

УДК 519.17

# ОБ УЛУЧШЕННОЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ ЭКСПОНЕНТОВ ОРГРАФОВ<sup>1</sup>

В. М. Фомичев

*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва, Россия  
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Россия  
Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия*

Способ универсальной оценки экспонента  $n$ -вершинного примитивного орграфа, предложенный А. Далмэджем и Н. Мендельсоном (1964), сохранял до настоящего времени статус наилучшего среди всех известных универсальных оценок. Этот способ использует множество контуров  $\hat{C}$  орграфа, длины которых равны  $l_1, \dots, l_m$ , где  $\text{НОД}(l_1, \dots, l_m) = 1$ , и множество длин кратчайших путей  $\{r_{i,j}(\hat{C}) : 1 \leq i, j \leq n\}$ , проходящих из вершины  $i$  в вершину  $j$  через множество контуров  $\hat{C}$ . Улучшение этого способа использует множество контуров  $\hat{C}$ , где  $\text{НОД}(l_1, \dots, l_m) = d \geq 1$ , и множество длин кратчайших путей  $\{r_{i,j}^{s/d}(\hat{C}) : s = 0, \dots, d-1; 1 \leq i, j \leq n\}$  из вершины  $i$  в вершину  $j$ , проходящих через множество контуров  $\hat{C}$  и образующих полную систему вычетов по модулю  $d$ . Доказана оценка  $\exp \Gamma \leq 1 + \hat{F}(L(\hat{C})) + R(\hat{C})$ , где  $\hat{F}(L) = d \cdot F(l_1/d, \dots, l_m/d)$ ;  $F(a_1, \dots, a_m)$  — число Фробениуса;  $R(\hat{C}) = \max_{(i,j)} \max_s \{r_{i,j}^{s/d}(\hat{C})\}$ . Построен класс орграфов с множеством вершин  $\{0, \dots, 2k-1\}$ ,  $k > 2$ , для которых новая оценка принимает значение  $2k$  при чётных  $k$  и  $2k-1$  при нечётных  $k$ , в то время как оценка Далмэджа и Мендельсона принимает значение  $3k-2$  при чётных  $k$  и  $3k-3$  при нечётных  $k$ .

**Ключевые слова:** число Фробениуса, примитивный граф, экспонент орграфа.

DOI 10.17223/20710410/43/8

## ON IMPROVED UNIVERSAL ESTIMATION OF EXPONENTS OF DIGRAPHS

V. M. Fomichev

*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia  
National Research Nuclear University Moscow Engineering Physics Institute, Moscow, Russia  
The Institute of Informatics Problems of the Federal Research Center  
“Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

E-mail: fomichev.2016@yandex.ru

An improved formula for universal estimation of exponent is obtained for  $n$ -vertex primitive digraphs. A previous formula by A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn (1964) is based on a system  $\hat{C}$  of directed circuits  $C_1, \dots, C_m$ , which are held in a graph and have lengths  $l_1, \dots, l_m$  with  $\text{gcd}(l_1, \dots, l_m) = 1$ . A new formula is based on a similar circuit system  $\hat{C}$ , where  $\text{gcd}(l_1, \dots, l_m) = d \geq 1$ . Also, the new formula uses  $r_{i,j}^{s/d}(\hat{C})$ , that is the length of the shortest path from  $i$  to  $j$  going through the circuit system  $\hat{C}$  and having the length which is comparable to  $s$  modulo  $d$ ,  $s = 0, \dots, d-1$ . It is

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00226.

shown, that  $\exp \Gamma \leq 1 + \hat{F}(L(\hat{C})) + R(\hat{C})$ , where  $\hat{F}(L) = d \cdot F(l_1/d, \dots, l_m/d)$  and  $F(a_1, \dots, a_m)$  is the Frobenius number,  $R(\hat{C}) = \max_{(i,j)} \max_s \{r_{i,j}^{s/d}(\hat{C})\}$ . For some class of  $2k$ -vertex primitive digraphs, it is proved, that the improved formula gives the value of estimation  $2k$ , and the previous formula gives the value of estimation  $3k - 2$ .

