МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2019 **№ 59**

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417
Электронный адрес: http://vestnik.tsu.ru/mathematics
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

MATHEMATICS

MECHANICS

МАТЕМАТИКА

УДК 512.54 MSC 15A23
DOI 10.17223/19988621/59/1

М.Н. Зонов, Е.А. Тимошенко

О СТАНДАРТНОЙ ФОРМЕ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы подкольцо поля рациональных чисел имело единственную стандартную форму (в смысле Кона). Аналогичный критерий получен для факторколец кольца целых чисел.

Ключевые слова: *матрица*, *стандартная форма*, *полная линейная группа.*

В 1966 году Кон опубликовал статью [1], посвящённую (2×2)-матрицам, элементы которых принадлежат какому-либо кольцу с единицей. Повышенное внимание к матрицам порядка 2 объяснялось тем, что в строении группы обратимых $(n\times n)$-матриц имеются серьёзные различия между случаями $n=2$ и $n>2$. В этой статье было установлено, в частности, что при выполнении определённых требований, касающихся единственности представления матриц в стандартной форме, можно многое сказать о свойствах инволюций рассматриваемой группы.

С другой стороны, инволюции служат полезным инструментом при изучении групп автоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения и периодических абелевых групп. В связи с этим важно получить ответ на вопрос, будут ли удовлетворять указанным Коном требованиям подкольца поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ и факторкольца кольца целых чисел $\mathbf{Z}$.

Всюду ниже R – ассоциативное кольцо с единицей. Через $U(R)$ будет обозначаться множество всех обратимых элементов этого кольца; через $GL_2(R)$ – группа обратимых (2×2)-матриц с элементами из R (хорошо известно, что в случае коммутативного кольца R группа $GL_2(R)$ состоит из матриц, у которых определители принадлежат $U(R)$, см. [2]).

Определение 1 [1]. Пусть $C\in GL_2(R)$. Будем называть *стандартной формой* матрицы C всякую запись этой матрицы в виде

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_t & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $t\geq 0$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\alpha,\beta\in U(R)$;

2) если $1<i<t$, то $a_i\notin U(R)\cup\{0\}$;

3) если $t=2$, то a_1 и a_2 не могут быть равны 0 одновременно.

Введём для удобства обозначения:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ Y(a)=\begin{pmatrix}a & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ T_{12}(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ T_{21}(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}.$$

[1] Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 1.13557.2019/13.1).

Пусть $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел. Для всякого множества $L \subset \mathbf{P}$ будем обозначать через $\mathbf{Q}^{(L)}$ подкольцо поля $\mathbf{Q}$, порождённое элементом 1 и элементами вида p^{-1}, где $p \in L$. Нас интересует случай, когда R либо является подкольцом в $\mathbf{Q}$ (т.е. когда R совпадает с одним из колец $\mathbf{Q}^{(L)}$), либо имеет вид $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, где $n > 1$.

Всякое число $a \in \mathbf{Q}^{(L)} \setminus \{0\}$ может быть единственным образом записано в виде $a = u(a)e(a)$, где $u(a)$ – обратимый элемент кольца $\mathbf{Q}^{(L)}$, а $e(a)$ представляет собой произведение конечного числа сомножителей, взятых из $\mathbf{P} \setminus L$ (возможен случай $e(a) = 1$). Функция e: $\mathbf{Q}^{(L)} \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$ является *евклидовой нормой* в том смысле, что для любых $a, b \in \mathbf{Q}^{(L)} \setminus \{0\}$ выполнены два условия:

1) если a делится на b в кольце $\mathbf{Q}^{(L)}$, то $e(a) \ge e(b)$;

2) найдутся числа $q, r \in \mathbf{Q}^{(L)}$ такие, что $a = qb + r$ и либо $r = 0$, либо $e(r) < e(b)$.

Если $R = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, то введём функцию e: $R \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$, полагая $e(k + n\mathbf{Z}) = k$ для всех $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ (при $n > 2$ эта функция уже не будет евклидовой нормой).

Хорошо известно, что следующая операция:

$$\text{прибавление к } j\text{-му столбцу матрицы } C \\ \text{её } i\text{-го столбца, домноженного на элемент } a, \qquad (2)$$

фактически представляет собой домножение матрицы C справа на матрицу $T_{ij}(a)$. Зафиксируем произвольную матрицу $C \in GL_2(R)$, где R – подкольцо поля $\mathbf{Q}$ либо одно из колец $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Среди всех матриц, которые можно получить из C, применяя операции вида (2), выберем матрицу $B = (b_{ij})$ со следующими свойствами:

I. Число нулевых элементов в B является максимально возможным.

II. Наименьшее из значений функции e, принимаемых на множестве отличных от 0 элементов матрицы B, является минимально возможным (среди всех матриц, удовлетворяющих условию I).

Предположим, что в матрице B нет нулевых элементов. Пусть b_{ij} – тот из элементов этой матрицы, для которого значение $e(b_{ij})$ минимально. Найдутся $q, r \in R$ такие, что $b_{i,\,3-j} = qb_{ij} + r$ и либо $r = 0$, либо $e(r) < e(b_{ij})$. Если прибавить к $(3-j)$-му столбцу матрицы B её j-й столбец, домноженный на $-q$, то мы получим матрицу, имеющую на пересечении i-й строки и $(3-j)$-го столбца элемент r, что, очевидно, противоречит выбору матрицы B.

Предположим теперь, что B содержит ровно один нулевой элемент (пусть это будет b_{ij}). Так как $B \in GL_2(R)$, то $b_{3-i,\,j} \in U(R)$. Прибавляя к $(3-j)$-му столбцу матрицы B её j-й столбец, домноженный на $-b_{3-i,\,3-j}/b_{3-i,\,j}$, придём к матрице с двумя нулевыми элементами, что вновь противоречит выбору B.

Поскольку в B не может быть нулевых столбцов, мы получаем, что матрица B содержит ровно два нулевых элемента, которые могут стоять либо на побочной, либо на главной диагонали. В первом случае B является диагональной матрицей; во втором случае для некоторых $\alpha, \beta \in U(R)$ имеем $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ и, значит,

$$B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Тем самым показано, что любую матрицу $C \in GL_2(R)$ можно превратить в диагональную путём домножения справа на подходящие матрицы вида $T_{ij}(a)$. Так как $(T_{12}(a))^{-1} = T_{12}(-a) = -Y(a)Y(0)$ и $(T_{21}(a))^{-1} = T_{21}(-a) = -Y(0)Y(-a)$, мы можем сделать вывод, что матрица C имеет вид (1) (пока без ограничений на элементы a_i). Далее (см. [1]), из соотношений

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -E\,,\ \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\alpha^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b-\alpha^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha a\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(для обратимого элемента α) следует, что для всякой матрицы из $GL_2(R)$ найдётся хотя бы одна стандартная форма.

Если R – произвольное кольцо, то множество всех обладающих хотя бы одной стандартной формой матриц составляет подгруппу группы $GL_2(R)$, обозначаемую через $GE_2(R)$ (см. [1]).

Определение 2 [1]. Будем говорить, что кольцо R:

– имеет *единственную стандартную форму* для GE_2, если стандартная форма единственна для всякой матрицы $C \in GE_2(R)$;

– *квазисвободно* для GE_2, если матрица E обладает единственной стандартной формой (в которой $t=0$ и $\alpha=\beta=1$).

Из определения вытекает, что если кольцо имеет единственную стандартную форму для GE_2, то оно квазисвободно для GE_2.

Длиной стандартной формы (1) будем называть число t. Выпишем общий вид матриц, обладающих стандартной формой длины 1 или 2:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} Y(a_1) = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} Y(a_1)Y(a_2) = \begin{pmatrix} \alpha a_1 a_2 - \alpha & \alpha a_1 \\ -\beta a_2 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что если для матрицы $C=(c_{ij})$ существует стандартная форма длины <3, то эта стандартная форма восстанавливается однозначно:

– если $c_{22}=0$, то $t=1$, $\alpha=c_{12}$, $\beta=-c_{21}$ и $a_1=\alpha^{-1}c_{11}$;

– если $c_{22}\neq 0$ и $c_{12}=c_{21}=0$, то $t=0$, $\alpha=c_{11}$ и $\beta=c_{22}$;

– если $c_{22}\neq 0$ и хотя бы один из элементов c_{12} и c_{21} не равен 0, то $t=2$, $\beta=-c_{22}$, $a_2=(c_{22})^{-1}c_{21}$, $\alpha=c_{12}a_2-c_{11}$ и $a_1=\alpha^{-1}c_{12}$.

Если R – тело, то $U(R)\cup\{0\}=R$, а следовательно, стандартная форма в $GL_2(R)$ не может иметь длину >2. Отсюда с учётом сказанного выше вытекает

Утверждение 3. Все тела имеют единственную стандартную форму для GE_2.

Следующий результат (он был установлен в [1] для произвольного дискретно нормированного кольца) для полноты изложения приведём с доказательством.

Теорема 4 [1]. Кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$ квазисвободно для GE_2.

Доказательство. Выше было показано, что никакая матрица не может иметь более одной стандартной формы длины <3. Предположим, что матрица E имеет стандартную форму (1), причём $t\geq 3$. Очевидно, что тогда числа $a_2, a_3, \ldots, a_{t-1} \in \mathbf{Z}$ по абсолютной величине не меньше 2.

Введём обозначения $z_{-1}=0$, $z_0=1$, $z_{i+1}=z_i a_{i+1}-z_{i-1}$. Несложно показать по индукции, что первая строка матрицы $Y(a_1)Y(a_2)\ldots Y(a_i)$ имеет вид (z_i, z_{i-1}). Докажем индукцией по i, что $|z_i|\geq|z_{i-1}|$, если $1<i\leq t-1$.

При $i=2$ нам необходимо показать, что $|z_2|\geq|z_1|$, т.е. что $|a_1a_2-1|\geq|a_1|$. Случай $a_1=0$ очевиден; если же $a_1\neq 0$, то требуемое неравенство следует из соотношений $1+|a_1a_2-1|\geq|a_1a_2|\geq 2|a_1|\geq 1+|a_1|$. Допустим теперь, что выполняется неравенство $|z_i|\geq|z_{i-1}|$, где $1<i<t-1$. Тогда

$$|z_{i+1}|+|z_{i-1}|=|z_i\,a_{i+1}-z_{i-1}|+|z_{i-1}|\geq|z_i\,a_{i+1}|\geq 2|z_i|\geq|z_i|+|z_{i-1}|,$$

откуда получаем $|z_{i+1}|\geq|z_i|$. Индукция завершена.

Так как $|a_2|\geq 2$, то $z_2=a_1a_2-1\neq 0$, а значит, $|z_{t-1}|\geq\ldots\geq|z_3|\geq|z_2|>0$. Таким образом, в правом верхнем углу задаваемой выражением (1) матрицы стоит отличный от 0 элемент $\alpha\, z_{t-1}$, откуда следует, что эта матрица не равна E – противоречие.

Итак, матрица E обладает ровно одной стандартной формой (нулевой длины), что и требовалось. ■

Следующий результат даёт полезное необходимое условие того, чтобы кольцо (не обязательно коммутативное) было квазисвободно для GE_2.

Теорема 5. Если кольцо R квазисвободно для GE_2, то для любых необратимых в R ненулевых элементов b и c выполнено $bc-1\notin U(R)$.

Доказательство. Допустим, что элемент $bc-1$ является обратимым, и введём обозначение $\beta=(1-bc)^{-1}$. Заметим, что

$$cb\cdot c\beta b=c(1-\beta^{-1})\beta b=c(\beta-1)b=c\beta(1-\beta^{-1})b=c\beta b\cdot cb.$$

Отсюда следует, что произведения $(1-cb)(1+c\beta b)$ и $(1+c\beta b)(1-cb)$ равны выражению $1-cb+c\beta b-c(\beta-1)b=1$, т.е. $1-cb\in U(R)$ и $(1-cb)^{-1}=1+c\beta b$. Убедимся теперь, что справедливо соотношение

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-cb&0\\0&\beta\end{pmatrix}Y(-c\beta)Y(b)Y(c)Y(-\beta b)\,. \qquad (3)$$

Действительно, имеют место равенства

$$Y(-c\beta)Y(b)Y(c)=\begin{pmatrix}-c\beta&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&1\\-1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-c\beta b-1&-c\beta\\-b&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c\beta bc-c+c\beta&-c\beta b-1\\1-bc&-b\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-c\beta(1-\beta^{-1})-c+c\beta&-(1+c\beta b)\\\beta^{-1}&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&(cb-1)^{-1}\\\beta^{-1}&-b\end{pmatrix},$$

а значит, правая часть соотношения (3) равна матрице

$$\begin{pmatrix}1-cb&0\\0&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&(cb-1)^{-1}\\\beta^{-1}&-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta b&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-\beta b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta b&1\\-1&0\end{pmatrix}=E\,,$$

что и требовалось. Если при этом выполнено $b,c\notin U(R)\cup\{0\}$, то запись (3) показывает, что матрица E обладает стандартной формой длины 4, а это невозможно, так как по условию R квазисвободно для GE_2. ■

Частным случаем теоремы 5 является доказанное в [1] утверждение о том, что не являющееся телом локальное кольцо не может быть квазисвободным для GE_2. Справедливо также

Следствие 6. Если кольцо содержит делители нуля, то оно не квазисвободно для GE_2.

