуется в точности функция  $f(\tilde{x}^n)$ .

Найдём все возможные функции неисправности схемы  $S$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента  $E$  схемы исправен. Неисправность на  $i$ -м входе элемента  $E$  равносильна неисправности такого же типа на выходе выходного элемента подсхемы  $S_i$ , где  $i$  — произвольный индекс от 1 до  $4k + 2$ . Поэтому можно считать, что неисправными в схеме  $S$  могут быть только входы/выходы элементов из её подсхем  $S_1, \dots, S_{4k+2}$ . При произвольной неисправности не менее одного и не более  $k$  входов/выходов таких элементов на любом входном наборе схемы  $S$  могут измениться значения не более чем на  $k$  входах элемента  $E$ . Поэтому на любом наборе  $\tilde{\tau}_\alpha$ , на котором функция  $f$  принимает значение  $\alpha$ , отличным от наборов  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$ , на входы элемента  $E$  поступит набор,  $k$ -соседний с набором  $\tilde{\nu}_\alpha$ , а на его выходе, т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$  в силу условия (x).

На наборах  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  на входы элемента  $E$  поступят наборы  $\tilde{\pi}_0$  и  $\tilde{\pi}_1$  длины  $4k+2$ ,  $k$ -соседние с наборами  $(\tilde{0}^{4k+2})$  и  $(\tilde{1}^{4k+2})$  соответственно. При этом выполнено хотя бы одно из соотношений  $\tilde{\pi}_0 \neq (\tilde{0}^{4k+2})$ ,  $\tilde{\pi}_1 \neq (\tilde{1}^{4k+2})$ , поскольку множество  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  является  $k$ -проверяющим тестом для каждой из  $k$ -неизбыточных схем  $S_1, \dots, S_{4k+2}$ . Следовательно, значение на выходе элемента  $E$ , т. е. на выходе схемы  $S$ , изменится хотя бы на

одном из наборов  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$  в силу условий (viii), (ix). Таким образом, на выходе схемы  $S$  возникнет функция неисправности, отличающаяся от функции  $f$  по крайней мере на одном из этих двух наборов и совпадающая с функцией  $f$  на всех наборах длины  $n$ , отличных от указанных двух.

Тем самым показано, что все возможные функции неисправности схемы  $S$  принадлежат множеству  $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$ . Каждую из них можно отличить от любой другой и от функции  $f$  хотя бы на одном из наборов  $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$ , поэтому схема  $S$  является  $k$ -неизбыточной и допускает  $k$ -диагностический тест  $T = \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход её выходного элемента исправен.

Пусть  $k = 1$ . Если при отсутствии неисправностей в схеме  $S$  на некотором входе/выходе некоторого элемента этой схемы, кроме выхода элемента  $E$ , на двух наборах из множества  $T$  возникает одно и то же значение  $\beta$ , то неисправность типа  $\beta$  указанного входа/выхода нельзя обнаружить на наборах из данного множества, однако это противоречит последнему предложению предыдущего абзаца. Поэтому на любом входе/выходе любого элемента схемы  $S$ , за исключением выхода элемента  $E$ , на двух наборах из множества  $T$  возникают различные значения. Тогда неисправность типа  $\gamma$ ,  $\gamma \in \{0, 1\}$ , любого входа/выхода любого элемента этой схемы, кроме выхода элемента  $E$ , обнаруживается только на том наборе  $\tilde{\sigma}'$  из множества  $T$ , на котором значение на указанном входе/выходе в отсутствие неисправностей равно  $\bar{\gamma}$ , и не обнаруживается на другом наборе  $\tilde{\sigma}''$  из данного множества. Значит, при рассматриваемой неисправности на наборе  $\tilde{\sigma}'$  схема  $S$  выдаст значение  $\bar{f}(\tilde{\sigma}')$ , а на наборе  $\tilde{\sigma}''$  — «правильное» значение  $f(\tilde{\sigma}'')$ .

Приведённые рассуждения показывают, что любая функция неисправности схемы  $S$  отличается от функции  $f(\tilde{x}^n)$  ровно на одном наборе из множества  $T$  и совпадает с ней на всех остальных наборах, т. е. принадлежит множеству  $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$ . ■

**Теорема 3.** Для любой булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$  справедливо равенство

$$D_{k-Д(1)}^{B_6(k)}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция или } f \equiv 0, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

**Доказательство.** Вместо  $D_{k-Д(1)}^{B_6(k)}(f)$  для краткости будем писать  $D(f)$ . Равенство  $D(f) = 0$  в случаях, когда  $f$  — тождественная функция и  $f \equiv 0$ , следует из лемм 7 и 8 соответственно. Если же функция  $f$  не тождественна и отлична от константы 0, то неравенство  $D(f) \geq 2$  вытекает из леммы 9, а  $D(f) \leq 2$  — из лемм 11 и 12. Стоит отметить, что если  $f$  — не палиндромная функция, то существуют такие два противоположных набора  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  длины  $n$ , для которых  $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$  и  $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$ , а в случае, когда  $f$  — палиндромная функция и  $f \not\equiv 0$ , существуют такие два противоположных набора  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  длины  $n$ , что  $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$ . ■

**Следствие 3.** Для любого  $n \geq 0$  справедливо равенство  $D_{k-Д(1)}^{B_6(k)}(n) = 2$ .

**Лемма 13.** Любую не палиндромную булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$  можно реализовать схемой в базисе  $B_6(k)$ ,  $k$ -неизбыточной и допускающей  $k$ -диагностический тест длины не более 4 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