**Keywords:** *the Frobenius number, primitive graph, exponent of graph.*

## Введение

Введём основные обозначения:

- $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;
- $\text{НОД}(l_1, \dots, l_m)$  — наибольший общий делитель натуральных чисел  $l_1, \dots, l_m$ ;
- $F(l_1, \dots, l_m)$  — число Фробениуса, где  $\text{НОД}(l_1, \dots, l_m) = 1$ ;
- $M_n^{0,1}$  — множество 0, 1-матриц порядка  $n$ ;
- $\exp \Gamma$  ( $\exp M$ ) — экспонент орграфа  $\Gamma$  (матрицы  $M$ );
- $(i, j)$  — дуга в орграфе, инцидентная вершинам  $i$  и  $j$ ;
- $\text{len } w$  ( $\text{len } C$ ) — длина пути  $w$  (контура  $C$ ), равная числу дуг пути (контура);
- $LW$  — множество длин всех путей из множества путей  $W$ ;
- $w \cdot w'$  — конкатенация путей  $w$  и  $w'$ , где совпадают последняя вершина пути  $w$  и первая вершина пути  $w'$ .

К активно разрабатываемым в комбинаторном анализе объектам относятся неотрицательные матрицы, то есть матрицы, все элементы которых суть неотрицательные действительные числа. Свойство неотрицательности матрицы  $M$  записывают так:  $M \geq 0$ . Матрицу  $M$ , все элементы которой положительные, называют положительной ( $M > 0$ ).

В 1912 г. Ф. Фробениусом [1] был поставлен вопрос для квадратных неотрицательных матриц  $M$ : имеются ли положительные матрицы в циклической полугруппе  $\langle M \rangle$ ? Если имеются, то матрицу называют примитивной, в противном случае — непримитивной. Наименьшее натуральное  $\gamma$ , при котором  $M^\gamma > 0$ , называется экспонентом матрицы  $M$ , обозначается  $\exp M$ . Если матрица  $M$  непримитивная, то положим  $\exp M = \infty$ . В случае примитивной матрицы  $M^{\gamma+i} > 0$  при любом  $i \in \mathbb{N}$ .

Мультипликативная полугруппа всех неотрицательных матриц гомоморфно отображается на полугруппу всех 0, 1-матриц (все элементы суть целые числа 0 или 1) с помощью замены каждого положительного элемента единицей. Этот эпиморфизм согласован со свойством примитивности, то есть прообразом любой примитивной 0, 1-матрицы является класс, состоящий только из примитивных матриц, и прообразом любой непримитивной 0, 1-матрицы — класс, состоящий только из непримитивных матриц. Это свойство позволяет ограничиться исследованием мультипликативных моноидов  $M_n^{0,1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где умножение в  $M_n^{0,1}$  выполняется как обычное умножение целочисленных матриц с последующей заменой положительных элементов единицами.

Множество матриц смежности вершин  $n$ -вершинных ориентированных графов с петлями совпадает с  $M_n^{0,1}$ , это позволяет распространить на орграфы понятия примитивности и экспонента, где умножение орграфов определено как умножение бинарных отношений. Известно, что примитивный граф является сильно связным.

Далее  $M$  — матрица смежности вершин орграфа  $\Gamma$ ;  $\{0, \dots, n-1\}$  — множество вершин  $\Gamma$ . Связь между графами и неотрицательными матрицами устанавливает хорошо известная теорема теории графов (назовем её основной теоремой): число путей длины  $t$  из  $i$  в  $j$  в графе  $\Gamma$  равно  $m_{ij}^{(t)}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , где  $M^t = (m_{ij}^{(t)})$ . Таким образом,

примитивность оргграфа и величина экспонента определяется свойствами путей в графе, в частности  $M > 0$ , если и только если оргграф  $\Gamma$  полный. Далее используется в основном язык теории графов.

Известные оценки экспонентов матриц и оргграфов можно разделить на универсальные и специальные (для частных классов). В данной работе предложена новая формула универсальной оценки экспонента  $n$ -вершинного примитивного оргграфа, улучшающая известную формулу А. Далмэджа и Н. Мендельсона [2].

### 1. Известные универсальные оценки экспонентов

Исторические этапы прогресса в развитии оценок экспонентов матриц и графов отражены в [3]. Приведём самые необходимые сведения для иллюстрации происходивших достижений в части улучшения универсальных оценок.

Критерий примитивности оргграфа  $\Gamma$ , доказанный в 1961 г. П. Перкинсом [4], определяется множеством его контуров. Обозначим  $\hat{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$  множество контуров в  $\Gamma$  длин  $l_1, \dots, l_m$  соответственно, то есть  $L(\hat{C}) = \{l_1, \dots, l_m\}$ . Индексом множества контуров  $\hat{C}$  назовём число  $d = \text{НОД}(l_1, \dots, l_m)$ , обозначается  $\text{ind } \hat{C}$ . Критерий примитивности оргграфа можно сформулировать так: сильносвязный оргграф  $\Gamma$  примитивный, если и только если он содержит множество контуров индекса 1.