Доказательство. В самом деле, если в кольце R есть элементы $b,c\neq 0$, такие, что выполняется $bc=0$, то $b,c\notin U(R)$ и $bc-1=-1\in U(R)$, а следовательно, в силу теоремы 5 кольцо R не квазисвободно для GE_2. ■

Предложение 7. Пусть $R=\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, где $n>1$. Следующие условия эквивалентны:

а) R имеет единственную стандартную форму для GE_2;

б) R квазисвободно для GE_2;

в) n – простое число.

Доказательство. Если n – простое число, то кольцо R является полем и ввиду утверждения 3 имеет единственную стандартную форму для GE_2 (откуда следует, что R квазисвободно для GE_2).

Если же число n составное, то R содержит делители нуля. Поэтому по следствию 6 кольцо R не квазисвободно для GE_2, откуда сразу получаем, что R не имеет единственную стандартную форму для GE_2. ■

Теорема 8. 1) Подкольцо поля $\mathbf{Q}$ квазисвободно для GE_2 тогда и только тогда, когда оно совпадает с $\mathbf{Q}$ или с $\mathbf{Z}$.

2) Подкольцо поля $\mathbf{Q}$ имеет единственную стандартную форму для GE_2 тогда и только тогда, когда оно совпадает с $\mathbf{Q}$.

Доказательство. Из утверждения 3 следует, что поле $\mathbf{Q}$ имеет единственную стандартную форму для GE_2 и, следовательно, квазисвободно для GE_2. Кольцо $\mathbf{Z}$ квазисвободно для GE_2 (см. теорему 4), но не имеет единственную стандартную форму для GE_2, как показывают следующие равенства:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y(3)Y(2)Y(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y(2)Y(-2)Y(0) = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Остаётся рассмотреть случай $R = \mathbf{Q}^{(L)}$, где $L \neq \varnothing$ и $L \neq \mathbf{P}$. Предположим сначала, что $2 \notin L$, и обозначим через a наименьший элемент множества L. Поскольку для числа $c = (a+1)/2$ при всех $p \in L$ выполнено $2 \le c < a \le p$, то натуральное число c обладает простым делителем, принадлежащим $\mathbf{P} \setminus L$. Полагая теперь $b = 2$, имеем $b, c \notin U(R) \cup \{0\}$ и $bc - 1 = a \in U(R)$.

Наконец, допустим, что выполнено $2 \in L$, и обозначим через a наименьший из элементов множества $\mathbf{P} \setminus L$. Полагая $b = c = a$, заметим, что число

$$bc - 1 = a^2 - 1 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{a-1}{2} \cdot \frac{a+1}{2}$$

представляет собой произведение натуральных чисел, каждое из которых строго меньше a. Отсюда вытекает, что элемент $bc - 1$ можно разложить в произведение простых сомножителей, принадлежащих L, и, следовательно, $bc - 1 \in U(R)$.

В обоих случаях нашлись $b, c \notin U(R) \cup \{0\}$ такие, что выполнено $bc - 1 \in U(R)$. Тогда ввиду теоремы 5 кольцо R не квазисвободно для GE_2, а значит, R не имеет единственную стандартную форму для GE_2. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cohn P.M.* On the structure of the GL_2 of a ring // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 1966. V. 30. P. 5–53. DOI: 10.1007/BF02684355.
2. *Глухов М.М.*, *Елизаров В.П.*, *Нечаев А.А.* Алгебра. Т. 1. М.: Гелиос АРВ, 2003. 336 с.

Статья поступила 05.04.2019 г.

Zonov M.N., Timoshenko E.A. ON THE STANDARD FORM FOR MATRICES OF ORDER TWO. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 5–10

DOI 10.17223/19988621/59/1

Keywords: matrix, standard form, general linear group.

We establish a criterion for a subring of the field of rational numbers to have a unique standard form (in the sense of Cohn). A similar criterion is obtained for quotient rings of the ring of integers.

Definition 1. Let R be an associative ring with unit, $C \in GL_2(R)$ and

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

where $t \geq 0$. Suppose that the following conditions are satisfied:

1) α and β are invertible in R;

2) if $1 < i < t$, then a_i is a nonzero non-invertible element of R;

3) if $t = 2$, then a_1 and a_2 cannot both be 0.

Then the above representation is said to be a *standard form* for C.

Definition 2. 1) A ring R is said to have a *unique standard form* if no matrix $C \in GL_2(R)$ can be represented by two different standard forms.

2) A ring R is said to be *quasi-free* if the identity matrix $E \in GL_2(R)$ does not possess a nontrivial standard form.

Theorem 5. If a ring R is quasi-free, then for every nonzero non-invertible elements b and c of R the element $bc - 1$ is non-invertible in R.

Theorem 5 enables us to prove Proposition 7 and Theorem 8.

Proposition 7. Let $R = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, where $n > 1$. The following conditions are equivalent:

a) R has a unique standard form;

b) R is quasi-free;

c) n is a prime.

Theorem 8. 1) A subring of the field $\mathbf{Q}$ is quasi-free if and only if it coincides with $\mathbf{Q}$ or with $\mathbf{Z}$.

2) A subring of the field $\mathbf{Q}$ has a unique standard form if and only if it coincides with $\mathbf{Q}$.

AMS Mathematical Subject Classification: 15A23

Financial support. The work of the second author was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (state assignment No. 1.13557.2019/13.1).

ZONOV Matvey Nikitovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mnzonov@gmail.com

TIMOSHENKO Egor Aleksandrovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Cohn P.M. (1966) On the structure of the GL_2 of a ring. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 30. pp. 5–53. DOI: 10.1007/BF02684355.
2. Glukhov M.M., Elizarov V.P., Nechaev A.A. (2003) *Algebra*. Vol. 1. Moscow: Gelios ARV (in Russian).

Received: April 5, 2019

УДК 517.54 MSC 26B30, 26B35
DOI 10.17223/19988621/59/2

А.Н. Малютина, У.К. Асанбеков

О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ С *s*-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

По известной теореме С.Л. Соболева функция класса $W^1_{s,loc}(R^n)$ при $s > n$ эквивалентна непрерывной функции. При $s < n$ этого свойства, вообще говоря, может и не быть. В настоящей работе мы обобщаем ранее полученный авторами результат (1983) и находим необходимые условия, при которых классы и подклассы отображений с s-усредненной характеристикой при $1 < s < n$ будет непрерывными. Примеры подклассов таких отображений, которые будут непрерывными с указанными выше s приведены авторами (2016).

Ключевые слова: *отображения с s-усредненной характеристикой, модуль непрерывности, класс.*

Область $G \subset R^n$, $f : G \to R^n$, $f \in W^1_n(G)$, $1 < s < n$, и пусть для любого $y \in G$ выполняются неравенства

$$\int_G (\lambda(x,f))^s k(|x-y|)\,d\sigma_x < M\ ; \tag{1}$$

$$\int_G \left(\lambda^*(x,f)\right)^{s^*} k(|x-y|)\,d\sigma_x < M^*, \tag{1'}$$

где функция $k(t)$ определена при $t > 0$, положительна, не возрастает и $\lim\limits_{t\to 0+} k(t) = +\infty$. В случае (1) будем говорить, что это отображение с (s, k)-усредненной характеристикой, а в случае (2) – отображение с (s^*, k)-усредненной характеристикой, где функция $f \in W^1_n(G,k,M)$, $1 < s < n$.

Теорема 1. *Пусть f – отображение с (s^*, k)-усредненной характеристикой и выполнено неравенство*

$$\int_0^a k^{-\frac{1}{s^*}}(t)\,t^{-\frac{n}{s^*}}\,dt < +\infty,\ a > 0. \tag{2}$$

Тогда шар

$$B\left(\frac{x+y}{2}, \frac{3}{2}\rho\right) \subset G,\ \ |f(x) - f(y)| < \Psi(|x-y|),$$

где $\Psi(\rho) \to 0$ *при* $\rho \to 0$.

Доказательство. Оценим $|f(x) - f(y)|$. Возьмем шары $B(x,\rho)$, $B(y,\rho)$ и $B_1\left(\frac{x+y}{2}, \frac{\rho}{2}\right)$. Пусть $z \in B_1$, тогда, оценивая модуль непрерывности, имеем

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)| \le \int_x^z \left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| dl_x + \int_y^z \left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| dl_x .$$

Проинтегрируем последнее неравенство по всем $z \in B_1$:

$$\varkappa_n \left(\frac{\rho}{2}\right)^n |f(x)-f(y)| \le \int_{B_1} dz \int_x^z \left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| dl_x + \int_{B_1} dz \int_y^z \left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| dl_x \le \int_{|x-z|<\rho} dz \int_x^z \left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| dl_x + \int_{|y-z|<\rho} dz \int_y^z \left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| dl_x ,$$

где $\varkappa_n$ – объем единичного шара в R_n. Оценим последние интегралы, вводя обобщенные сферические координаты r, ω с центром соответственно в точках x и y

$$\int_{|x-z|<\rho} dz \int_x^z |\nabla f| dl_x = \int_{r\le\rho} \int_{|\omega|=1} r^{n-1} dr d\omega \int_0^r |\nabla f(x+l\omega)| dl_x d\omega =$$

и далее, применяя теорему Фубини, получаем

$$= \int_{r\le\rho} r^{n-1} dr \int_{l\le r} \int_{|\omega|=1} \int_0^r |\nabla f(x+l\omega)| dl_x d\omega . \tag{3}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(r) = \int_{B(x,r)} |\nabla f(z)| dz = \int_{r<\rho} r^{n-1} dr \int_{l\le r} \int_{|\omega|=1} |\nabla f(x+l\omega)\, dl_x d\omega| .$$

Причем её производная имеет вид

$$\varphi'(r) = r^{n-1} \int_{|\omega|=1} |\nabla f(x+r\omega)\, d\omega| .$$

Оценим функцию $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \int_{B(x,r)} |\nabla f(z)|\, dz \le \left(\int_{B(x,r)} |\nabla f|^n dz\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{B(x,r)} dz\right)^{\frac{n-1}{n}} =$$

$$= \left(\int_{B(x,r)} \frac{|\nabla f(z)|^n}{J(z,f)} \frac{J(z,f)}{k^{-\frac{1}{s^*}}(|z-x|)} k^{-\frac{1}{s^*}}(|z-x|)\, d\sigma_z\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{B(x,r)} dz\right)^{\frac{n-1}{n}} \le$$

$$\le \left(\int_{B(x,r)} \left(\frac{|\nabla f(z)|^n}{J(z,f)} k^{\frac{1}{s^*}}(|z-x|) J^{\frac{1}{s^*}}(z,f)\right)^{s^*} d\sigma_z\right)^{\frac{1}{s^*}} \left(\int_{B(x,r)} J^{\frac{s^*-1}{s^*}}(z,f) k^{-\frac{1}{s^*}}(|z-x|) d\sigma_z\right)^{\frac{s^*-1}{s^*}} =$$

$$= \left(\int_{B(x,r)} \left(\frac{|\nabla f(z)|^n}{J(z,f)}\right)^p k(|z-x|) J(z,f) d\sigma_z\right)^{\frac{1}{s^*}} \left(\int_{B(x,r)} J(z,f) k^{-\frac{1}{s^*-1}}(|z-x|) d\sigma_z\right)^{\frac{s^*-1}{s^*}} \le$$

$$\le \left(\int_{B(x,r)} \lambda^*(z,f)\cdot k(|z-x|) d\sigma_z\right)^{\frac{1}{s^*}} \le M^{*\frac{1}{s^*}} k^{-\frac{1}{s^*}}(r) r^{\frac{n(s^*-1)}{s^*}} .$$

$$\varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} M^* \int\limits_{B(x,r)} \left(J(z,f) k^{\frac{1}{1-s^*}}(|z-x|) d\sigma_z \right)^{\frac{s^*-1}{s^*}} = M^* \varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} k^{\frac{1}{1-s^*}}(r) \int\limits_{B(x,r)} J(z,f) d\sigma_z \le$$

$$\le M^* \varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} k^{-\frac{1}{s^*}}(r) mf(B(x,r)) \le M^* \varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} \cdot c \cdot \left(k^{-\frac{1}{1-s^*}}(r) \right)^{\frac{s^*-1}{s^*}} \left(r^{\frac{n}{1-s^*}+1} \right)^{\frac{s^*-1}{s^*}} =$$

$$= \left(M^* \varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} \cdot c \cdot \left(k^{\frac{1}{s^*}}(r) \right) \left(r^{\frac{s^*-1-n}{s^*}} \right) \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} M^* \cdot c \cdot k^{\frac{1}{s^*}}(r) \cdot r^{\frac{s-1-n}{s^*}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда

$$\int\limits_{l\le r} \int\limits_{|\omega|=1} \int\limits_0^r |\nabla f(x+l\omega)| dl_x d\omega = \int\limits_0^r \frac{\varphi'(l)}{l^{n-1}} dl_x = \int\limits_0^r \varphi(l)(n-1) l^{n-1} dl_x + \left. \frac{\varphi(l)}{l^{n-1}} \right|_{l=0}^{l=r} \le$$

$$\le M_1 (n-1) \int\limits_0^r k^{-\frac{1}{s^*}}(l) l^{-\frac{n}{s^*}} dl_x + \frac{\varphi(r)}{r^{n-1}},$$