**Доказательство.** Существуют такие противоположные наборы  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  длины  $n$ , что  $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$  и  $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$ . По лемме 11 функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$

в базисе  $B_6(k)$ ,  $k$ -неизбыточной и допускающей  $k$ -диагностический тест  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству  $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$ . Если указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы  $S$  возникнет функция неисправности, тождественно равная нулю (соответственно единице) и тем самым отличная от функции  $f$ , поскольку константы 0 и 1 являются палиндромными функциями. Таким образом, данная схема  $k$ -неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Составим таблицу значений функции  $f$  и всех возможных функций неисправности схемы  $S$  на наборах  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Наборы	$f$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	0	1	0	1	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$  от константы 1, если  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \neq 1$ , а также функцию  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$  от константы 0, если  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \neq 0$ . В случае  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \neq 1$  добавим в множество  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  произвольный набор длины  $n$ , на котором функция  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$  принимает значение 0, а в случае  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \neq 0$  — произвольный набор длины  $n$ , на котором функция  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$  принимает значение 1. Итоговое множество будет являться  $k$ -диагностическим тестом длины не более 4 для схемы  $S$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов. ■

**Лемма 14.** Пусть  $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ , где  $s \geq 2$ , — все существенные переменные булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$ , а двоичные наборы  $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3$  длины  $n$  и элементы  $\alpha, \gamma \in \{0, 1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, s\}$ , таковы, что  $i_j$ -я (слева) компонента каждого из наборов  $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$  равна  $\gamma$ ,  $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$ , а  $f(\tilde{\pi}_3) = \bar{\alpha}$ . Пусть схема  $S$  в базисе  $B_6(k)$  является  $k$ -неизбыточной, реализует функцию  $f(\tilde{x}^n)$  и множество  $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$  является для неё  $k$ -диагностическим тестом относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Тогда на любом наборе длины  $n$ ,  $i_j$ -я компонента которого равна  $\gamma$ , функция  $f$  принимает значение  $\alpha$ .

**Доказательство.** Переменная  $x_{i_j}$  обязана подаваться хотя бы на один вход  $v$  хотя бы одного элемента схемы  $S$ , поскольку  $x_{i_j} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$ . Тогда неисправность типа  $\gamma$  этого входа нельзя обнаружить ни на одном из наборов  $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ , значит, она должна обнаруживаться на наборе  $\tilde{\pi}_3$ . Отсюда вытекает, что для получающейся функции неисправности  $g$  схемы  $S$  справедливы равенства  $g(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_1) = \alpha$ ,  $g(\tilde{\pi}_2) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$  и  $g(\tilde{\pi}_3) = \bar{f}(\tilde{\pi}_3) = \alpha$ , т. е. функцию  $g$  нельзя отличить ни на одном из наборов  $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3$  от константы  $\alpha$ , возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа  $\alpha$  на выходе её выходного элемента. С учётом того, что множество  $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$  является  $k$ -диагностическим тестом для схемы  $S$ , это может быть только в том случае, когда  $g \equiv \alpha$ .

При подаче на входы схемы  $S$  произвольного двоичного набора длины  $n$ ,  $i_j$ -я компонента которого равна  $\gamma$ , на вход  $v$  поступает значение  $\gamma$ , поэтому функция  $g$ , возникающая на выходе схемы при неисправности типа  $\gamma$  этого входа, на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция  $f$ . С учётом тождества  $g \equiv \alpha$  получаем, что на любом наборе длины  $n$ ,  $i_j$ -я компонента которого равна  $\gamma$ , функция  $f$  принимает значение  $\alpha$ . ■

В следующей теореме рассмотрен случай неисправностей на входах и выходах элементов при  $k = 1$ , т. е. когда неисправным может быть только один вход/выход только одного элемента.

**Теорема 4.** Для любой булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$ , отличной от константы 1, справедливо равенство

$$D_{\text{ЕД(ИО)}}^{B_6(1)}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ — тождественная функция,} \\ 1, & \text{если } f \equiv 0, \\ 2, & \text{если } f \equiv \bar{x}_i \text{ для некоторого } i \in \{1, \dots, n\}, \\ 3, & \text{если } f \text{ — несамодвойственная функция и } f \not\equiv 0, \\ 4, & \text{если } f \text{ — самодвойственная функция} \\ & \text{и } f \notin \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}. \end{cases}$$

Если  $f \equiv 1$ , то значение  $D_{\text{ЕД(ИО)}}^{B_6(1)}(f)$  не определено.

**Доказательство.** Вместо  $D_{\text{ЕД(ИО)}}^{B_6(1)}(f)$  для краткости будем писать  $D(f)$ . В случае  $f \equiv 1$  значение  $D(f)$  не определено в силу леммы 10. Равенства  $D(f) = 0$ , если функция  $f$  тождественная, и  $D(f) = 1$ , если  $f \equiv 0$ , следуют из лемм 7 и 8 соответственно. Пусть  $f \equiv \bar{x}_i$  для некоторого  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Тогда функцию  $f$  можно реализовать схемой в базисе  $B_6(1)$ , состоящей из одного инвертора, на вход которого подаётся переменная  $x_i$ . Очевидно, что у данной схемы есть только две функции неисправности — константы 0 и 1, которые можно отличить друг от друга и от функции  $f$  на множестве, состоящем из любых двух двоичных наборов длины  $n$ ,  $i$ -я (слева) компонента одного из которых равна единице, а другого — нулю. Отсюда следует неравенство  $D(f) \leq 2$ . С другой стороны,  $D(f) \geq 2$  в силу леммы 9, поэтому  $D(f) = 2$ .

Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  — произвольная булева функция, не принадлежащая множеству  $\{0, 1, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ . Докажем неравенство  $D(f) \geq 3$ . Предположим, что это не так, т. е.  $D(f) \leq 2$ . В силу леммы 9 имеем  $D(f) \geq 2$ , поэтому  $D(f) = 2$ . Значит, существует избыточная схема  $S$  в базисе  $B_6(1)$ , реализующая функцию  $f$  и допускающая единичный диагностический тест из каких-то двух наборов  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  длины  $n$ . Заметим, что

$$f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2), \quad (8)$$

поскольку в противном случае неисправность типа  $f(\tilde{\pi}_1)$  на выходе выходного элемента схемы  $S$  нельзя было бы обнаружить ни на одном из этих двух наборов. Пусть  $x_i$  — произвольная существенная переменная функции  $f$ . Переменная  $x_i$  обязана подаваться хотя бы на один вход  $v$  хотя бы одного элемента схемы  $S$ . Если  $i$ -е (слева) компоненты наборов  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  совпадают и равны  $\beta$ , то неисправность типа  $\beta$  данного входа нельзя обнаружить на наборах  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$ ; противоречие. Значит,  $i$ -е компоненты наборов  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  равны соответственно  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$  для некоторого  $\gamma \in \{0, 1\}$ . Тогда неисправность типа  $\gamma$  входа  $v$  обнаруживается на наборе  $\tilde{\pi}_2$  и не обнаруживается на наборе  $\tilde{\pi}_1$ , т. е. при рассматриваемой неисправности на наборе  $\tilde{\pi}_1$  схема  $S$  выдаст значение  $f(\tilde{\pi}_1)$ , а на наборе  $\tilde{\pi}_2$  — значение  $\bar{f}(\tilde{\pi}_2)$ , которое равно  $f(\tilde{\pi}_1)$  в силу (8). Таким образом, полученную функцию неисправности  $g_1$  схемы  $S$  нельзя отличить ни на одном из наборов  $\tilde{\pi}_1$ ,  $\tilde{\pi}_2$  от константы  $f(\tilde{\pi}_1)$ , возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа  $f(\tilde{\pi}_1)$  на выходе её выходного элемента. С учётом того, что  $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$  — единичный диагностический тест для схемы  $S$ , это может быть только в том случае, когда



$g_1 \equiv f(\tilde{\pi}_1)$ . Аналогично при неисправности типа  $\bar{\gamma}$  входа  $v$  на выходе схемы  $S$  возникнет функция неисправности  $g_2$ , принимающая на наборах  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  значения  $\bar{f}(\tilde{\pi}_1)$  и  $f(\tilde{\pi}_2) = \bar{f}(\tilde{\pi}_1)$  соответственно. Её нельзя отличить ни на одном из этих наборов от константы  $\bar{f}(\tilde{\pi}_1)$ , возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа  $\bar{f}(\tilde{\pi}_1)$  на выходе её выходного элемента, поэтому  $g_2 \equiv \bar{f}(\tilde{\pi}_1)$ .

Далее заметим, что при подаче на входы схемы  $S$  произвольного двоичного набора длины  $n$ ,  $i$ -я компонента которого равна  $\gamma$ , на вход  $v$  поступает значение  $\gamma$ , поэтому функция  $g_1$ , возникающая на выходе схемы при неисправности типа  $\gamma$  этого входа, на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция  $f$ . С учётом тождества  $g_1 \equiv f(\tilde{\pi}_1)$  получаем, что на любом наборе длины  $n$ ,  $i$ -я компонента которого равна  $\gamma$ , функция  $f$  принимает значение  $f(\tilde{\pi}_1)$ . Аналогично на любом наборе длины  $n$ ,  $i$ -я компонента которого равна  $\bar{\gamma}$ , функция  $g_2$  принимает такое же значение, как и функция  $f$ . С учётом тождества  $g_2 \equiv \bar{f}(\tilde{\pi}_1)$  получаем, что на любом таком наборе функция  $f$  принимает значение  $\bar{f}(\tilde{\pi}_1)$ . Но тогда легко проверить, что на любом наборе длины  $n$  функция  $f$  принимает такое же значение, как и функция  $x_i \oplus \gamma \oplus f(\tilde{\pi}_1)$ , т. е.  $f \equiv x_i \oplus \gamma \oplus f(\tilde{\pi}_1)$ . Это означает, что либо  $f \equiv x_i$ , либо  $f \equiv \bar{x}_i$ , но в таком случае  $f \in \{0, 1, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ ; противоречие. Неравенство  $D(f) \geq 3$  доказано.