Универсальная оценка (без доказательства) экспонента  $n$ -вершинного примитивного оргграфа  $\Gamma$  дана Х. Виландтом [5] в 1950 г.:

$$\exp \Gamma \leq n^2 - 2n + 2. \quad (1)$$

Доказательство оценки (1) представлено в [4, 6]. При  $n > 1$  описаны  $n$ -вершинные оргграфы [7, 2] (названные в [7] в честь Виландта), на которых достигается оценка (1). Эти оргграфы изоморфны, имеют  $n + 1$  дугу и содержат ровно два простых контура длин  $n$  и  $n - 1$ .

В [2] уточнена оценка (1) при известной длине  $l$  контура в оргграфе:

$$\exp \Gamma \leq n + l(n - 2).$$

Формула Далмэджа и Мендельсона для вычисления более точных оценок требует дополнительных определений. Приведём эту формулу и затем усилим её.

Говорят, что «путь проходит через контур», если у пути и контура есть общая вершина. Путь проходит через множество контуров, если он проходит через каждый контур множества.

В оргграфе  $\Gamma$  обозначим:  $\mathcal{C}$  — множество всех простых контуров оргграфа  $\Gamma$ ;  $\mathcal{C}_d$  — класс всех подмножеств индекса  $d$  множества  $\mathcal{C}$ .

Множество  $2^{\mathcal{C}}$  образует решётку относительно теоретико-множественного включения. Единицей решетки является множество  $\mathcal{C}$ , нулём — пустое множество. Если  $\text{ind } \mathcal{C} = d$ , то класс  $\mathcal{C}_d$  является верхней подполурешеткой решетки  $2^{\mathcal{C}}$ .

Пусть в оргграфе  $\Gamma$   $r_{i,j}(\hat{C})$  — длина кратчайшего пути из  $i$  в  $j$ , проходящего через множество контуров  $\hat{C}$  индекса 1,  $r(\hat{C}) = \max_{0 \leq i, j \leq n-1} r_{i,j}(\hat{C})$ , тогда [2]

$$\exp \Gamma \leq 1 + F(L(\hat{C})) + r(\hat{C}), \quad (2)$$

где  $F(L(\hat{C}))$  — число Фробениуса для аргументов  $l_1, \dots, l_m$  (наибольшее целое число, не принадлежащее аддитивной полугруппе  $\langle l_1, \dots, l_m \rangle$ ). Так как оценка (2) верна для любого множества контуров  $\hat{C}$  индекса 1, то [3]

$$\exp \Gamma \leq 1 + \min_{\hat{C} \in \mathcal{C}_1} \{F(L(\hat{C})) + r(\hat{C})\}. \quad (3)$$

Технические трудности вычисления оценок (2) и (3) в общем случае состоят в определении числа Фробениуса  $F(L(\hat{C}))$  и величины  $r(\hat{C})$ . При  $m > 2$  для общего вида множества  $L(\hat{C})$  не существует формулы числа Фробениуса, выраженной с помощью только арифметических операций над аргументами. Вместе с тем проблема вычисления  $F(L(\hat{C}))$  в целом решена, различные алгоритмы и формулы, использующие теоретико-множественные операции, изложены в [8, 9]. Что касается величины  $r(\hat{C})$ , то получены несколько её оценок через  $n$  и числа  $l_1, \dots, l_m$ . Например, с использованием (2) получена оценка [10, ч. 1, с. 185]

$$\exp \Gamma \leq n(m+1) + F(L(\hat{C})) - l_1 - \dots - l_m. \quad (4)$$

С учётом структурных свойств множества  $\hat{C}$  оценка (4) улучшена [11, с. 80]. Обозначим  $\Gamma(\hat{C}) = C_1 \cup \dots \cup C_m$  — часть орграфа  $\Gamma$ , где  $l_1 \leq \dots \leq l_m$ . Если орграф  $\Gamma(\hat{C})$  сильносвязный, то он содержит контур  $Z$ , проходящий через множество контуров  $\hat{C}$  и проходящий через каждую дугу столько раз, сколько контуров множества  $\hat{C}$  содержат эту дугу. Контур  $Z$  в общем случае определён неоднозначно и называется квазиэйлеровым  $\hat{C}$ -контуром, его длина определена однозначно:  $\text{len } Z = l_1 + \dots + l_m$ . Пусть орграф  $\Gamma(\hat{C})$  имеет компоненты связности  $\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_r$ ,  $1 \leq r \leq m$ , содержащие независимые квазиэйлеровы контуры  $Z_1, \dots, Z_r$  длин  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  соответственно. Полагая без ущерба для общности  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$ , получаем оценку

$$\exp \Gamma \leq n(r+1) + F(L(\hat{C})) - \sum_{j=1}^r (l_j + (j-1)\lambda_j). \quad (5)$$

В частности, если орграф  $\Gamma(\hat{C})$  связный, то

$$\exp \Gamma \leq 2n - l_1 + F(L(\hat{C})).$$

Таким образом, (5) следует из (2) и использует наилучшую на сегодняшний день универсальную оценку величины  $r(\hat{C})$  для примитивных орграфов.