где
$$M_1 = M^* \cdot c \cdot \varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}}.$$

Остается показать, что

$$\lim_{l\to 0} \frac{\varphi(l)}{l^{n-1}} = 0.$$

Из определения функции φ и (4) следует неравенство

$$0 \le \frac{\varphi(l)}{l^{n-1}} \le c k^{-\frac{1}{s^*}}(l) l^{1-\frac{n}{s^*}}.$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{l\to 0+} k^{-\frac{1}{s^*}}(l) l^{1-\frac{n}{s^*}} = 0. \qquad (5)$$

По условию функция k монотонна. Применяя теперь (2), имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $0 < t < \delta$ и на основании критерия Коши будет выполнятся неравенство

$$\left| \int\limits_{0,5t}^t l^{-\frac{n}{s^*}} k^{-\frac{1}{v}} dl \right| = \left| \int\limits_{0,5t}^t l^{-\frac{n}{s^*}+1} \frac{k^{-\frac{1}{s^*}}(l)}{l} dl \right| = \mu \ln 2 < \varepsilon,$$

где
$$\inf \left| l^{-\frac{n}{s^*}+1} k^{-\frac{1}{s^*}}(l) \right| \le \mu \le \sup \left| l^{-\frac{n}{s^*}+1} k^{-\frac{1}{s^*}}(l) \right|, 1 \in [0,5t; t].$$

Так как

$$\mu \ln 2 \ge t^{-\frac{n}{s^*}+1} k^{-\frac{1}{s^*}}(0,5t) \ln 2,$$

то $$(0,5t)^{-\frac{n}{s^*}} k^{-\frac{1}{s^*}}(0,5t) < \frac{\varepsilon}{2^{-\frac{n}{s^*}+1}\ln 2}.$$

Отсюда следует (5). В силу (3) и (4) имеем

$$\varkappa_n\left(\frac{p}{2}\right)^n |f(x)-f(y)| \le 2\int\limits_{r\le\rho} r^{n-1}\left(M_1(n-1)k^{-\frac{1}{s^*}}(l)\,l^{-\frac{n}{s^*}}dl + \frac{\varphi(r)}{r^{n-1}}\right)dr \le$$

$$\le 2M_1(n-1)\frac{\rho^n}{k}\int\limits_0^\rho k^{-\frac{1}{s^*}}(l)\,l^{-\frac{n}{s^*}}dl + 2\int\limits_{n\le\rho}\varphi(r)\,dr \le$$

$$\le 2M_1 n\rho^n\int\limits_0^\rho k^{-\frac{1}{s^*}}(l)\,l^{-\frac{n}{s^*}}dl + 2\varphi(\rho)\rho.$$

Оценим теперь модуль непрерывности:

$$|f(x)-f(y)| \le (\varkappa_n)^{-1} M_1\frac{(n-1)2^{n-1}}{n}\int\limits_0^\rho k^{-\frac{1}{s^*}}(l)\,l^{-\frac{n}{s^*}}dl + 2^{n+1}\frac{\varphi(\rho)}{\rho^{n-1}} = \Psi(\rho),$$

где $\Psi(\rho)\to 0$, при $\rho\to 0$.

В [2] такой результат получен для функций класса $W_p^1(G)$, $G\subset R^n$.

Замечание. Теорема 1 представляет собой аналог леммы Мори [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: ЛГУ, 1950. 255 с.; Новосибирск, 1962. 255 с.
2. *Никулина Н.Г.*, *Малютина А.Н.* О непрерывности функций одного класса // Экстремальные задачи теории функций: сб. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1983. С. 47–52.
3. *Елизарова М.А.*, *Малютина А.Н.* Отображения с *s*-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.144 p.
4. *Асанбеков У.К.*, *Малютина А.Н.* Вычисление модуля сферического кольца // Комплексный анализ и приложения: материалы VIII Петрозаводской Международной конференции. 2016. С. 103–106.
5. *Alipova K.*, *Elizarova M.*, *Malyutina A.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // Комплексный анализ и его приложения: материалы VII Петрозаводской Международной конференции. 2014. С. 12–17.
6. *Ладыженская О.А.*, *Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
7. *Сингулярные* интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

Статья поступила 17.03.2019 г.

Malyutina A.N., Asanbekov U.K. ON THE MODULE OF CONTINUITY OF MAPPINGS WITH AN *s*-AVERAGED CHARACTERISTIC. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 11–15

DOI 10.17223/19988621/59/2

Keywords: spatial mappings with an *s*-averaged characteristic, modulus of continuity, mapping class.

We continue studying analytical properties of non-homeomorphic mappings with an *s*-averaged characteristic. O. Martio proposed the theory of *Q*-homeomorphisms (2001). The concept of *Q*-homeomorphisms was extended to maps with branching (2004). In this paper, we study analytical properties of non-homeomorphic mappings with an *s*-averaged characteristic and consider the question of continuity of mappings with an *s*-averaged characteristic. By the well-known Sobolev theorem, a function of class $W^1_{s,loc}\left(R^n\right)$ for is equivalent to a continuous function. This property does not hold when $s < n$. The authors presented such example for mappings with an *s*-averaged characteristic in 2016.

In this paper, we generalize the result obtained earlier to a more general class of mappings with an *s*-averaged characteristic. Relevant examples are built. The purpose of this paper is to indicate the necessary conditions under which mappings from classes and subclasses of mappings with an *s*-averaged characteristic $1 < s < n$ will be continuous. Here, n is the dimension of the space, and s is the averaging parameter. We proved a theorem in which we obtain necessary conditions for the continuity of such mappings that are with the abovementioned s. Earlier, such a result was obtained for functions of the class $W^1_{s,loc}\left(R^n\right)$. The theorem is an analogue of the Mori lemma.

MALYUTINA Aleksandra Nikolaevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk, State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nmd@math.tsu.ru

ASANBEKOV Urmat Kubatovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: urmat_1396@mail.ru

REFERENCES

1. Sobolev S.L. (1950) *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Leningrad: Leningrad State University.
2. Nikulina N.G., Malyutina A.N. (1983) O nepreryvnosti funktsii odnogo klassa [On continuity of functions of a certain class]. *Ekstremal'nye zadachi teorii funktsii* [Extremum problems of the theory of functions]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 47–52.
3. Malyutina A.N., Elizarova M.A. (2013) *Otobrazheniya s s-usrednennoy kharakteristikoy. Opredelenie i svoystva* [Mappings with the *s*-averaged characteristic. Definition and properties] LAP Lambert Academic Publishing.
4. Asanbekov U.K., Malyutina A.N. (2016) Vychislenie modulya sfericheskogo kol'tsa [Calculation of the modulus of the spherical ring]. *Kompleksnyi analiz i prilozheniya. Materialy VIII Petrozavodskoi mezhdunarodnoi konferentsii* [Complex analysis and applications. Proceedings of the 8th Petrozavodsk International Conference]. pp. 103–106.
5. Alipova K., Elizarova M., Malyutina A. (2014) Examples of the mappings with *s*-averaged characteristic. *Kompleksnyy analiz i prilozheniya. Materialy VII Petrozavodskoy mezhdunarodnoy konferentsii* [Complex analysis and its applications. Proceedings of the 7th Petrozavodsk International Conference]. pp. 12–17.
6. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. (1973) *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and quasi-linear equations of the elliptical type]. Moscow: Nauka.
7. Stein E.M. (1971), *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton: Princeton University Press.

Received: March 17, 2019

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 Математика и механика № 59

УДК 517.928 MSC 34D15, 34D05 34E05, 34M60, 34E10, 34A12
DOI 10.17223/19988621/59/3

Д.А. Турсунов

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ, КОГДА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИМЕЮТ ПОЛЮСЫ

Исследуется асимптотическое поведение решения сингулярно возмущенной задачи Коши при нарушении условия асимптотической устойчивости, когда комплексно-сопряженные собственные значения матрицы-функции коэффициента линейной части имеют полюсы. Доказывается асимптотическая близость решения сингулярно возмущенной задачи Коши при нарушении асимптотической устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» к решению предельной системы на достаточно большом промежутке.

Ключевые слова: *асимптотическое поведение, сингулярно возмущенная задача Коши, сингулярное возмущение, малый параметр, система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, асимптотическая устойчивость, комплексно-сопряженные собственные значения.*

Как нам известно, многие актуальные задачи теории колебаний, теории радиотехнических приборов, теории автоматического регулирования, квантовой механики и др. сводятся к изучению систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Случаи, когда сингулярно возмущенные уравнения имеют явные решения, крайне редки. Даже для современных компьютеров задача определить поведение решения в пограничных слоях и при нарушении условия асимптотической устойчивости, при достаточно малых значениях параметра, – весьма трудоемкая задача. Важным инструментом при исследовании поведений решений подобных сингулярных задач являются асимптотические методы.

А.Н. Тихонов сформулировал достаточные условия, при выполнении которых решение возмущенной задачи и решение невозмущенной системы асимптотически близки [1, 2]. Далее эти достаточные условия стали называть условиями устойчивости. Затем, исследователей интересовало асимптотическое поведение решения задачи при нарушении условии устойчивости. Первой работой, когда нарушается условия устойчивости на отрезке [–1, 1], но выполняется предельный переход, является работа М.А. Шишковой [3], ученица Л.С. Понтрягина. Вслед за этой работой появились работы [4–16] и др. Во всех этих работах исследованы случаи, когда собственные значения имеют нули. В данной работе исследуется случай, когда комплексно-сопряженные собственные значения матрицы-функции коэффициента линейной части имеют полюсы. Доказывается асимптотическая близость решения сингулярно возмущенной задачи Коши при нарушении асимптотической устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» к решению предельной системы на достаточно большом промежутке.

Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + f(t),\ x(t_0,\varepsilon) = x^0, \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, $A(t)$ – квадратная матрица-функция второго порядка, с элементами $a_{jk}(t)$, $f(t) = \mathrm{colon}\{f_1(t), f_2(t)\}$, $a_{jk}(t)$, $f_k(t)$ – аналитические функции, $(j, k = 1, 2)$, $x^0 = \mathrm{colon}(\varepsilon,\varepsilon)$, $t\in[t_0,T_0]$, $t_0 = \mathrm{ctg}(\pi/(2n-2))$, $t_0 < T_0$ – const, $3 < n\in\mathbf{N}$, матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения:

$$\lambda_1(t) = (t + i)^{-n},\ \lambda_2(t) = (t-i)^{-n},\ 1 < n\in\mathbf{N}.$$

Систему (1) при $\varepsilon = 0$ называют невозмущенной или предельной, эта предельная система имеет единственное решение: $\tilde{x}(t) = -A^{-1}(t)f(t)$.

Требуется доказать теорему

Теорема. Для решения задачи (1) справедлива асимптотическая оценка

$$\|x(t,\varepsilon) + A^{-1}(t)f(t)\| \le c\varepsilon,\ \text{при } \mathrm{ctg}(\pi/(2n-2)) \le t \le T_0,$$

где $0 < c$ – const, $t_0 < T_0$ – const, $t_0 = \mathrm{ctg}(\pi/(2n-2))$, $3 < n\in\mathbf{N}$.