Пусть  $f$  — несамодвойственная функция и  $f \not\equiv 0, 1$ . Докажем, что  $D(f) \leq 3$ ; тогда с учётом неравенства  $D(f) \geq 3$  будет установлено равенство  $D(f) = 3$ . Функция  $f$  принимает одно и то же значение на каких-то двух противоположных наборах  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  длины  $n$ . Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$ . Тогда по лемме 12 (при  $k = 1$ ) функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S'$  в базисе  $B_6(1)$ , избыточной и допускающей единичный диагностический тест  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству  $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$ . В случае, если указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы  $S'$  возникнет функция неисправности, тождественно равная нулю (соответственно единице). Таким образом, данная схема избыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Составим таблицу значений функции  $f$  и всех возможных функций неисправности схемы  $S'$  на наборах  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  (табл. 2).

Таблица 2

Наборы	$f$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	1	0	1	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию  $f$  от константы 1. Добавим к этим наборам ещё один произвольный набор длины  $n$ , на котором функция  $f$  принимает значение 0. Полученное множество будет являться единичным диагностическим тестом длины 3 для схемы  $S'$ , откуда следует  $D(f) \leq 3$ . Случай 1 разобран.

2. Пусть  $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 0$ . Функция  $\bar{f}$  принимает значение 1 на каких-то противоположных наборах  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$ , поэтому по лемме 12 (при  $k = 1$ ) её можно реализовать схемой  $\hat{S}'$  в базисе  $B_6(1)$ , избыточной и допускающей единичный диагностический тест  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента  $E$  схемы исправен, причём все функции неисправности схемы  $\hat{S}'$  принадлежат множеству  $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$ . Соединим выход этой схемы со

выходом инвертора  $I$ , выход которого объявим выходом полученной схемы; обозначим её через  $S'$ . Тогда при неисправности любого входа/выхода любого элемента подсхемы  $\hat{S}'$ , кроме выхода элемента  $E$ , на выходе схемы  $S'$  возникнет одна из функций неисправности

$$\begin{aligned}\overline{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}} &= f \oplus 1 \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus 1 = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, \\ \overline{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}} &= f \oplus 1 \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1 = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1},\end{aligned}$$

а при произвольной неисправности входа или выхода элемента  $I$  либо выхода выходного элемента подсхемы  $\hat{S}'$  — одна из булевых констант 0 или 1. Таким образом, схема  $S'$  неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов. Составим таблицу значений функции  $f$  и всех возможных функций неисправности данной схемы на наборах  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  (табл. 3).

Таблица 3

Наборы	$f$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	0	1	0	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	0	0	1	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию  $f$  от константы 0. Добавим к этим наборам ещё один произвольный набор длины  $n$ , на котором функция  $f$  принимает значение 1. Полученное множество будет являться единичным диагностическим тестом длины 3 для схемы  $S'$ , откуда следует  $D(f) \leq 3$ . Случай 2 разобран. Равенство  $D(f) = 3$  доказано.

Пусть теперь  $f(\tilde{x}^n)$  — самодвойственная функция и  $f \notin \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ . Неравенство  $D(f) \leq 4$  следует из леммы 13 (при  $k = 1$ ) и того, что функция  $f$ , очевидно, не является палиндромной. Докажем неравенство  $D(f) \geq 4$ . Предположим, что это не так, т. е.  $D(f) \leq 3$ . Выше установлено, что  $D(f) \geq 3$ , поэтому  $D(f) = 3$ . Значит, существует неизбыточная схема  $S''$  в базисе  $B_6(1)$ , реализующая функцию  $f$  и допускающая единичный диагностический тест из каких-то трёх наборов длины  $n$ . Данная функция не может принимать одинаковое значение  $\beta$  на всех этих наборах, поскольку в противном случае её нельзя было бы отличить на них от константы  $\beta$ , возникающей при неисправности типа  $\beta$  на выходе выходного элемента схемы  $S''$ . Поэтому на каких-то двух наборах  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  из теста функция  $f$  принимает значение  $\alpha$ , а на третьем наборе  $\tilde{\pi}_3$  из теста — значение  $\bar{\alpha}$ , где  $\alpha \in \{0, 1\}$ .

Пусть  $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$  — все существенные переменные функции  $f$ . Предположим, что наборы  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  различаются в каждой из  $i_1$ -й,  $\dots$ ,  $i_s$ -й (слева) компонент. Пусть  $\tilde{\pi}'_1$  — набор, противоположный набору  $\tilde{\pi}_1$ . Тогда  $f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}'_1)$  в силу самодвойственности функции  $f$ . Наборы  $\tilde{\pi}'_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  совпадают в  $i_1$ -й,  $\dots$ ,  $i_s$ -й компонентах, а функция  $f(\tilde{x}^n)$  существенно зависит только от переменных  $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ , поэтому  $f(\tilde{\pi}'_1) = f(\tilde{\pi}_2)$ . Таким образом,  $f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2)$ , однако это противоречит тому, что  $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$ . Следовательно, наборы  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  совпадают хотя бы в одной из  $i_1$ -й,  $\dots$ ,  $i_s$ -й компонент; обозначим номер этой компоненты через  $i_j$ , а её значение в каждом из указанных наборов — через  $\gamma$ . Тогда выполнены все условия леммы 14 (при  $S = S''$ ), из которой следует, что на любом наборе длины  $n$ ,  $i_j$ -я компонента которого равна  $\gamma$ , функция  $f$  принимает значение  $\alpha$ . В таком случае на любом наборе длины  $n$ ,  $i_j$ -я компонента которого равна  $\bar{\gamma}$ , данная функция в силу её самодвойственности принимает значение  $\bar{\alpha}$ . Но тогда легко проверить, что на любом наборе длины  $n$  функция  $f$  принимает такое

же значение, как и функция  $x_i \oplus \gamma \oplus \alpha$ , т. е.  $f \equiv x_i \oplus \gamma \oplus \alpha$ . Это означает, что либо  $f \equiv x_i$ , либо  $f \equiv \bar{x}_i$ , поэтому  $f \in \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ ; противоречие. Неравенство  $D(f) \geq 4$  доказано.