## 2. Улучшение универсальной оценки экспонента орграфа

Для улучшения оценки (3) использовано понятие локального экспонента орграфа. Орграф  $\Gamma$  называется  $(i, j)$ -примитивным,  $0 \leq i, j \leq n-1$ , если при некотором  $\gamma \in \mathbb{N}$  для любого  $t \geq \gamma$  в орграфе  $\Gamma$  имеется путь длины  $t$  из вершины  $i$  в вершину  $j$ . Наименьшее такое  $\gamma$  называется  $(i, j)$ -экспонентом орграфа  $\Gamma$  и обозначается  $(i, j)$ -exp  $\Gamma$ . Примитивный орграф  $\Gamma$  является  $(i, j)$ -примитивным для любых  $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$  и

$$\exp \Gamma = \max_{(i,j)} (i, j)\text{-exp } \Gamma.$$

Оценим  $(i, j)$ -exp  $\Gamma$  примитивного орграфа  $\Gamma$ . Пусть  $w = (i_0, i_1, \dots, i_t)$  — путь в орграфе  $\Gamma$ , проходящий через множество контуров  $\hat{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ . Путь  $e(w)$  называется  $\hat{C}$ -расширением пути  $w$ :

$$e(w) = k_{0,1}C_1(i_0) \dots k_{0,m}C_m(i_0) \cdot (i_0, i_1) \cdot k_{1,1}C_1(i_1) \dots (i_{t-1}, i_t) k_{t,1}C_1(i_t) \dots k_{t,m}C_m(i_t). \quad (6)$$

Здесь  $k_{u,v} = 0$ , если вершина  $i_u$  не принадлежит контуру  $C_v$ , в противном случае  $k_{u,v} \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 \leq u \leq t$ ,  $1 \leq v \leq m$ ;  $kC(j)$  есть  $k$ -кратно пройденный из вершины  $j$  контур  $C$ , если  $j$  лежит на контуре  $C$ , и есть пустой контур в противном случае. Все дуги

пути  $w$  являются дугами пути  $e(w)$  и порядок их следования в пути  $e(w)$  сохраняется. Начальные (и конечные) вершины путей  $w$  и  $e(w)$  совпадают в силу определения расширения пути.

Обозначим  $S + S' = \{s + s' : s \in S, s' \in S'\}$ , где  $S, S' \subseteq \mathbb{N}$ , в частности  $r + S = \{r\} + S$  для  $r \in \mathbb{N}$ ;  $E(\hat{C}, w)$  — множество всех  $\hat{C}$ -расширений пути  $w$ ;  $W(i, \hat{C}, j)$  — множество путей из  $i$  в  $j$ , проходящих через множество контуров  $\hat{C}$ . Путь  $w$  является тривиальным расширением самого себя.

**Лемма 1.** Пусть  $\text{ind } \hat{C} = d \geq 1$  и  $L(\hat{C}) = \{l_1, \dots, l_m\}$ , тогда:

- а)  $\text{len } w \equiv \text{len } e(w) \pmod{d}$  для любого  $\hat{C}$ -расширения  $e(w)$  пути  $w$ ;
- б)  $LE(\hat{C}, w) = \{\text{len } w + \langle l_1, \dots, l_m \rangle\}$ , где  $\langle l_1, \dots, l_m \rangle$  — аддитивная полугруппа, порождённая множеством чисел  $\{l_1, \dots, l_m\}$ .

**Доказательство.** Из равенства (6) следует, что

$$\text{len } e(w) - \text{len } w = \sum_{u=0}^t \sum_{v=1}^m k_{u,v} l_v,$$

где  $k_{u,v}$  — кратность прохождения контура длины  $l_v$ . Все слагаемые суммы в правой части равенства и, значит, сумма в целом кратны  $d$ , то есть сравнение верно.