Доказательство. Как и в работе [14], в задаче (1) сделаем замену

$$x(t,\varepsilon) = B_0(t)y(t,\varepsilon) + g(t),$$

где $g(t) = -A^{-1}(t)f(t)$, $y(t,\varepsilon)$ – неизвестная вектор-функция,

$$B_0(t) = \begin{pmatrix} (\lambda_1(t) - a_{22}(t))/a_{21}(t) & (\lambda_2(t) - a_{22}(t))/a_{21}(t) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства: $B_0^{-1}(t)A(t)B_0(t) = D(t)$, где $D(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$.

Тогда получим задачу

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = D(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon B(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon h(t),\ y(t_0,\varepsilon) = y^0(\varepsilon), \tag{2}$$

где $B(t) = -B_0^{-1}(t)B'_0(t)$, $h(t) = -B_0^{-1}(t)g'(t)$, $\|y^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \varepsilon\to 0$.

От задачи (2) переходим к эквивалентной задаче:

$$y(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)y^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\big(B(\tau)z(\tau,\varepsilon) + h(\tau)\big)d\tau, \tag{3}$$

где $E(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{\tau}^{t} D(s)\,ds\right)$.

Пусть

$$y(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} v(t,\varepsilon) \\ w(t,\varepsilon) \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{pmatrix},\ h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix},$$

$$E_j(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} \lambda_j(s)\,ds\right), j = 1, 2;$$

$$P(v,w,t) = b_{11}(t)v(t,\varepsilon) + b_{12}(t)w(t,\varepsilon),\ Q(v,w,t) = b_{21}(t)v(t,\varepsilon) + b_{22}(t)w(t,\varepsilon).$$

Задачу (3) запишем в скалярном виде:

$$\begin{cases} v(t,\varepsilon)=v^0E_1(t,t_0,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)h_1(\tau)\,d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)P(v,w,\tau)\,d\tau,\\ w(t,\varepsilon)=w^0E_2(t,t_0,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)h_2(\tau)\,d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)Q(v,w,\tau)\,d\tau, \end{cases} \tag{4}$$

имеем $|v^0|=|v^0(t_0,\varepsilon)|=O(\varepsilon),\ |w^0|=|w^0(t_0,\varepsilon)|=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0.$

Задачу (4) будем решать методом последовательных приближений

$$v_0(t,\varepsilon)\equiv 0,\ \ w_0(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$v_1(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)E_1(t,t_0,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)h_1(\tau)\,d\tau,$$

$$w_1(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)E_2(t,t_0,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)h_2(\tau)\,d\tau,,$$

$$v_m(t,\varepsilon)=v_1(t,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)P(v_{m-1},w_{m-1},\tau)\,d\tau\ ,$$

$$w_m(t,\varepsilon)=w_1(t,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)Q(v_{m-1},w_{m-1},\tau)\,d\tau\ \ ,$$

где $P(v_m,w_m,t)=b_{11}(t)v_m(t,\varepsilon)+b_{12}(t)w_m(t,\varepsilon)$,

$$Q(v_m,w_m,t)=b_{21}(t)v_m(t,\varepsilon)+b_{22}(t)w_m(t,\varepsilon),\ |b_{kj}(t)|\le c_0/2,\ (k,j=1,2).$$

Далее при оценке функций $\nu_m(t,\varepsilon)$, $w_m(t,\varepsilon)$ переменную t будем считать комплексным переменным, следовательно, $\nu_m(t,\varepsilon)$, $w_m(t,\varepsilon)$ – комплексными величинами. Затем мы используем свойства аналитической функции [17]:

Значение интеграла от аналитической функции в односвязной области H не изменяется, если контур интегрирования непрерывно деформируется так, что его концы остаются неподвижными и он все время остается внутри H.

Пусть $t=t_1+it_2$, $\tau=\tau_1+i\tau_2$, где t_1, t_2, τ_1, τ_2 – действительные переменные, $i=\sqrt{-1}$. Нам следует рассматривать область тех точек $(t_1;t_2)$, для которых одновременно справедливы неравенства

$$u(t_1,t_2)\equiv \operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t_1+it_2}(s+i)^{-n}\,ds\le 0,\quad u(t_1,-t_2)\equiv \operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t_1+it_2}(s-i)^{-n}\,ds\le 0.$$

Проведем исследование последовательных приближений $\nu_m(t,\varepsilon)$ и $w_m(t,\varepsilon)$.

Имеют места неравенства:

$$|v_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le|v^0E_1(t_1,t_2,\varepsilon)|+|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)|;$$

$$|v_m(t_1,t_2,\varepsilon)|\le|v_1(t_1,t_2,\varepsilon)|+|J_m(t_1,t_2,\varepsilon)|; \tag{5}$$

$$|w_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le\left|w^0E_2(t_1,t_2,\varepsilon)\right|+\left|\tilde J_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|;$$

$$|w_m(t_1,t_2,\varepsilon)|\le|w_1(t_1,t_2,\varepsilon)|+\left|\tilde J_m(t_1,t_2,\varepsilon)\right|; \tag{6}$$

где

$$\left|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le \sum_j \int_{l_1^j} e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}} \left|h_1(\tau_1,\tau_2)\right| \sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2}\ ;$$

$$\left|\tilde{J}_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le \sum_j \int_{\tilde{l}_1^j} e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(\tau_1,-\tau_2)}{\varepsilon}} \left|h_2(\tau_1,\tau_2)\right| \sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2}\ ;$$

$$\left|J_m(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le \sum_j \int_{l_m^j} e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}} \left|P_{m-1}(v_{m-1},w_{m-1},\tau_1,\tau_2)\right| \sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2}\ ;$$

$$\left|\tilde{J}_m(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le \sum_j \int_{\tilde{l}_m^j} e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(\tau_1,-\tau_2)}{\varepsilon}} \left|Q_{m-1}(v_{m-1},w_{m-1},\tau_1,\tau_2)\right| \sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2}\ ;$$

$l_m, \tilde{l}_m$ – пути интегрирования m-го приближения, соединяющие точки $(t_0\,;0)$ $(t_1;t_2)$, l_m^j – отрезки этих путей.

Собственные значения $A(t)$ в комплексной плоскости, соответственно в точках $(\pm i)$ имеют n-кратный полюс и

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) \equiv \operatorname{Re}\frac{(t\mp i)^n}{\left(t^2+1\right)^n} = \frac{\psi_n(t)}{\left(t^2+1\right)^n}\,,\ \ \psi_n(t) = \operatorname{Re}(t\mp i)^n\,,$$

где

$$\psi_n(t) = \begin{cases} t^{2k} - C_{2k}^2 t^{2k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} C_{2k}^{2k-2} t^2 + (-1)^k C_{2k}^{2k}, & n = 2k,\ k \in \mathrm{N}, \\ t^{2k-1} - C_{2k-1}^2 t^{2k-3} + \ldots + (-1)^{k-2} C_{2k-1}^{2k-4} t^3 + (-1)^{k-1} C_{2k-1}^{2k-2} t, & n = 2k-1, \end{cases}$$

поэтому $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) < 0$, если $\psi_n(t) < 0$; $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) > 0$, если $\psi_n(t)>0$; $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) = 0$, если $\psi_n(t) = 0$ или $t\to\infty$.

Если перейти к полярным координатам

$$t+i = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad \rho = \sqrt{t^2+1},\quad \varphi = \operatorname{arctg}(1/t)\,,$$

то получим $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\rho,\varphi) = \rho^{-n}\cos(n\varphi)$.

Поэтому

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\rho,\varphi) < 0 \text{ при } \frac{4k+1}{2n}\pi < \varphi < \frac{4k+3}{2n}\pi\,;$$

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\rho,\varphi) > 0 \text{ при } \frac{4k+3}{2n}\pi < \varphi < \frac{4k+5}{2n}\pi\,;$$

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\rho,\varphi) = 0 \text{ при } \varphi = \frac{2k+1}{2n}\pi \text{ или } \rho\to\infty.$$

В полярных координатах начальная точка $(t_0;0)$ переходит в точку (ρ_0,φ_0), где

$$\rho_0 = \sqrt{1+t_0^2}\,,\quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2(n-1)}\,,\quad \frac{\pi}{2n} < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2n}\,.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$u(t)-u(t_0)\equiv \operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}(s+i)^{-n}\,ds=-\frac{\psi_{n-1}(t)}{(n-1)\left(t^2+1\right)^{n-1}}+\frac{\psi_{n-1}(t_0)}{(n-1)\left(t_0^{\,2}+1\right)^{n-1}},$$

$$\psi_{n-1}(t) = \operatorname{Re}(t-i)^{n-1},\ n>1,$$

в полярных координатах функция $u(t)-u(t_0)$ имеет вид

$$u(\rho,\varphi)-u(\rho_0,\varphi_0)=-\frac{\cos(n-1)\varphi}{\rho^{n-1}}+\frac{\cos(n-1)\varphi_0}{\rho_0^{n-1}}.$$

При $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2(n-1)}$ имеем $\cos(n-1)\varphi_0 = 0$, поэтому

$$u(\rho,\varphi)-u(\rho_0,\varphi_0)=-\frac{\cos(n-1)\varphi}{\rho^{n-1}}.$$

При $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2(n-1)}$ и $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2(n-1)},\dfrac{\pi}{2(n-1)}\right]$ $u(\rho,\varphi)\le 0$. В декартовых координатах $t_0 = \operatorname{ctg}(\pi/(2n-2))$, и поэтому $u(t) \le 0$ при $t\in[t_0, +\infty)$.

Оценим последовательные приближения. Исследование проведем в области H_α:

$$H_\alpha = \{(t_1;t_2)\colon u(t_1,t_2) \le c(\alpha),\ u(t_1,-t_2) \le c(\alpha)\},$$

где

$$u(t_1,t_2)=-\frac{\psi_{n-1}(t_1,t_2)}{(n-1)\left(t_1^2+(t_2+1)^2\right)^{n-1}},$$

$$c(\alpha) = u(t_0 + \alpha,0),\ 1 < t_0,\ 0 < \alpha < < 1,\ (\alpha \text{ – достаточно малое число}).$$

Заметим, что если $u(t_1,t_2) \le 0$ и $u(t_1,-t_2) \le 0$ то $\|E(t_1,t_2,t_0,\varepsilon)\| = O(1)$ или $\|E(t_1,t_2,t_0,\varepsilon)y^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon)$.

Пусть

$$H = \{(t_1;t_2)\colon u(t_1,t_2) \le u(T_0,0),\ u(t_1,-t_2) \le u(T_0,0)\},$$

$$H_0 = \{(t_1;t_2)\colon u(t_1,t_2) \le c(\alpha),\ u(t_1,-t_2) \le c(\alpha),\ t_1 \le T_\alpha(t_2 + 1),\ t_1 \le T_\alpha(1-t_2)\},$$

$$H_1 = \{(t_1;t_2)\colon u(t_1,-t_2) \le c(\alpha),\ T_\alpha(1-t_2) \le t_1\},$$

$$H_2 = \{(t_1;t_2)\colon u(t_1,t_2) \le c(\alpha),\ T_\alpha(1 + t_2) \le t_1\},$$

где $u(T_0,0) < c(\alpha)$, $T_0 < T_\alpha$ – абсцисса точки пересечения линии $u(t_1,t_2) = c(\alpha)$ и $u(t_1, -t_2) = c(\alpha)$, $t_0 < T_0$ – const.

Рассмотрим линии уровня

$$u(t_1,t_2)=-\tilde{c}\ \text{ и }\ u(t_1,-t_2)=-\tilde{c}, \qquad 0<\tilde{c}\ -const,$$

или в полярной системе координат

$$\frac{\cos(n-1)\varphi}{\rho^{n-1}}=(n-1)\tilde{c}, \qquad \frac{\cos(n-1)\tilde{\varphi}}{\tilde{\rho}^{n-1}}=(n-1)\tilde{c}.$$

Линиями уровня является $(n-1)$-лепестковая роза. Область H_α полностью покрывается линиями уровня.