В итоге получаем, что  $D(f) = 4$ . ■

**Следствие 4.** Для любого  $n \geq 3$  справедливо равенство  $D_{\text{ЕД(Ю)}}^{B_6(1)}(n) = 4$ .

Для доказательства следствия 4 достаточно заметить, что функция  $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$  является самодвойственной.

**Теорема 5.** Для любого  $k \in \mathbb{N}$  справедливо равенство  $D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_6(k)}(n) = 4$  при  $n \geq 3$ , причём в случае  $k \geq 2$  доля тех булевых функций  $f$  от  $n$  переменных, для которых  $D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_6(k)}(f) = 4$ , стремится к 1 при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Вместо  $D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_6(k)}(n)$ ,  $D_{k\text{-Д(Ю)}}^{B_6(k)}(f)$  для краткости будем писать соответственно  $D(n)$ ,  $D(f)$ . Неравенство  $D(n) \geq 4$  при  $n \geq 3$  вытекает из следствия 4 (любой  $k$ -диагностический тест для любой  $k$ -неизбыточной схемы является единичным диагностическим тестом для той же схемы, которая при этом избыточна). Докажем неравенство  $D(n) \leq 4$ . Для этого достаточно доказать неравенство  $D(f) \leq 4$  для любой булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$ , для которой определено значение  $D(f)$ . При  $f \equiv 1$  оно не определено в силу леммы 1; при  $f \equiv 0$  указанное неравенство следует из леммы 8, а в случае, когда функция  $f$  не палиндромная, — из леммы 13.

Пусть  $f$  — палиндромная функция и  $f \neq 0, 1$ . Тогда существуют такие два противоположных двоичных набора  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  длины  $n$ , что  $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$ . По лемме 12 функцию  $f$  можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой  $S$  в базисе  $B_6(k)$ , допускающей  $k$ -диагностический тест  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её функции неисправности принадлежат множеству  $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$ . Если указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы  $S$  возникнет функция неисправности, тождественно равная нулю (соответственно единице). Таким образом, данная схема  $k$ -неизбыточна. Составим таблицу значений функции  $f$  и всех возможных функций неисправности схемы  $S$  на наборах  $\tilde{\sigma}_0$  и  $\tilde{\sigma}_1$  (табл. 4).

Т а б л и ц а 4

Наборы	$f$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	1	0	1	0	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	0	1

Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$  от константы 0, если  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \neq 0$ , а также функцию  $f$  от константы 1. Добавим в множество  $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$  произвольный набор длины  $n$ , на котором функция  $f$  принимает значение 0, а в случае  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \neq 0$  добавим в полученное множество произвольный набор длины  $n$ , на котором функция  $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$  принимает значение 1. Итоговое множество будет являться  $k$ -диагностическим тестом длины не более 4 для схемы  $S$ , откуда следует, что  $D(f) \leq 4$ . Неравенство  $D(n) \leq 4$ , а вместе с ним равенство  $D(n) = 4$  при  $n \geq 3$  доказаны.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть  $k \geq 2$ ,  $n \geq 2$  и  $f$  — произвольная булева функция от  $n$  переменных, не принадлежащая множеству  $U = \{0, 1, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ , для которой  $D(f) \leq 3$ . Докажем, что  $f \in F_n$ , где  $F_n$  — множество булевых функций от  $n$  переменных, каждая из которых при подстановке вместо

каких-то двух её переменных каких-то булевых констант становится равна некоторой булевой константе. Из теоремы 4 следует, что  $D(f) \geq 3$ , поэтому  $D(f) = 3$ . Значит, существует избыточная схема  $S'$  в базисе  $B_6(k)$ , реализующая функцию  $f$  и допускающая  $k$ -диагностический тест из каких-то трёх наборов длины  $n$ . Данная функция не может принимать одинаковое значение  $\beta$  на всех этих наборах, поскольку в противном случае её нельзя было бы отличить на них от константы  $\beta$ , возникающей при неисправности типа  $\beta$  на выходе выходного элемента схемы  $S'$ . Поэтому на каких-то двух наборах  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  из теста функция  $f$  принимает значение  $\alpha$ , а на третьем наборе  $\tilde{\pi}$  из теста — значение  $\bar{\alpha}$ , где  $\alpha \in \{0, 1\}$ .

Пусть  $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$  — все существенные переменные функции  $f$ . Ясно, что  $s \geq 2$ . Если  $i_j$ -е компоненты наборов  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  совпадают для некоторого  $j \in \{1, \dots, s\}$ , то выполнены все условия леммы 14 (при  $S = S'$ ,  $\tilde{\pi}_3 = \tilde{\pi}$ ). Из неё следует, что на любом наборе длины  $n$ ,  $i_j$ -я компонента которого равна  $\gamma$ , функция  $f$  принимает значение  $\alpha$ . Но тогда при подстановке вместо переменной  $x_{i_j}$  константы  $\gamma$ , а вместо любой другой переменной из множества  $x_1, \dots, x_n$  произвольной булевой константы данная функция становится равна константе  $\alpha$ , откуда вытекает, что  $f \in F_n$ , что и требовалось доказать.