Если вершина  $i_u$  принадлежит контуру  $C_v$ , то, варьируя всевозможные целые неотрицательные значения  $k_{u,v}$ , получаем из последнего равенства выражение для множества  $LE(\hat{C}, w)$ . ■

Для множества натуральных чисел  $L = \{l_1, \dots, l_m\}$ , где  $\text{НОД}(L) = d$ , обозначим  $\hat{F}(L)$  число  $d \cdot F(l_1/d, \dots, l_m/d)$ . Заметим, что  $\hat{F}(L) = F(L)$  при  $d = 1$ .

**Следствие 1.** Множество  $LE(\hat{C}, w)$  содержит все числа, сравнимые с  $\text{len } w$  по модулю  $d$  и превышающие  $\text{len } w + \hat{F}(L(\hat{C}))$ , то есть числа вида  $\text{len } w + \hat{F}(L(\hat{C})) + kd$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** Следует из определения чисел Фробениуса и чисел  $\hat{F}$ . ■

Пусть  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{Z}$ . Множество  $Y$ , содержащее полную систему вычетов по модулю  $d$ , называется  $d$ -полным. Любое непустое множество целых чисел является 1-полным.

**Лемма 2.** Если орграф  $\Gamma$  примитивный, то множество  $LW(i, \hat{C}, j)$  является  $d$ -полным при любых  $i, j \in \mathbb{Z}_n$  и любом множестве контуров  $\hat{C}$  индекса  $d \geq 1$ .

**Доказательство.** В силу примитивности в  $\Gamma$  имеются пути  $w_l(i, u)$  из вершины  $i$  в вершину  $u$  длин  $l = \gamma, \gamma + 1, \dots, \gamma + d - 1$ , где  $\gamma = \text{exp } \Gamma$ . Так как  $\Gamma$  сильносвязный, то в  $\Gamma$  имеется путь  $w$  из  $u$  в  $j$ , проходящий через множество контуров  $\hat{C}$  индекса  $d$ . Следовательно,  $W = \{w_l(i, u) \cdot w : l = \gamma, \gamma + 1, \dots, \gamma + d - 1\}$  есть множество путей из  $i$  в  $j$ , проходящих через множество контуров  $\hat{C}$  индекса  $d$ , и множество  $LW$  является  $d$ -полным. ■

Обозначим  $r_{i,j}^{s/d}(\hat{C})$  — длина кратчайшего пути  $w$  из  $i$  в  $j$ , проходящего через множество контуров  $\hat{C}$ , при условии, что  $\text{len } w \equiv s \pmod{d}$ ,  $s = 0, \dots, d - 1$  (в силу леммы 2 такие пути в  $\Gamma$  имеются);  $R_{i,j}(\hat{C}) = \max\{r_{i,j}^{0/d}(\hat{C}), \dots, r_{i,j}^{d-1/d}(\hat{C})\}$ ;  $R(\hat{C}) = \max_{(i,j)} R_{i,j}(\hat{C})$ .

Заметим, что  $r_{i,j}(\hat{C}) = \min\{r_{i,j}^{0/d}(\hat{C}), \dots, r_{i,j}^{d-1/d}(\hat{C})\}$ .

**Теорема 1.** Для любого непустого множества контуров  $\hat{C}$  индекса более 1

$$\begin{aligned}(i, j)\text{-exp } \Gamma &\leq 1 + \hat{F}(L(\hat{C})) + R_{i,j}(\hat{C}), \\ \text{exp } \Gamma &\leq 1 + \hat{F}(L(\hat{C})) + R(\hat{C}).\end{aligned}$$

**Доказательство.** Для множества путей  $W(i, \hat{C}, j)$ , где  $\text{ind } \hat{C} = d$ , имеем разбиение

$$W(i, \hat{C}, j) = W_0(i, \hat{C}, j) \cup \dots \cup W_{d-1}(i, \hat{C}, j), \quad (7)$$

где  $W_s(i, \hat{C}, j)$  — множество всех путей из  $i$  в  $j$ , проходящих через множество контуров  $\hat{C}$ , длина которых сравнима с  $s$  по модулю  $d$ ,  $s = 0, \dots, d-1$ . По лемме 2 множество  $LW(i, \hat{C}, j)$  является  $d$ -полным, значит, в  $W_s(i, \hat{C}, j)$  есть путь  $w_s$  длины  $r_{i,j}^{s/d}(\hat{C})$ , и в силу леммы 1 длина любого  $\hat{C}$ -расширения пути  $w_s$  сравнима с  $r_{i,j}^{s/d}(\hat{C})$  по модулю  $d$ . Наибольшее целое число, сравнимое с  $s$  по модулю  $d$  и не входящее в  $LW_s$ , в силу следствия 1 не превышает  $r_{i,j}^{s/d}(\hat{C}) + \hat{F}(L(\hat{C}))$ ,  $s = 0, \dots, d-1$ . Следовательно, в соответствии с разбиением (7) наибольшее натуральное число, не входящее в  $LW(i, \hat{C}, j)$ , не превышает  $R_{i,j}(\hat{C}) + \hat{F}(L(\hat{C}))$ . Отсюда получаем оценки для  $(i, j)$ -exp  $\Gamma$  и exp  $\Gamma$ . ■