Определим пути интегрирования:

1) если $(t_1;t_2)\in H_0$, то $l_m = l_m^1 \cup l_m^2 \cup l_m^3$, $\tilde{l}_m = \tilde{l}_m^1 \cup \tilde{l}_m^2 \cup \tilde{l}_m^3$. При этом $\tilde{l}_m$ симметрично l_m относительно действительной оси и

$$l_m^1 : \tau_2 = 0, \quad t_0 \le \tau_1 \le t_0 + \alpha;\ u(\tau_1, 0) = -\frac{\psi_{n-1}(\tau_1, 0)}{(n-1)(\tau_1^2+1)^{n-1}};$$

l_m^2 : верхняя часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_2) = u(t_0 + \alpha,0)$, $t_0+\alpha \le \tau_1 \le t_1^*$, t_1^* – абсцисса точки пересечения линии уровня с прямой $\tau_2 + 1 = (t_2 + 1)\tau_1/t_1$;

$$l_m^3 : (\tau_2+1)t_1 = (t_2+1)\tau_1, t_1 \le \tau_1 \le t_1^*,\ \ u(\tau_1,\tau_2) = u(t_1,t_2)\frac{t_1^{n-1}}{\tau_1^{n-1}};$$

2) если $(t_1;t_2)\in H_1$, то $l_m = l_m^1 \cup l_m^2 \cup l_m^3$, $\tilde{l}_m = \tilde{l}_m^1 \cup \tilde{l}_m^2 \cup \tilde{l}_m^3 \cup \tilde{l}_m^4 \cup \tilde{l}_m^5$. Заметим, что $\tilde{l}_m$ несимметрично l_m относительно действительной оси. Здесь l_m та же l_m, что в H_0, поэтому определим $\tilde{l}_m$:

$$\tilde{l}_m^1 : \tau_2 = 0,\ t_0 \le \tau_1 \le t_0 + \alpha;\ u(\tau_1, 0) = -\frac{\psi_{n-1}(\tau_1)}{(n-1)(\tau_1^2+1)^{n-1}};$$

$\tilde{l}_m^2$: нижняя часть линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2) = u(t_0 + \alpha,0)$, $t_0 + \alpha \le t_1 \le T_\alpha$;

$\tilde{l}_m^3$: отрезок прямой $1-\tau_2 = \dfrac{1-t_2}{t_1}\tau_1$, $u(\tau_1,-\tau_2) = u(t_1,-t_2)\dfrac{t_1^{n-1}}{\tau_1^{n-1}}$, $t_0 + \alpha \le t_1 \le T_\alpha$;

$\tilde{l}_m^4$: часть линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2) = u\left(t_1+\alpha_0, 1+\dfrac{t_2-1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$, $t_1^* \le \tau_1 \le t_1 + \alpha_0$; t_1^* – абсцисса точки пересечения линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2) = u\left(t_1+\alpha_0, 1+\dfrac{t_2-1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$ с прямой с $1-\tau_2 = (1-t_2)\tau_1/t_1$;

$\tilde{l}_m^5$: отрезок прямой $1-\tau_2 = \dfrac{1-t_2}{t_1}\tau_1$, $t_1 \le \tau_1 \le t_1^*$, $u(\tau_1,-\tau_2) = u(t_1,-t_2)\dfrac{t_1^{n-1}}{\tau_1^{n-1}}$;

3) если $(t_1;t_2)\in H_2$, то $l_m = l_m^1 \cup l_m^2 \cup l_m^3 \cup l_m^4 \cup l_m^5$, $\tilde{l}_m$ – та же $\tilde{l}_m$, что и в H_0. Определим l_m:

$$l_m^1 : \tau_2 = 0,\ t_0 \le \tau_1 \le t_0 + \alpha;\ u(\tau_1, 0) = -\frac{\psi_{n-1}(\tau_1)}{(n-1)(\tau_1^2+1)^{n-1}};$$

l_m^2 : верхняя часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_2) = u(t_0 + \alpha,0)$, $t_0 + \alpha \le t_1 \le T_\alpha$;

l_m^3 : отрезок прямой $\tau_2+1 = \dfrac{t_2+1}{t_1}\tau_1$, $t_0 + \alpha \le t_1 \le T_\alpha$, $u(\tau_1,\tau_2) = u(t_1,t_2)\dfrac{t_1^{n-1}}{\tau_1^{n-1}}$;

l_m^4: часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_2) = u\left(t_1+\alpha_0, -1+\dfrac{t_2+1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$, $t_1^* \le \tau_1 \le t_1 + \alpha_0$; t_1^* – абсцисса точки пересечения линии уровня $u(\tau_1,\tau_2) = u\left(t_1+\alpha_0, -1+\dfrac{t_2+1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$ с прямой с $\tau_2+1 = (t_2+1)\tau_1/t_1$;

l_m^5 : отрезок $\tau_2+1=(t_2+1)\tau_1/t_1$, $t_1\le\tau_1\le t_1^*$, $u(\tau_1,\tau_2)=u(t_1,t_2)\dfrac{t_1^{n-1}}{\tau_1^{n-1}}$.

Для всех последовательных приближений путь интегрирования не меняется соответственно в областях H_0, H_1, H_2.

Произведем вычисления последовательных приближений.

Пусть $(t_1;t_2)\in H_0$, тогда

$$j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0}^{t_0+\alpha}e^{\frac{\psi_{n-1}(\tau_1)}{\varepsilon(n-1)\left(\tau_1^2+1\right)^{n-1}}}d\tau_1;\quad K(t_1,t_2,\varepsilon)=e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}};$$

$$j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0+\alpha}^{t_1^*}e^{-\frac{u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}d\tau_1;\ j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)\int_{t_1}^{t_1^*}e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1,$$

$$\left|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|\le j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)+j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)+j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon);$$
$$\left|\tilde J_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|\le \tilde j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)+\tilde j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)+\tilde j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon).$$

Оценим эти интегралы:

$$j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0}^{t_0+\alpha}e^{-\frac{u(\tau_1,0)}{\varepsilon}}d\tau_1=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0}^{t_0+\alpha}\frac{-\varepsilon\, d\left(e^{-\frac{u(\tau_1,0)}{\varepsilon}}\right)}{u'(\tau_1,0)}=$$

$$=O(\varepsilon)K(t_1,t_2,\varepsilon)\left(\frac{e^{-\frac{u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}}{-u'(t_0+\alpha,0)}+\frac{e^{-\frac{u(t_0,0)}{\varepsilon}}}{-u'(t_0,0)}-\int_{t_0}^{t_0+\alpha}\frac{u''(\tau_1,0)}{\left(u'(\tau_1,0)\right)^2}e^{-\frac{u(\tau_1,0)}{\varepsilon}}d\tau_1\right),$$

так как $u(t_1,t_2)-u(t_0+\alpha,0)\le 0$, $u(t_0+\alpha,0)<0$, $u(t_0,0)=0$; $u'(\tau_1,0)\ne 0$

при $t_0\le\tau_1\le t_0+\alpha<\mathrm{ctg}(\pi/2n)$, $u(t_1,t_2)-u(\tau_1,0)\le 0$.

Следовательно, для интеграла $j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)$ получим оценку $j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$.

$$j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0+\alpha}^{t_1^*}e^{-\frac{u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}d\tau_1=O(1)e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}};$$

$$j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_1}^{t_1^*}e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int_{t_1}^{t_1^*}e^{-\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\int_{t_1}^{t_1^*}e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int_{t_1}^{t_1^*}e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1-t_1\right)(n-1)t_1^{n-2}}{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\frac{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}{-u(t_1,t_2)(n-1)t_1^{n-2}}\left(1-e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0.$$

Так как $t_0 = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2(n-1)} > 1,\ n > 3$, и $t_0 \le \tau_1 \le t_1$, то справедливы неравенства $\sum\limits_{j=1}^{n} t_1^{n-j} t_0^{j-1} \le \sum\limits_{j=1}^{n} t_1^{n-j} \tau_1^{j-1} \le n t_1^{n-1}$ или

$$-(t_1-\tau_1)u(t_1,t_2)\sum_{j=1}^{n} t_1^{n-j} t_0^{j-1} \le -(t_1-\tau_1)u(t_1,t_2)\sum_{j=1}^{n} t_1^{n-j}\tau_1^{j-1} \le -(t_1-\tau_1)u(t_1,t_2)\,n t_1^{n-1},$$

где $u(t_1,t_2) < 0$.

Получим

$$\begin{cases} \left|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le c_1\left(\varepsilon + e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right), \\ \left|\tilde{J}_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le c_1\left(\varepsilon + e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right). \end{cases} \tag{7}$$

2) Пусть $(t_1;t_2)\in H_2$, тогда

$\left|\tilde{J}_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le c_1\left(\varepsilon + e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right)$; оценим $|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)|$:

$$j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0}^{t_0+\alpha} e^{\frac{\psi_{n-1}(\tau_1)}{\varepsilon(n-1)\left(\tau_1^2+1\right)^{n-1}}}d\tau_1;\quad K(t_1,t_2,\varepsilon) = e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}};$$

$$j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0+\alpha}^{T_\alpha} e^{-\frac{u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}d\tau_1;$$

$$j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_1+\alpha_0}^{T_\alpha} e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1;$$

$$j_{14}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_1^*}^{t_1+\alpha_0} e^{-\frac{\tilde{c}}{\varepsilon}}d\tau_1;\ \tilde{c} = u\left(t_1+\alpha_0, -1+\frac{t_2+1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right);$$

$$j_{15}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2\varepsilon)\int_{t_1}^{t_1^*} e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1.$$

Тогда

$$|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)| \le j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon) + j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon) + j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon) + j_{14}(t_1,t_2,\varepsilon) + j_{15}(t_1,t_2,\varepsilon).$$

Оценим эти интегралы:

$$j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0;$$

$$j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0+\alpha}^{T_\alpha} e^{-\frac{u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}d\tau_1 = O(1)e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}};$$

$$j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int\limits_{t_1+\alpha_0}^{T_\alpha} e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int\limits_{t_1+\alpha_0}^{T_\alpha} e^{-\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\int\limits_{t_1+\alpha_0}^{T_\alpha} e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon(T_\alpha)^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int\limits_{t_1+\alpha_0}^{T_\alpha} e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1-t_1\right)(n-1)t_1^{n-2}}{\varepsilon(T_\alpha)^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\frac{\varepsilon(T_\alpha)^{n-1}}{-u(t_1,t_2)(n-1)t_1^{n-2}}\left(1-e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0;$$

$$j_{14}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int\limits_{t_1^*}^{t_1+\alpha_0} e^{-\frac{\tilde c}{\varepsilon}}d\tau_1=O\left(\varepsilon^k\right),\varepsilon\to 0\,.$$

Действительно пусть $c_t=u(t_1,t_2)$, тогда $c_t-\tilde c<0$ так как $t_1<t_1^*<t_1+\alpha_0$.

$$j_{15}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K\int\limits_{t_1}^{t_1^*} e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int\limits_{t_1}^{t_1^*} e^{-\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\int\limits_{t_1}^{t_1^*} e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int\limits_{t_1}^{t_1^*} e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1-t_1\right)(n-1)t_1^{n-2}}{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\frac{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}{-u(t_1,t_2)(n-1)t_1^{n-2}}\left(1-e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)=O(\varepsilon).$$

В области H_2 справедлива оценка (7).

3) Пусть $(t_1;t_2)\in H_1$, тогда справедлива оценка (7). Так как $u(t_1,t_2)=u(t_0+\alpha,0)$ и $u(t_1,-t_2)=u(t_0+\alpha,0)$, l_m и $\tilde l_m$ симметричны относительно действительной оси (здесь l_m та же l_m, что и в H_2) то имеем

$$\left|\tilde J_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|\le c\left(\varepsilon+e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right).$$

Для первого приближения в области $H_\alpha=H_1\cup H_2\cup H_0$ справедливы оценки

$$\left|v_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|\le c\left(\varepsilon+e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right),\qquad \left|w_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|\le c\left(\varepsilon+e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right),$$

а в области $H\subset H_\alpha$ справедливы оценки

$|v_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le c_1\varepsilon$, $|w_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le c_1\varepsilon$, так как в области H

$u(t_1,t_2)\le u(T_0,0)<u(t_0+\alpha,0)$, $u(t_1,-t_2)\le u(T_0,0)<u(t_0+\alpha,0)$.

Поэтому имеем

$|P(v_1,w_1,t_1,t_2)|\le c_1c_0\varepsilon$; $|Q(v_1,w_1,t_1,t_2)|\le c_1c_0\varepsilon$.

Для остальных последовательных приближений путь интегрирования не меняется соответственно в областях H_0, H_1, H_2. Учитывая (5), (6), в области H имеем

$$|v_2(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_2(\varepsilon)\varepsilon,\ |w_2(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_2(\varepsilon)\varepsilon,\ c_2(\varepsilon) = c_1(1 + c_0\varepsilon);$$

$$|v_3(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_3(\varepsilon)\varepsilon,\ |w_3(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_3(\varepsilon)\varepsilon,\ c_3(\varepsilon) = c_1(1 + c_2(\varepsilon)c_0\varepsilon);$$

$$\ldots$$

$$|v_m(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_m(\varepsilon)\varepsilon,\ |w_m(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_m(\varepsilon)\varepsilon,\ c_m(\varepsilon) = c_1(1 + c_{m-1}(\varepsilon)c_0\varepsilon),$$

где
$$c_m(\varepsilon) = c_1\left(\sum_{j=0}^{m-2}(c_1c_0\varepsilon)^j + c_1^{m-2}(c_0\gamma\varepsilon)^{m-1}\right) \le \frac{c_1}{1-c_1c_0\varepsilon},\ c_m(\varepsilon) \le c;$$

следовательно, в области H последовательности $\{v_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$, $\{w_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$ равномерно ограничены.