Пусть теперь наборы  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  различаются в каждой из  $i_1$ -й,  $\dots$ ,  $i_s$ -й компонент. Наборы  $\tilde{\pi}$  и  $\tilde{\pi}_1$  различаются хотя бы в одной из этих компонент, поскольку  $f(\tilde{\pi}) \neq f(\tilde{\pi}_1)$ . Пусть они различаются в  $i_q$ -й компоненте,  $q \in \{1, \dots, s\}$ , причём  $i_q$ -е компоненты наборов  $\tilde{\pi}$  и  $\tilde{\pi}_1$  равны  $\pi_q$  и  $\bar{\pi}_q$  соответственно. Тогда  $i_q$ -я компонента набора  $\tilde{\pi}_2$  равна  $\pi_q$ . Аналогично наборы  $\tilde{\pi}$  и  $\tilde{\pi}_2$  различаются в какой-то  $i_t$ -й компоненте,  $t \in \{1, \dots, s\}$ , и их  $i_t$ -е компоненты равны  $\pi_t$  и  $\bar{\pi}_t$  соответственно, где  $\pi_t \in \{0, 1\}$ , а  $i_t$ -я компонента набора  $\tilde{\pi}_1$  равна  $\pi_t$ . При этом  $t \neq q$ , так как в противном случае  $i_q$ -я компонента набора  $\tilde{\pi}_2$  была бы равна одновременно  $\pi_q$  и  $\bar{\pi}_q$ . Составим для наглядности таблицу значений  $i_q$ -й и  $i_t$ -й компонент наборов  $\tilde{\pi}_1$ ,  $\tilde{\pi}_2$  и  $\tilde{\pi}$  (табл. 5).

Т а б л и ц а 5

Наборы	$i_q$	$i_t$
$\tilde{\pi}_1$	$\bar{\pi}_q$	$\pi_t$
$\tilde{\pi}_2$	$\pi_q$	$\bar{\pi}_t$
$\tilde{\pi}$	$\pi_q$	$\pi_t$

Каждая из переменных  $x_{i_q}, x_{i_t}$  обязана подаваться хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы  $S'$ , поскольку  $x_{i_q}, x_{i_t} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$ ; обозначим эти входы через  $v_q$  и  $v_t$  соответственно. Тогда неисправность типа  $\pi_q$  входа  $v_q$  нельзя обнаружить ни на одном из наборов  $\tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}$ , так как их  $i_q$ -е компоненты равны  $\pi_q$ . Значит, данная неисправность должна обнаруживаться на наборе  $\tilde{\pi}_1$ . Отсюда вытекает, что для получающейся функции неисправности  $g_q$  схемы  $S'$  справедливы равенства  $g_q(\tilde{\pi}_1) = \bar{f}(\tilde{\pi}_1) = \bar{\alpha}$ . Если, помимо неисправности типа  $\pi_q$  входа  $v_q$ , в схеме  $S'$  также имеет место неисправность типа  $\pi_t$  входа  $v_t$ , то для получающейся функции неисправности  $g_{qt}$  данной схемы справедливы равенства  $g_{qt}(\tilde{\pi}_1) = g_q(\tilde{\pi}_1) = \bar{\alpha}$ , поскольку на наборе  $\tilde{\pi}_1$  на вход  $v_t$  в случае исправности этого входа и неисправности типа  $\pi_q$  входа  $v_q$  подаётся  $i_t$ -я компонента набора  $\tilde{\pi}_1$ , которая равна  $\pi_t$  и, следовательно, неисправность типа  $\pi_t$  входа  $v_t$  никак не отразится на значении, выдаваемом схемой  $S'$  на этом наборе.

Далее, неисправность типа  $\pi_t$  входа  $v_t$  нельзя обнаружить ни на одном из наборов  $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}$ , так как их  $i_t$ -е компоненты равны  $\pi_t$ . Значит, данная неисправность должна обнаруживаться на наборе  $\tilde{\pi}_2$ . Отсюда вытекает, что для получающейся функции

неисправности  $g_t$  схемы  $S'$  справедливы равенства  $g_t(\tilde{\pi}_2) = \overline{f}(\tilde{\pi}_2) = \bar{\alpha}$ . Если, помимо неисправности типа  $\pi_t$  входа  $v_t$ , в схеме  $S'$  также имеет место неисправность типа  $\pi_q$  входа  $v_q$ , то для получающейся функции неисправности  $g_{qt}$  данной схемы справедливы равенства  $g_{qt}(\tilde{\pi}_2) = g_t(\tilde{\pi}_2) = \bar{\alpha}$ , поскольку на наборе  $\tilde{\pi}_2$  на вход  $v_q$  в случае исправности этого входа и неисправности типа  $\pi_t$  входа  $v_t$  подаётся  $i_q$ -я компонента набора  $\tilde{\pi}_2$ , которая равна  $\pi_q$  и, следовательно, неисправность типа  $\pi_q$  входа  $v_q$  никак не отразится на значении, выдаваемом схемой  $S'$  на этом наборе.