**Следствие 2.** Для любого примитивного орграфа  $\Gamma$

$$\text{exp } \Gamma \leq 1 + \min_{\emptyset \neq \hat{C} \subseteq \mathcal{C}} \{ \hat{F}(L(\hat{C})) + R(\hat{C}) \}. \quad (8)$$

**Доказательство.** Следует из (7) для любого непустого множества  $\hat{C} \subseteq \mathcal{C}$ . ■

**Замечание 1.** Оценка (8) уточняет оценку (3) на множестве примитивных орграфов: если  $\text{ind } \hat{C} = 1$  в орграфе  $\Gamma$ , то  $F(L(\hat{C})) = \hat{F}(L(\hat{C}))$ ,  $r(\hat{C}) = R(\hat{C})$ , то есть оценки совпадают. Уточнение возможно, если  $\text{ind } \hat{C} > 1$ .

Покажем, что существует бесконечный класс орграфов, для которого оценки (8) и (3) существенно отличаются.

**Теорема 2.** Пусть множество вершин орграфа  $\Gamma$  есть  $\{0, 1, \dots, 2k-1\}$ ,  $k > 1$ , множество дуг содержит дуги контуров  $C_0 = (k-1, 2k-1)$ ,  $C_1 = (0, \dots, k-2, 2k-1)$ ,  $C_2 = (k-1, \dots, 2k-2)$  и ещё дуги  $(k-2, k-1)$  и  $(2k-2, 2k-1)$  (рис. 1). Тогда для орграфа  $\Gamma$ :

- оценка (3) принимает значение  $3k-2$  при чётных  $k$  и  $3k-3$  при нечётных  $k$ ;
- оценка (8) принимает значение  $2k$  при чётных  $k$  и  $2k-1$  при нечётных  $k$ .

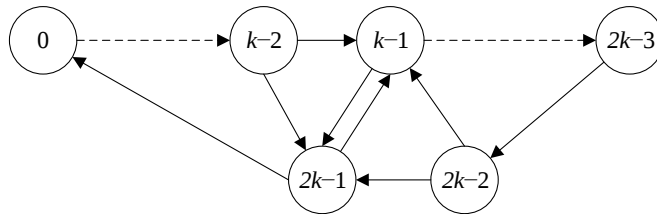


Рис. 1. Орграф  $\Gamma$

**Доказательство.** По условию множество простых контуров орграфа  $\Gamma$  есть  $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ , где  $C_3 = (0, \dots, k-2, k-1, 2k-1)$ ,  $C_4 = (k-1, \dots, 2k-2, 2k-1)$  и  $C_5$  есть гамильтонов контур  $(0, 1, \dots, 2k-1)$ . Множество длин всех простых контуров есть  $L(\mathcal{C}) = \{2, k, k+1, 2k\}$ ,  $\text{ind } \mathcal{C} = 1$ .

Пусть  $\hat{C} \subseteq \mathcal{C}$ . При нечётном  $k$   $\text{ind } \hat{C} = 1$ , если и только если  $\{2, k\} \subseteq L(\hat{C})$  или  $\{k, k+1\} \subseteq L(\hat{C})$ . Отсюда класс  $\mathcal{C}_1$  состоит из 42 множеств:  $\{C_0, C_1\}, \{C_0, C_2\}, \{C_1, C_3\}, \{C_1, C_4\}, \{C_2, C_3\}, \{C_2, C_4\}, \{C_0, C_1, C_2\}, \{C_0, C_1, C_3\}, \{C_0, C_1, C_4\}, \{C_0, C_1, C_5\}, \{C_0, C_2, C_3\}, \{C_0, C_2, C_4\}, \{C_0, C_2, C_5\}, \{C_1, C_2, C_3\}, \{C_1, C_2, C_4\}, \{C_1, C_3, C_4\}, \{C_1, C_3, C_5\}, \{C_1, C_4, C_5\}, \{C_2, C_3, C_4\}, \{C_2, C_3, C_5\}, \{C_2, C_4, C_5\}, \{C_0, C_1, C_2, C_3\}, \{C_0, C_1, C_2, C_4\}, \{C_0, C_1, C_2, C_5\}, \{C_0, C_1, C_3, C_4\}, \{C_0, C_1, C_3, C_5\}, \{C_0, C_1, C_4, C_5\}, \{C_0, C_2, C_3, C_4\}, \{C_0, C_2, C_3, C_5\}, \{C_0, C_2, C_4, C_5\}, \{C_0, C_3, C_4, C_5\}, \{C_1, C_2, C_3, C_4\}, \{C_1, C_2, C_3, C_5\}, \{C_1, C_3, C_4, C_5\}, \{C_2, C_3, C_4, C_5\}$ ;  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_r$ ,  $r = 0, \dots, 5$ .