Рассмотрим ряды

$$v_1(t_1,t_2,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{m-1}\left(v_{j+1}(t_1,t_2,\varepsilon) - v_j(t_1,t_2,\varepsilon)\right),$$

$$w_1(t_1,t_2,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{m-1}\left(w(t_1,t_2,\varepsilon)_{j+1} - w_j(t_1,t_2,\varepsilon)\right),$$

они сходятся, так как для каждого члена ряда имеют место оценки:

$$|v_m(t_1,t_2,\varepsilon) - v_{m-1}(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c\varepsilon^m,\ |w_m(t_1,t_2,\varepsilon) - w_{m-1}(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c\varepsilon^m,\ m = 1,2,\ldots$$

В области H последовательность $\{v_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$ имеет предел $v(t_1,t_2,\varepsilon)$, а последовательность $\{w_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$ имеет предел $w(t_1,t_2,\varepsilon)$, причем $\{v_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$, $\{w_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$ представляют собой решения задачи (4), при $n > 1$, и справедливы оценки $|v(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c\varepsilon$, $|w(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c\varepsilon$ или

$$\|x(t,\varepsilon) + A^{-1}(t)f(t)\| \le c\varepsilon,\ \text{при } \mathrm{ctg}(\pi/(2n-2)) \le t \le T_0,$$

где $0 < c$, $t_0 < T_0$ – постоянные числа, $t_0 = \mathrm{ctg}(\pi/(2n-2))$, $3 < n \in \mathbf{N}$.

Заключение

Исследование показало, что в задаче Коши для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений затягивание потери устойчивости существенно зависит от собственных значений матрицы коэффициентов линейной части системы. Если комплексно сопряженные собственные значения имеют нули, то затягивание потери устойчивости происходит на конечном отрезке [3–7, 10, 11, 13–16]. А если комплексно сопряженные собственные значения имеют полюсы, то затягивание потери устойчивости происходит на достаточно большом отрезке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. Т. 22 (64). С. 193–204.
2. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.
3. *Шишкова М.А.* Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 3. С. 576–579.
4. *Ривкинд В.Я., Новиков С.П., Петков В.М., Мясников В.П., Федорюк М.В., Кучеренко В.В., Давыдов А.А., Нейштадт А.И., Кружков С.Н., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., Сухов Ю.М., Шухов А.Г., Вайнберг Б.Р., Бахтин В.И., Вайнштейн А.Г., Шапиро Б.З.,*

Кондратьев Б.З., *Олейник О.А.*, *Вишик М.И.*, *Куксин С.Б.*, *Королев А.Г.*, *Ильяшенко Ю.С.* Заседания семинара имени И.Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики // УМН. 1985. Т. 40 № 5(245). С. 295–307.

5. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях I // Диф. урав. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067
6. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях II // Диф. урав. 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
7. *Нейштадт А.И.*, *Сидоренко В.В.* Запаздывание потери устойчивости в системе Циглера / Препринт. М.: Институт прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша, 1995.
8. *Neishtadt A.I. Sidorenko V.V.* Stability loss delay in a Ziegler systemi // J. App. Maths. Mechs. 1997. V. 61. No. 1. P. 15–25.
9. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Archiv 1952. V. 20. N 1. S. 49–56.
10. *Арнольд В.И.*, *Афраймович В. С.*, *Ильяшенко Ю. С.*, *Шильников Л. П.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1986. Т. 5. С. 5–218.
11. *Ломов С.А.*, *Сафонов В.Ф.* Асимптотическое интегрирование линейных задач в области «неустойчивости» // Изв . АН КиргССР . 1983. № 3. С. 14–29.
12. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. 3-е изд., доп. М.: Наука, 1990. 128 с.
13. *Турсунов Д.А.*, *Турсунов Э.А.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач при нарушении условия устойчивости // Естественные и технические науки. 2007. № 3(29). С. 12–16.
14. *Турсунов Д.А.* Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2018. № 54. С. 46–57. DOI: 10.17223/19988621/54/4.
15. *Alybaev K.*; *Murzabaeva A.* Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1997. No. 1. DOI: 10.1063/1.5049070.
16. *Талиев А.А.* Затягивание потери устойчивости для сингулярно возмущенных уравнений с непрерывными правыми частями // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2014. № 4 (30). С. 36–42.
17. *Лаврентьев М.А.*, *Шабат Б.Ф.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 739 с.

Статья поступила13.02.2019 г.

Tursunov D.A. ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM IN THE CASE OF A CHANGE IN THE STABILITY, WHEN THE EIGENVALUES HAVE POLES *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 16–28

DOI 10.17223/19988621/59/3

Keywords: asymptotic behavior, singularly perturbed Cauchy problem, singular perturbation, small parameter, system of ordinary differential equations with a small parameter at the derivative, asymptotic stability, complex conjugate eigenvalues.

In this paper, the Cauchy problem for a normal system of two linear inhomogeneous ordinary differential equations with a small parameter at the derivative is considered. The coefficient matrix of the linear part of the system has complex conjugate eigenvalues. These eigenvalues have poles in the complex plane. The real parts of the complex conjugate eigenvalues in the considered interval change signs from negative to positive ones. A singularly perturbed Cauchy problem is investigated in the case of instability, i.e., when the asymptotic stability condition is violated.

The aim of the research is to construct the principal term of the asymptotic behavior of the Cauchy problem solution when the asymptotic stability condition is violated and to prove that the solution of the singularly perturbed Cauchy problem is asymptotically close to the solution of the

limit system on a sufficiently large interval when the asymptotic stability of the stationary point in the plane of "rapid motions" is violated.

In the study, methods of the stationary phase, saddle point, successive approximations, and L.S. Pontryagin's idea – the transition to a complex plane – are applied.

An asymptotic estimate is obtained for the solution of a singularly perturbed Cauchy problem in the case where the asymptotic stability of a stationary point in the plane of "rapid motions" is violated. The principal term of the asymptotic expansion of the solution is constructed. It has a positive power with respect to a small parameter. The asymptotic proximity of the solution of the singularly perturbed Cauchy problem to the solution of the limit system on a sufficiently large interval is proved when the asymptotic stability of the stationary point in the plane of "rapid motions" is violated.

The obtained results can find applications in chemical kinetics, in the study of Ziegler's pendulum, etc.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 34D15, 34D05 34E05, 34M60, 34E10, 34A12

TURSUNOV Dilmurat A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Osh State University, Kyrgyzstan). E-mail: tdaosh@gmail.com

REFERENCES

1. Tikhonov A.N. (1948) O zavisimosti resheniy differentsial'nykh uravneniy ot malogo parametra [On the dependence of the solutions of differential equations on a small parameter]. *Mat. Sb.* (*N.S.*). 22(64). pp. 193–204.
2. Tikhonov A.N. (1952) Sistemy differentsial'nykh uravneniy soderzhashchikh malyye parametry pri proizvodnykh [Systems of differential equations containing small parameters at the derivatives]. *Mat. Sb.* (*N.S.*). 31(73). pp. 575–586.
3. Shishkova M.A. (1973) Rassmotreniye odnoy sistemy differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh [Consideration of a system of differential equations with a small parameter at higher derivatives]. *Dokl. AN SSSR*. 209(3). pp. 576–579.
4. Rivkind V. Ya., Novikov S. P., Petkov V. M., Myasnikov V. P., Fedoryuk M. V., Kucherenko V. V., Davydov A. A., Neishtadt A. I., Kruzhkov S. N., Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D., Sukhov Yu. M., Shukhov A. G., Vainberg B. R., Bakhtin V. I., Vainshtein A. G., Shapiro B. Z., Kondrat'ev V. A., Oleinik O. A., Vishik M. I., Kuksin S.B., Korolev A. G., Ilyashenko Yu. S. (1985) Sessions of the Petrovskii seminar on differential equations and mathemathical problems of physics. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40:5(245). pp. 295–307.
5. Neishtadt A.I. (1987) O zatyagivanii poteri ustoychivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh I [Prolongation of the loss of stability in the case of dynamic bifurcations. I]. *Differ. Uravn*. 23(12). pp. 2060–2067
6. Neishtadt A.I. (1988) O zatyagivanii poteri ustoychivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh II [Prolongation of the loss of stability in the case of dynamic bifurcations. II] *Differ. Uravn*. 24(2). pp. 171–176.
7. *Neishtadt A.I. Sidorenko V.V.* (1995) *Zapazdyvanie poteri ustojchivosti v sisteme Tsiglera* [The delayed of the stability loss in Ziegler's system]. Preprint. Moscow: M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics.
8. Neishtadt A.I. Sidorenko V.V. (1997) Stability loss delay in a Ziegler system. *J. Appl. Math. Mech.* 61(1). pp. 15–25.
9. Ziegler H. (1952) Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. *Ing. Archiv*. 20(1). pp. 49–56.
10. Arnold V.I., Afraimovich V.S., Ilyashenko Yu.S., Shilnikov L.P. (1986) Teoriya bifurkatsiy [Bifurcation theory]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr*. 5. Moscow: VINITI. pp. 5–218.
11. Lomov S.A., Safonov V.F. (1983). Asimptoticheskoe integrirovanie lineynykh zadach v oblasti «neustoychivosti» [Asymptotic integration of linear problems in the region of instability]. *Izv. AN KirgSSR*. 3. pp. 14–29.
12. Arnold V.I. (1990) *Teoriya katastrof* [*The theory of catastrophes*]. Moscow: Nauka. 128 p.

13. Tursunov D.A., Tursunov E.A. (2007) Asimptoticheskoe razlozhenie reshenij singuljarno vozmushhennyh zadach pri narushenii uslovija ustojchivosti [Asymptotic expansion of solutions of singularly perturbed problems when the stability condition is violated]. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki.* 3(29). pp. 12–16.
14. Tursunov D.A. (2018) Asimptotika resheniya zadachi Koshi pri narushenii ustoychivosti tochki pokoya v ploskosti «bystrykh dvizheniy» [Asymptotics of the Cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of "rapid motions"]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 54. pp. 46–57. DOI: 10.17223/19988621/54/4.
15. Alybaev K., Murzabaeva A. (2018) Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy. *AIP Conference Proceedings*. 1997(1). DOI: 10.1063/1.5049070.
16. Taliev A.A. (2014) Zatyagivanie poteri ustoychivosti dlya singulyarno vozmushchennykh uravneniy s nepreryvnymi pravymi chastyami [Stability loss protraction for singularly perturbed equations with continuous right-hand sides]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 4(30). pp. 36–42.
17. Lavrent'ev M.A., Shabat B.F. (1973) Metody teorii funkcii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of a function of a complex variable]. Moscow: Nauka. 739 p.

Received: February 13, 2019

МЕХАНИКА

УДК 551.21.01
DOI 10.17223/19988621/59/4

А.Ю. Албагачиев, В.А. Головешкин, Н.Н. Холин

ДИНАМИКА И РАЗРУШЕНИЕ МАГМАТИЧЕСКИХ СНАРЯДОВ ПРИ ПОДВОДНОМ ИЗВЕРЖЕНИИ ВУЛКАНОВ

Изучено движение и разрушение магматических снарядов в жидкой среде при извержении подводного вулкана. Получены соотношения для времени их движения в толще воды до полного торможения и для соответствующих ему глубин. Определено время достижения критических напряжений, при котором снаряды разрушаются из-за воздействия температурного градиента. Решена модельная задача для определения напряженного состояния магматического снаряда в результате воздействия силы сопротивления среды. Выявлен вклад возможного квазистатического вращения тела в его разрушение.

Ключевые слова: *вулкан*, *подводные извержения*, *магматические снаряды*, *критические напряжения*, *разрушение.*

В процессе извержения подводного вулкана взрывного типа большую роль играют фазовые превращения, происходящие в движущейся магме в условиях быстрой декомпрессии [1]. Сюда можно отнести и образование кристаллической фазы, на базе которой формируются магматические снаряды, представляющие собой раскаленные камни размером от нескольких сантиметров до нескольких метров и часто вылетающие из воды в атмосферу с большими скоростями. Так, например, при извержении в кальдере вулкана Академии наук со дна озера Карымское выстреливались базальтовые снаряды размером 1–1.5 м на расстояния до 5 км [2]. В полной мере проведение натурных и лабораторных исследований этого природного явления не представляется возможным. Поэтому математическое моделирование динамики и разрушения магматических снарядов является уникальным средством исследования на основе механики сплошной среды.