В случае отсутствия неисправностей в схеме  $S'$  на наборе  $\tilde{\pi}$  на входы  $v_q$  и  $v_t$  поступают значения  $\pi_q$  и  $\pi_t$  соответственно, поскольку  $i_q$ -я ( $i_t$ -я) компонента набора  $\tilde{\pi}$  равна  $\pi_q$  (соответственно  $\pi_t$ ). Поэтому одновременная неисправность входа  $v_q$  типа  $\pi_q$  и входа  $v_t$  типа  $\pi_t$  никак не отразится на значении, выдаваемом схемой  $S'$  на указанном наборе. Отсюда следуют равенства  $g_{qt}(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\pi}) = \bar{\alpha}$ .

В итоге получаем, что функция неисправности  $g_{qt}$  схемы  $S'$  принимает значение  $\bar{\alpha}$  на каждом из наборов  $\tilde{\pi}_1$ ,  $\tilde{\pi}_2$  и  $\tilde{\pi}$ , поэтому её нельзя отличить ни на одном из этих наборов от константы  $\bar{\alpha}$ , возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа  $\bar{\alpha}$  на выходе её выходного элемента. С учётом того, что множество  $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}\}$  является  $k$ -диагностическим тестом для схемы  $S'$ , это может быть только в том случае, когда  $g_{qt} \equiv \bar{\alpha}$ .

Заметим, что при подаче на входы схемы  $S'$  произвольного двоичного набора длины  $n$ ,  $i_q$ -я компонента которого равна  $\pi_q$ , а  $i_t$ -я компонента равна  $\pi_t$ , на вход  $v_q$  поступает значение  $\pi_q$ , а на вход  $v_t$  — значение  $\pi_t$ , поэтому функция  $g_{qt}$ , возникающая на выходе схемы при одновременной неисправности входа  $v_q$  типа  $\pi_q$  и входа  $v_t$  типа  $\pi_t$ , на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция  $f$ . С учётом тождества  $g_{qt} \equiv \bar{\alpha}$  получаем, что на любом наборе длины  $n$ ,  $i_q$ -я компонента которого равна  $\pi_q$ , а  $i_t$ -я компонента равна  $\pi_t$ , функция  $f$  принимает значение  $\bar{\alpha}$ . Следовательно, при подстановке вместо переменной  $x_{i_q}$  константы  $\pi_q$ , а вместо переменной  $x_{i_t}$  константы  $\pi_t$  данная функция становится равна константе  $\bar{\alpha}$ , т. е.  $f \in F_n$ , что и требовалось доказать.

Тем самым установлено, что в случае  $n \geq 2$  произвольная булева функция  $f$  от  $n$  переменных, не принадлежащая множеству  $U$ , для которой  $D(f) \leq 3$ , принадлежит множеству  $F_n$ . Среди функций из множества  $U$  могут быть функции  $f$  от  $n$  переменных, для которых  $D(f) \leq 3$  (и даже точно есть — см. леммы 7 и 8), но все они принадлежат  $F_n$ , поскольку  $U \subseteq F_n$  в силу определений этих множеств. Значит, все булевы функции  $f$  от  $n$  переменных, где  $n \geq 2$ , для которых  $D(f) \leq 3$ , принадлежат множеству  $F_n$ .

Оценим величину  $|F_n|$ . Пусть  $F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}$  — подмножество множества  $F_n$ , состоящее из всех булевых функций, каждая из которых при подстановке вместо переменной  $x_i$  константы  $\alpha$ , а вместо переменной  $x_j$  константы  $\beta$ , где  $1 \leq i < j \leq n$ , становится равна константе  $\gamma$ . Любая функция из множества  $F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}$  принимает значение  $\gamma$  на любом из  $2^{n-2}$  двоичных наборов длины  $n$ ,  $i$ -я (слева) компонента которых равна  $\alpha$  и  $j$ -я равна  $\beta$ , а на остальных  $2^n - 2^{n-2}$  наборах может принимать произвольные значения, поэтому  $|F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}| = 2^{2^n - 2^{n-2}}$ . Любая функция из множества  $F_n$  принадлежит множеству  $F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}$  для некоторых  $i, j, \alpha, \beta$  и  $\gamma$ , откуда следуют соотношения

$$F_n \subseteq \bigcup_{\substack{1 \leq i < j \leq n, \\ \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}}} F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma},$$

$$|F_n| \leq \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n, \\ \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}}} |F_{n,i,j}^{\alpha,\beta,\gamma}| = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n, \\ \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}}} 2^{2^n - 2^{n-2}} = C_n^2 \cdot 2^3 \cdot 2^{2^n - 2^{n-2}} = 4n(n-1)2^{2^n - 2^{n-2}},$$

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} \leq \frac{4n(n-1)2^{2^n - 2^{n-2}}}{2^{2^n}} = \frac{4n(n-1)}{2^{2^{n-2}}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

т.е. отношение числа булевых функций из множества  $F_n$  к общему числу булевых функций от  $n$  переменных стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ . В силу доказанного выше это означает, что доля тех булевых функций  $f$  от  $n$  переменных, для которых  $D(f) \leq 3$ , стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, доля тех булевых функций  $f$  от  $n$  переменных, для которых  $D(f) \geq 4$ , стремится к 1 при  $n \rightarrow \infty$ . Осталось заметить, что при  $f \neq 1$  из неравенства  $D(f) \geq 4$  вытекает равенство  $D(f) = 4$  в силу доказанного соотношения  $D(f) \leq 4$  для любой булевой функции  $f$  от  $n$  переменных, кроме константы 1, а  $1 \in F_n$ . ■