При чётном  $k$  имеем:  $\text{ind } \hat{C} = 1$ , если и только если  $\{2, k+1\} \subseteq L(\hat{C})$  или  $\{k, k+1\} \subseteq L(\hat{C})$ . Класс  $\mathcal{C}_1$  состоит из 42 множеств, полученных из предыдущего списка с помощью взаимной замены  $C_1 \leftrightarrow C_3$  и  $C_2 \leftrightarrow C_4$ .

Покажем, что в оргграфе  $\Gamma$  величина  $F(L(\hat{C})) + R(\hat{C})$  принимает наименьшее значение при  $\hat{C} = \mathcal{C}$ . Обозначим через  $\rho(i, j)$  длину кратчайшего пути из  $i$  в  $j$ . Заметим, что

$$\max_{0 \leq i, j \leq 2k-1} \rho(i, j) = \rho(0, 2k-2) = \rho(k, k-2) = 2k-2.$$

Кратчайшие пути  $w = (0, \dots, 2k-2)$  и  $w' = (k, \dots, k-2)$  суть части гамильтонова контура и проходят через вершины  $k-1$  и  $2k-1$  соответственно. Значит, через любое множество контуров индекса 1 проходит либо  $w$ , либо  $w'$ . Отсюда  $r(\hat{C}) = 2k-2$  для любого  $\hat{C} \in \mathcal{C}_1$ .

В силу определения числа Фробениуса  $F(L) \leq F(L')$  при  $\text{НОД}(L') = \text{НОД}(L) = 1$ , если  $L' \subseteq L$ . Следовательно,  $F(L(\hat{C})) \geq F(L(\mathcal{C})) = F(2, k, k+1, 2k)$  для любого множества  $\hat{C}$  индекса 1. Отсюда получаем значение оценки (3), так как  $F(L(\mathcal{C})) = F(2, k) = k-2$  при нечётных  $k$  и  $F(L(\mathcal{C})) = F(2, k+1) = k-1$  при чётных  $k$ .

Вычислим оценку экспонента (8) с использованием одноэлементного множества контуров  $\hat{C} = \{C_0\}$  индекса 2. Оценим величину  $R(C_0) = \max_{0 \leq i, j \leq 2k-1} \max\{r_{i,j}^{0/2}(C_0), r_{i,j}^{1/2}(C_0)\}$ .

Множество длин путей из  $2k-1$  в  $2k-2$  является 2-полным. При нечётных  $k$  кратчайшие пути  $w$  и  $w'$ , проходящие через контур  $C_0$ , длины которых соответственно нечётная и чётная, имеют вид  $w = (2k-1, k-1, k, \dots, 2k-2)$ ,  $w' = C_1(2k-1) \cdot w$ , где  $C_1(2k-1)$  — контур  $C_1$ , пройденный из вершины  $2k-1$ . Отсюда  $R(C_0) = R_{2k-1, 2k-2}(C_0) = \max\{\text{len } w, \text{len } w'\} = 2k$ .

При чётных  $k$  кратчайшие пути  $w$  и  $w'$ , проходящие через контур  $C_0$ , длины которых соответственно чётная и нечётная, имеют вид  $w = (2k-1, k-1, k, \dots, 2k-2)$ ,  $w' = C_3(2k-1) \cdot w$ , где  $C_3(2k-1)$  — контур  $C_3$ , пройденный из вершины  $2k-1$ . Значит,  $R(C_0) = R_{2k-1, 2k-2}(C_0) = \max\{\text{len } w, \text{len } w'\} = 2k+1$ . Так как  $\hat{F}(C_0) = \hat{F}(2) = -2$ , то в обоих случаях имеем нужные значения оценки (8). ■

**Пример 1.** В таблице приведены экспоненты оргграфов из теоремы 2 и значения их оценок (3) и (8) при  $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