1. Динамика магматического снаряда

Рассматривается динамика движения магматического снаряда от устья жерла вулкана до океанической поверхности. Зная время движения к поверхности, можно оценить критическое напряженное состояние тела, при котором происходит его разрушение из-за неравномерности распределения температуры. Для анализа вертикального движения тела к свободной поверхности океана примем следующую систему уравнений:

$$\frac{mdV}{dt} = -mg - CS\frac{\rho}{2}V^2 ,$$

$$\frac{dH}{dt} = V , \qquad (1.1)$$

где m – масса, V – скорость тела, t – время, g – ускорение свободного падения, C – коэффициент сопротивления среды, S – площадь поперечного сечения тела, ρ – плотность воды, H – расстояние, пройденное телом от точки старта. При $t=0: V=V_0$ (V_0 – начальная скорость тела) и $H=0$. Решение системы уравнений (1.1) запишется в виде

$$V=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} V_0\sqrt{\frac{CS\rho}{2mg}}-\sqrt{\frac{CS\rho g}{2m}}t\right)}{\sqrt{\frac{CS\rho}{2mg}}}, \tag{1.2}$$

$$H=\frac{2m}{CS\rho}\ln\left[\frac{\cos\left(\operatorname{arctg} V_0\sqrt{\frac{CS\rho}{2mg}}-\sqrt{\frac{CS\rho g}{2m}}t\right)}{\cos\left(\operatorname{arctg} V_0\sqrt{\frac{CS\rho}{2mg}}\right)}\right], \tag{1.3}$$

где коэффициент сопротивления среды C определяется из натурных наблюдений за скоростью выхода тела на поверхность океана. В некоторых работах делались попытки определения значения C независимым путем, но использование подобных подходов для конкретных расчетов проблематично.

Пусть в некоторый момент времени $t=t_*$ тело тормозится до нулевой скорости, тогда и из (1.2) следует

$$t_*=\sqrt{\frac{2m}{CS\rho g}}\operatorname{arctg} V_0\sqrt{\frac{CS\rho}{2mg}} \, . \tag{1.4}$$

Соответствующая высота H_* – высота торможения до нулевой скорости, определяется из соотношения (1.3):

$$H_*=-\frac{2m}{CS\rho}\ln\left[\cos\left(\operatorname{arctg} V_0\sqrt{\frac{CS\rho}{2mg}}\right)\right]. \tag{1.5}$$

Если глубина вулкана меньше величины H_*, то снаряд выстреливается в атмосферу. В природе выбросы пирокластических материалов из воды наблюдались для случаев, когда глубина устья жерла вулкана не превышала 400 м. Сравнение с натурными наблюдениями за выходом магматических снарядов позволяет дать оценку значения коэффициента сопротивления воды: $C=0.17-0.25$. По известным значениям скорости вылета снаряда в атмосферу и размера толщи воды из соотношений (1.2) – (1.5) можно определить время его движения в воде и начальную скорость вылета в воду из жерла вулкана.

2. Фрагментация магматического снаряда в результате неоднородного распределения температуры

В процессе движения тела в воде на завершающем этапе его фрагментация может осуществляться за счет неоднородности распределения температурных напряжений. В работе [3] были получены следующие соотношения для радиальных напряжений σ_r и тангенциальных напряжений σ_φ, при известном законе распределения температуры $T(r)$:

$$\sigma_r(r) = \frac{2E}{1-\nu}\frac{\alpha_1}{r^3}\left[\frac{r^3}{R^3}\int_0^R T(z)z^2dz - \int_0^r T(z)z^2dz\right]; \tag{2.1}$$

$$\sigma_\varphi(r) = \frac{E}{1-\nu}\frac{\alpha_1}{r^3}\left[\frac{2r^3}{R^3}\int_0^R T(z)z^2dz - \int_0^r T(z)z^2dz - T(r)r^3\right]. \tag{2.2}$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, α_1 – коэффициент температурного расширения. Для оценки характера распределения температуры по радиусу рассматривается следующая модельная задача. Пусть имеется шар радиуса R с начальной температурой T_0, близкой к температуре плавления базальта (1500 °C), к которому на границе мгновенно «подводится» температура окружающей воды T_w, считающаяся в дальнейшем постоянной и равной нулю. Изменение температуры внутри шара описывается уравнением теплопроводности в сферической системе координат, которое при наличии сферической симметрии имеет решение в виде

$$T = A\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^n\frac{R}{r}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{R^2}\alpha t\right)\right]. \tag{2.3}$$

Здесь $T(r,t)$ – температура (функция радиуса r и времени t), α – коэффициент температуропроводности. Начальное условие: $T(r,0) = T_0$, граничное условие: $T(0,t) = T_w$. Приведенный коэффициент A представляет собой разность температуры на границе и начальной температуры тела (в нашем случае $A < 0$). Качественный анализ соотношений (2.1) и (2.2) показывает, что напряжение имеет положительное значение на поверхности шара и отрицательное значение в его центре. Напряжение σ_r всюду отрицательно и его максимум достигается в центре. Согласно формулам (2.1) и (2.3),

$$\sigma_r(r,t) = \frac{2E}{1-\nu}\alpha_1 A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{R^2}\alpha t\right)\times$$
$$\times\left[(-1)^{n+1}\frac{R^2}{r^2}\cos\left(\frac{n\pi r}{R}\right) + \frac{R^3}{r^3}\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)\right]. \tag{2.4}$$

Если величина $\alpha t / R^2$ порядка единицы, то для оценки возникающих напряжений достаточно ограничиться одним слагаемым:

$$\sigma_r(r,t) = \frac{2E}{1-\nu}\alpha_1 A\frac{2}{\pi^2}\exp\left(-\frac{\pi^2}{R^2}\alpha t\right)\left[-1 - \frac{R^2}{r^2}\cos\left(\frac{\pi r}{R}\right) + \frac{R^3}{r^3}\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)\right].$$

При этом:

$$\sigma_r(0,t) = \frac{2E}{1-v}\alpha_1 A \frac{2}{3}\exp\left(-\frac{\pi^2}{R^2}\alpha t\right)\left(\frac{\pi^2-3}{\pi^2}\right). \tag{2.5}$$

При условии, что если величина $\alpha t / R^2$ мала, то тело успевает охладиться на малую глубину и для оценки характера распределения температуры можно использовать решение одномерной задачи теплопроводности [4]:

$$T(x,t) = A\left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz\right],$$

$$\sigma_r(0,t) = \frac{2E}{1-v}\frac{\alpha_1}{R^3}\left[\int_0^\infty T(z,t)R^2 dz\right] = \frac{2E}{1-v}\frac{\alpha_1}{R}\left[\int_0^\infty T(z,t)\,dz\right]. \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует

$$\sigma_r(0,t) = \frac{2E}{1-v}2\alpha_1 A \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\alpha t}}{R}.$$

Известно, что для большинства материалов наибольшую опасность представляют максимальные напряжения сдвига: $\tau_m = (\sigma_r - \sigma_\varphi)/2$. Согласно статистической теории прочности, зависимость предела прочности от размера тела оценивается формулой

$$\tau_{\text{кр}} = \tau_* \left(\frac{l_*}{l}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{2.7}$$

где $\tau_{\text{кр}}$ – критическое значение напряжения сдвига; τ_*, l_* и m – эмпирические постоянные; l – характерный размер тела или его фрагмента.

Проведем оценки с использованием данных для базальта: коэффициент температурного расширения $\alpha_1 = 7.9\cdot10^{-6}$ 1/К, коэффициент температуропроводности $\alpha = 10^{-6}$ м^2/с, модуль Юнга $E = 10^{11}$ Н/м^2, коэффициент Пуассона $v = 0.25$, предел прочности на сжатие $[\sigma_r] = 2\cdot10^8$ Н/м^2. С учетом (2.7) следует, что время, необходимое для достижения критического напряжения $\sigma_r(0,t) = [\sigma_r]$, определяется из соотношения $\sqrt{\alpha t}/R \approx 7\cdot10^{-2}$. Таким образом, время достижения критических напряжений $t_{\text{кр}}$, определяется формулой $t_{\text{кр}} = 49\cdot10^{-4}R^2/\alpha$. В частности, для тела диаметром 6 см время достижения критических напряжений составит 4.9 с. Таким образом, если размер обломка порядка нескольких сантиметров, то возникающие градиенты температуры могут разрушить его до размеров вулканического пепла. Более крупные снаряды (10 см и выше) разрушаются послойно. Если в качестве размера l в критерии разрушения брать толщину охлажденного слоя , то периодически толщина достигает критического размера и происходит сбрасывание разрушенного слоя.

3. Разрушение магматического снаряда под действием силы сопротивления среды

Определим напряженно-деформированное состояние объекта в плоской упругой постановке. Магматический снаряд моделируется упругим цилиндром радиуса R плотности ρ. Заметим, что количественно результат будет отличаться от сферической модели, но для качественного исследования напряженного состояния тела это различие роли не играет. Предполагается, что скорость V направлена перпендикулярно оси цилиндра. На поверхности действует давление:

$$p = P_0 \cos^2 \varphi \text{, при } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \tag{3.1}$$

$p = 0$ с теневой (нижней) стороны. Угол φ отсчитывается от направления вектора скорости. Величина P_0 представляет собой скоростной напор – произведение квадрата скорости объекта на плотность воды. Поскольку плотность воды на три порядка выше плотности воздуха, то при равных скоростях тело в воде испытывает сопротивление внешней среды на три порядка выше сопротивления атмосферы. При рассмотрении движения магматического снаряда в воде следует учитывать факт быстрого торможения тела по причине квадратичной зависимости величины P_0 от скорости. Именно поэтому сопротивление воды движению тела существенно влияет на его разрушение лишь на начальном этапе. На более поздней стадии движения разрушение движущегося тела в большей степени определяется градиентом температуры. Отметим также, что здесь учитывается также возможное квазистатическое вращение тела при его движении к поверхности.

В рамках упругой постановки имеем

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\frac{4}{3\pi}\frac{P_0}{R}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{4}{3\pi}\frac{P_0}{R}\sin\varphi, \tag{3.2}$$

где σ_{rr}, $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора напряжений.

Связь тензора напряжений с соответствующими составляющими тензора деформаций определяется упругим законом:

$$\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}, \tag{3.3}$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi},$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе, ε_{rr}, $\varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора деформаций, $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$.

Для ε_{rr}, $\varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ имеем

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r},$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right),$$

где u, v – радиальные и азимутальные перемещения.

Граничные условия таковы:

$$\sigma_{rr} = P_0 \cos^2 \varphi \text{, при } |\varphi| \le \pi/2 \text{;}$$

$$\sigma_{rr} = 0 \text{, при } \frac{\pi}{2} \le |\varphi| \le \pi \text{;}$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0 \text{, при } 0 \le |\varphi| \le \pi \text{.}$$

Используя соотношения (3.1) – (3.3) для определения перемещений u, v, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, ее решение ищется в виде сумм тригонометрических рядов [3].

Расчеты показывают, что максимальное сдвиговое напряжение τ_m достигается на луче $\varphi = 0$ на расстоянии $r = 0.21R$, при этом $\tau_{кр} = 0.26P_0$. Величина P_0 зависит от скорости движения тела и с падением скорости вследствие торможения пропорционально квадрату скорости падает и сопротивление среды. Поэтому критические значения максимального напряжения сдвига достигаются на начальной стадии движения. Если тело вращается с умеренной скоростью так, что волновыми эффектами можно пренебречь, то внутри тела образуется полость, в которой действуют максимальные напряжения сдвига.

Проведем качественный анализ перераспределения напряжений на начальном этапе процесса разрушения с учетом возможного вращения объекта. Предположим, что на луче $\varphi = 0$ при $r = R_1 = 0.21R$ имеется круговая полость радиуса R_0. Тензор напряжений $\tilde{\sigma}$ представляется в виде $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 + \Delta\tilde{\sigma}$, где $\tilde{\sigma}_0$ – тензор напряжений, соответствующий решению для сплошного объекта без полости, $\Delta\tilde{\sigma}$ – дополнительная составляющая (вызванная наличием полости). Поскольку размер полости предполагается малым, то в ее окрестности компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}_0$ в системе координат X, Y, где ось X направлена по вектору скорости, соответственно равны

$$\sigma^0_{xx} = -0.61P_0,$$

$$\sigma^0_{yy} = -0.09P_0,$$

$$\sigma^0_{xy} = 0,$$

где σ^0_{xx}, σ^0_{xy}, σ^0_{yy} – компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}_0$ в системе координат X, Y.