**Замечание 3.** Среди всех схем, построенных при доказательстве верхних оценок величин  $D_{k-Д(1)}^{B_6(k)}(f)$ ,  $D_{k-Д(10)}^{B_6(k)}(f)$  и  $D_{k-Д(10)}^{B_6(k)}(n)$  в теоремах 3, 4 и 5 соответственно, элемент «константа 0» использовался только в построении схем, реализующих тождественный нуль,  $\xi$ -элемент — только в построении схем, реализующих не палиндромные функции (теоремы 3 и 5) либо самодвойственные функции (теорема 4), причём не более чем в единственном числе, а  $\eta$ -элемент — только в построении схем, реализующих палиндромные функции (теоремы 3 и 5) либо несамодвойственные функции (теорема 4), причём не более чем в единственном числе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. 1958. Т. 51. С. 270–360.
2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всес. семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 7–12.
3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992. 192 с.
5. Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2013. 77 с.
6. Reddy S. M. Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. V. C-21. No. 11. P. 1183–1188.
7. Sahuja K. K. and Reddy S. M. Fault detecting test sets for Reed-Muller canonic networks // IEEE Trans. Comput. 1975. V. C-24. No. 10. P. 995–998.
8. Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. 2017. Т. 29. Вып. 4. С. 87–105.
9. Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Изв. вузов. Математика. 1988. № 7. С. 57–64.
10. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. 1989. Т. 1. Вып. 3. С. 71–76.
11. Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при константных неисправностях на входах элементов // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1997. № 1. С. 12–18.

12. Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 87. 18 с.
13. Угольников А. Б. Классы Поста: учеб. пособие. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008. 64 с.

## REFERENCES

1. *Chegis I. A. and Yablonskiy S. V.* Logicheskie sposoby kontrolya raboty elektricheskikh skhem [Logical methods of control of work of electric circuits]. Trudy Mat. Inst. Steklov, 1958, vol. 51, pp. 270–360. (in Russian)
2. *Yablonskiy S. V.* Nadezhnost' i kontrol' upravlyayushchikh sistem [Reliability and verification of control systems]. Materialy Vsesoyuznogo seminaru po diskretnoy matematike i ee prilozheniyam (Moscow, 31 Jan.–2 Feb. 1984). Moscow, MSU Publ., 1986, pp. 7–12. (in Russian)
3. *Yablonskiy S. V.* Nekotorye voprosy nadezhnosti i kontrolya upravlyayushchikh sistem [Some questions of reliability and verification of control systems]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, iss. 1, Moscow, Nauka Publ., 1988, pp. 5–25. (in Russian)
4. *Red'kin N. P.* Nadezhnost' i diagnostika skhem [Circuits Reliability and Diagnostics]. Moscow, MSU Publ., 1992. 192 p. (in Russian)
5. *Kolyada S. S.* Verkhnie otsenki dlin proveryayushchikh testov dlya skhem iz funktsional'nykh elementov [Upper bounds on the lengths of fault detection tests for logic networks]. Cand. Sci. Dissertation, MSU, Moscow, 2013. 77 p. (in Russian)
6. *Reddy S. M.* Easily testable realizations for logic functions. IEEE Trans. Comput., 1972, vol. C-21, no. 11, pp. 1183–1188.
7. *Saluja K. K. and Reddy S. M.* Fault detecting test sets for Reed-Muller canonic networks. IEEE Trans. Comput., 1975. vol. C-24, no. 10, pp. 995–998.
8. *Romanov D. S. and Romanova E. Yu.* Metod sinteza neizbytochnykh skhem, dopuskayushchikh edinichnye proveryayushchie testy konstantnoy dliny [Method of synthesis of irredundant circuits allowing single fault detection tests of constant length]. Diskretnaya Matematika, 2017, vol. 29, iss. 4, pp. 87–105. (in Russian)
9. *Red'kin N. P.* O proveryayushchikh testakh dlya skhem pri odnotipnykh konstantnykh neispravnostyakh na vkhodakh elementov [On fault detection tests for logic networks under one-type stuck-at faults at inputs of gates]. Izvestiya Vuzov, Matematika, 1988, no. 7, pp. 57–64. (in Russian)
10. *Red'kin N. P.* O skhemah, dopuskayushchikh korotkie edinichnye diagnosticheskie testy [On circuits allowing short single diagnostic tests]. Diskretnaya Matematika, 1989, vol. 1, iss. 3, pp. 71–76. (in Russian)
11. *Red'kin N. P.* O proveryayushchikh testakh dlya skhem pri konstantnykh neispravnostyakh na vkhodakh elementov [On fault detection tests for logic networks under stuck-at faults at inputs of gates]. Vestnik MSU, Ser. 1, 1997, no. 1, pp. 12–18. (in Russian)
12. *Popkov K. A.* Sintez legkotestiruemykh skhem pri odnotipnykh konstantnykh neispravnostyakh na vkhodakh i vykhodakh elementov [Synthesis of Easily Testable Logic Networks under One-Type Stuck-at Faults at Inputs and Outputs of Gates]. Preprinty IPM im. M. V. Keldysha, 2018, no. 87. 18 p. (in Russian)
13. *Ugol'nikov A. B.* Klassy Posta: uchebnoe posobie [Post Classes: Tutorial]. Moscow, MSU, TsPI Publ., 2008. 64 p. (in Russian)