**Значения экспонентов и оценок для оргграфов из теоремы 2**

| Число вершин оргграфа $2k$ | Оценка (3) $\text{exp } \Gamma$ | Оценка (8) $\text{exp } \Gamma$ для контура $C_0$ | $\text{exp } \Gamma$ |
|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------|
| 4                          | 4                               | 4                                                 | 4                    |
| 6                          | 6                               | 5                                                 | 5                    |
| 8                          | 10                              | 8                                                 | 8                    |
| 10                         | 12                              | 9                                                 | 9                    |
| 12                         | 16                              | 12                                                | 11                   |
| 14                         | 18                              | 13                                                | 13                   |

Нерешённая задача: описание множества примитивных  $n$ -вершинных орграфов, для которых оценка (3) допускает улучшение типа оценки (8) с использованием множества контуров индекса  $d > 1$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Frobenius F. G.* Über Matrizen aus nicht negativen Elementen // Sitzungsber K. Preuss. Akad. Wiss. 1912. P. 456–477.
2. *Dulmage A. L. and Mendelsohn N. S.* Gaps in the exponent set of primitive matrices // Illinois J. Math. 1964. No. 8. P. 642–656.
3. *Фомичев В. М., Аvezова Я. Э., Коренева А. М., Кязжин С. Н.* Примитивность и локальная примитивность орграфов и неотрицательных матриц // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25. № 3. С. 95–125.
4. *Perkins P.* A theorem on regular graphs // Pacific J. Math. 1961. V. II. P. 1529–1533.
5. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. No. 52. P. 642–648.
6. *Holladay J. C. and Varga R. S.* On powers of non-negative matrices // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. IX. P. 631.
7. *Фомичев В. М.* Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2(12). С. 101–112.
8. *Фомичев В. М.* О вычислительной сложности оригинальной и расширенной диофантовой проблемы Фробениуса // Дискретный анализ и исследование операций. 2017. Т. 24. № 3. С. 104–124.
9. *Alfonsin J. R.* The Diophantine Frobenius Problem. Oxford: Oxford University Press, 2005.
10. *Фомичев В. М., Мельников Д. А.* Криптографические методы защиты информации. Ч. 1. Математические аспекты. М.: Изд-во «ЮРАЙТ», 2016. 209 с.
11. *Фомичев В. М.* Новая универсальная оценка экспонентов графов // Прикладная дискретная математика. 2016. № 3(33). С. 78–84.

### REFERENCES

1. *Frobenius F. G.* Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. Sitzungsber K. Preuss. Akad. Wiss., 1912, pp. 456–477.
2. *Dulmage A. L. and Mendelsohn N. S.* Gaps in the exponent set of primitive matrices. Illinois J. Math., 1964, no. 8, pp. 642–656.
3. *Fomichev V. M., Avezova Y. E., Koreneva A. M., and Kyazhin S. N.* Primitivnost' i lokal'naya primitivnost' orgrafov i neotritsatel'nykh matrity [Primitivity and local primitivity of digraphs and non-Negative matrices]. Diskretnyy Analiz i Issledovanie Operatsiy, 2018, vol. 25, no. 3, pp. 95–125. (in Russian)
4. *Perkins P.* A theorem on regular graphs. Pacific J. Math., 1961, vol. II, pp. 1529–1533.
5. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen. Math. Zeitschr., 1950, no. 52, pp. 642–648.
6. *Holladay J. C. and Varga R. S.* On powers of non-negative matrices. Proc. Amer. Math. Soc., 1958, vol. IX, pp. 631.
7. *Fomichev V. M.* Otsenki eksponentov primitivnykh grafov [The estimates of exponents for primitive graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 2(12), pp. 101–112. (in Russian)
8. *Fomichev V. M.* O vychislitel'noy slozhnosti original'noy i rasshirennoy diofantovoy problemy Frobeniusa [Computational complexity of the original and extended Diophantine Frobenius problem]. Diskretnyy Analiz i Issledovanie Operatsiy, 2017, vol. 24, no. 3, pp. 104–124. (in Russian)
9. *Alfonsin J. R.* The Diophantine Frobenius Problem. Oxford, Oxford University Press, 2005.

- 
10. *Fomichev V. M. and Mel'nikov D. A.* Kriptograficheskie metody zashchity informatsii. Ch. 1. Matematicheskie aspekty [Cryptographic Methods of Information Security. P. 1. Mathematical Aspects]. Moscow, YuRAYT Publ., 2016. 209 p. (in Russian)
  11. *Fomichev V. M.* Novaya universal'naya otsenka eksponentov grafov [The new universal estimation for exponents of graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2016, no. 3(33), pp. 78–84. (in Russian)