Фактически, поставленная задача сводится к задаче о двуосном растяжении плоскости, ослабленной круговым отверстием радиуса R_0. Отметим, что максимальное сдвиговое напряжение $\tau_{кр}$ на границе $r = R_0$ достигается при $\varphi = \pm\pi/2$ и равно соответственно, $\tau_{кр} = 0.48P_0$. Следовательно, $\tau_{кр}$ существенно возрастает, то есть образование разрушенных зон приводит к еще большей активизации процесса разрушения.

Заключение

Проводится исследование разрушения магматических снарядов в процессе их движения в воде от устья жерла вулкана до поверхности океана. Решается задача о вертикальном движении тела с учетом силы сопротивления среды. Получены выражения для времени движения до полного торможения и соответствующей этому времени глубины. Определяется время достижения критических напряжений $t_{кр}$, приводящих к разрушению тела за счет градиента температуры. Приводится оценка значений $t_{кр}$, позволяющая обосновать минимальный размер магматических снарядов, наблюдаемых в природе. Решается модельная задача об определении напряженного состояния упругого тела в результате действия силы сопротивления среды, а также влияние возможного квазистатического вращения на его разрушение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кедринский В.К., Давыдов М.Н., Чернов А.А., Такаяма К.* Начальная стадия взрывного извержения вулканов: динамика состояния магмы в волнах разгрузки // Докл. РАН. 2006. Т.407. № 2. С.190–193.
2. *Федотов С.А.* Одновременное извержение двух вулканов Камчатки в январе 1996 г. // Земля и Вселенная. 1996. № 3. С.60–65.
3. *Холин Н.Н., Головешкин В.А., Андрущенко В.А.* Математические модели волновых явлений в конденсированных средах и динамика метеороидов. М.: Ленанд, 2015. 216 с.
4. *Нигматулин Р.И.* Механика сплошной среды. М.: Гэотар, 2014. 739 с.

Статья поступила 26.09.2018 г.

Albagachiev A.Yu., Goloveshkin V.A., Kholin N.N. DYNAMICS AND DESTRUCTION OF VOLCANIC BOMBS AT UNDERWATER VOLCANIC ERUPTION *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 29–36

DOI 10.17223/19988621/59/4

Keywords: volcano, underwater eruptions, volcanic bombs, critical stresses, destruction.

In this paper, the motion and destruction of volcanic bombs in a liquid medium at underwater volcanic eruption are studied. The equations determining the time of their motion until full braking is achieved in a water column and the corresponding depths are obtained. Two possible mechanisms of volcanic bomb destruction are examined. The first is based on the influence of the non-homogeneous temperature field on the bomb stress-strain behavior. A test problem of the stress-strain state of heated ball with lower temperature specified on its surface is considered as a model. The problem is solved in an elastic quasi-static formulation. The equations for main characteristics of the strain-stress state are obtained. Using the statistical theory of strength, which determines the dependence of the ultimate stress on the body size, the time to peak stresses at which the bombs are destroyed due to the temperature gradient is determined. The second mechanism is based on the effect of the drag force of the medium. A test problem of the cylinder motion in the direction perpendicular to its axe is considered as a model. The problem is solved within the framework of the classical theory of elasticity on the assumption of plane strain state. Using the quasistatic formulation, the problem for determining stress state of the volcanic bomb resulting from the medium drag force is solved. The most probable areas for fracture initiation are detected. The contribution of possible quasistatic rotation of the bomb to its destruction is studied qualitatively.

ALBAGACHIEV Ali Yusupovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: Albagachiev@Yandex.ru

GOLOVESHKIN Vasiliy Adamovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, MIREA – Russian Technological University, Institute of Applied Mechanics of RAS, Moscow, Russian Federation). E-mail: nikshevolog@ya.ru

KHOLIN Nikolay Nikolaevich (Doctor of Technical Sciences, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation). E-mail: mostu@bk.ru

REFERENCES

1. Kedrinskiy V.K., Davydov M.N., Chernov A.A., Takayama K. (2006) The initial stage of explosive volcanic eruption: the dynamic of magma state in depression waves. *Doklady Physics*. 51(3). pp. 140–143. DOI: 10.1134/S1028335806030116.
2. Fedotov S.A. (1996) Odnovremennoe izverzhenie dvukh vulkanov Kamchatki v yanvare 1996 g. [Simultaneous eruption of two volcanoes in Kamchatka in January, 1996]. *Zemlya i vselennaya*. 3. pp. 60–65.
3. Kholin N.N, Goloveshkin V.A., Andrushchenko V.A. (2015) *Matematicheskie modeli volnovykh yavleniy v kondensirovannykh sredakh i dinamika meteoroidov* [Mathematical models of the wave phenomena in condensed media and meteoroid dynamics]. Moscow: Lenand.
4. Nigmatulin R.I. (2014) *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Moscow: Geotar.

Received: September 26, 2018

УДК 532.543
DOI 10.17223/19988621/59/5

Б.В. Бошенятов, К.Н. Жильцов

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН ТИПА ЦУНАМИ С ПОДВОДНЫМИ БАРЬЕРАМИ[1]

Приведены результаты исследования нелинейных эффектов при взаимодействии длинных гравитационных волн типа цунами с подводными барьерами. В качестве математической модели использованы двумерные уравнения Навье – Стокса в приближении несжимаемой жидкости. Численные результаты получены методом конечных объемов с использованием открытого пакета OpenFOAM. Получены новые данные по исследованию эффективности тонкого и непроницаемого подводного барьера. Показано, что при значениях параметра нелинейности волны больше 0.1 подводный барьер оптимальной высоты гасит около 80 % энергии падающей волны.

Ключевые слова: *волна цунами*, *непроницаемые подводные преграды* (*барьеры*), *уравнение Навье – Стокса*, *коэффициенты отражения и вихревых потерь*, *численное моделирование.*

Волны цунами представляют собой серию длинных гравитационных волн, вызванных внезапным изменением уровня воды на огромных площадях Мирового океана. Наиболее частой причиной таких волн являются подводные землетрясения или мощные извержения вулканов. Вдали от мелководья высота волны обычно меньше одного метра, однако длина волны может достигать нескольких сотен километров. Волны цунами, распространяясь в океане как в мелкой воде, вовлекают в движение всю толщу воды от дна до поверхности океана и обладают огромной энергией, которая обрушивается на прибрежные районы в виде огромных (до 30 м) и продолжительных волн. Для защиты жилых и промышленных районов вблизи береговой линии сооружают протяженные и дорогостоящие барьеры, которые проектируют из условия полного отражения наиболее вероятной высоты волны. Однако, когда волна цунами превышает половину высоты барьера над уровнем моря, барьер превращается в подводный, при этом его эффективность резко падает, поскольку любой искусственный барьер по сравнению с характерной длиной волны цунами является тонким [1]. Точные аналитические решения задачи о взаимодействии волн типа цунами с тонкими подводными барьерами пока удалось получить лишь для уравнений потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости [2]. С другой стороны, известно, что эти решения, в ряде случаев, противоречат экспериментальным данным. Так, в работе [3] была обнаружена аномально высокая степень подавления амплитуды волны типа цунами при её взаимодействии с двумя подводными барьерами, расстояние между которыми намного меньше длины волны $L \ll \lambda$. В работах [4, 5] показано, что аномально высокое подавление амплитуды волны в экспериментах [3] объясняется

[1] Статья написана при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТГУ №8.1.33.2018 и Государственного задания ИПРИМ РАН (№ гос. регистрации темы АААА-А19-119012290136-7).

образованием вблизи преград крупномасштабных вихревых структур, которые аккумулируют в себе значительную часть энергии падающей волны. При этом максимальное поглощение энергии вихревыми структурами имеет место, когда расстояние между барьерами $L \approx 2H$, где H – глубина воды в месте расположения преград. В работе [6] численно и экспериментально изучалось распространение так называемой уединенной волны, «солитона», над прямоугольным непроницаемым барьером (высота барьера $h = 0.1$ м, толщина $b = 0.02$ м), установленном на дне волнового лотка. Глубина воды в лотке $H = 0.14$ м оставалась неизменной, амплитуда падающей волны изменялась так, что $0.1 < A/H < 0.5$. Показано, что при этих условиях эксперимента за преградой образуется сложное вихревое поле, которое, взаимодействуя со свободной поверхностью, в ряде случаев формирует вблизи преграды стоячую волну с обрушением. Исследованы зависимости коэффициентов отражения $K_R = A_R/A$ (A_R – усредненная высота отраженной от преграды волны) и прохождения K_T гравитационной волны через преграду, а также зависимость относительного коэффициента потерь энергии на преграде $K_V = \sqrt{1 - K_R^2 - K_T^2}$ от параметра нелинейности волны A/H. Установлено, что максимальная величина диссипации энергии на преграде достигается при $A/H = 0.15$ и составляет около 25 % от энергии падающей волны. Важно отметить, что в этой работе исследования проводились при относительно короткой длине волны λ, величина параметра $H/\lambda \approx 0.15$. Отметим, что для натурных волн цунами у побережья, где обычно устанавливают преграды, параметр $H/\lambda < 0.001$ [7]. В работах [7, 8] подвергается критике популярная практика моделирования волн цунами уединенной волной, поскольку длина такой волны с увеличением её высоты уменьшается: при $A/H > 0.2$ параметр $H/\lambda > 0.15$. Отмечается, что при изучении эффективности подводных барьеров такое моделирование, из-за недостаточной длины уединенных волн, в ряде случаев приводит к неверной оценке нелинейных и вязких эффектов.

Отличительной особенностью наших исследований является то, что численное моделирование изучаемых явлений проводится на основе и, как правило, совместно с экспериментами в гидродинамическом лотке Института прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН) [9–11]. Конструкция гидродинамического лотка и высокоточный метод измерения уровня воды [12, 13] обеспечивают достаточно полное моделирование волн цунами. В частности, установка оснащена генератором волны кессонного типа (без подвижных элементов), который с высокой точностью создает длинную гравитационную волну (параметр $H/\lambda = 0.03$) заданной амплитуды с параметрами (исключая моделирование по числам Рейнольдса), близкими к натурным для реальных волн цунами. Так, в работе [14] впервые было обнаружено, что существует оптимальная высота преграды $h \approx 0.87H$, при которой в крупномасштабных вихревых структурах, вблизи тонкой непроницаемой преграды, аккумулируется максимальная энергия W_V. В работе [15] разработана теоретическая модель, которая объясняет существование оптимальной высоты преграды, и из которой следует, что вихревые потери энергии могут достигать 50% от энергии падающей волны. Однако из тех же экспериментов следует, что при взаимодействии волн с тонкой одиночной преградой заданной высоты наблюдается довольно значительный разброс данных по относительным энергиям вихревых потерь W_V/W, что в ряде случаев приводило к снижению (до 30 %) суммарной энергии подавления волн.

Таким образом, экспериментальные результаты работы [14] свидетельствуют о том, что необходимы более детальные исследования с целью выявления дополнительных условий и параметров, влияющих на эффективность вихревого подавления волн типа цунами подводными барьерами. В этом и состоит основная цель данной работы.

В работе приведены результаты численных исследований нелинейных эффектов при взаимодействии волн типа цунами с тонким подводным барьером при его высоте, близкой к оптимальной $h/(H + A) = 0.855–0.875$. В численных экспериментах изменялась лишь высота падающей волны. Длина волны, глубина воды и высота барьера оставались неизменными. Численное моделирование изучаемых волновых процессов проводилось в виртуальном волновом лотке, размеры которого в точности совпадали с размерами реального гидродинамического лотка ИПРИМ РАН: длина лотка 15 м, ширина – 0.26 м, высота – 0.4 м.

Методы исследования

Математическая постановка задачи

Рассматривается двумерная $(x - y)$ нестационарная задача о течении несжимаемой вязкой жидкости со свободной границей в канале с препятствием, моделирующая волновое движение. В декартовой системе координат ось x направлена вдоль канала, ось y – вертикально вверх. Для описания движения вязкой несжимаемой жидкости используется система уравнение Навье – Стокса совместно с уравнением неразрывности:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} + (\vec{\upsilon}\cdot\nabla)\vec{\upsilon}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{\upsilon} + \rho\vec{g}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,, \tag{2}$$

где $\vec{\upsilon} = (u, v)$ – вектор скорости, ρ – плотность, p – давление, $\vec{g}$ – ускорение силы тяжести, μ – коэффициент динамической вязкости.

На всех твердых границах канала граничные условия соответствуют условиям прилипания:

$$\vec{\upsilon} = 0\,. \tag{3}$$

На свободной поверхности жидкости $y = d(x,t) = H + \xi(x,t)$, где $\xi(x,t)$ – смещение свободной поверхности, в традиционной постановке соблюдаются кинематическое условие

$$\frac{\partial d}{\partial t} + u\frac{\partial d}{\partial x} = v \tag{4}$$

и динамические условия равенства нормального напряжения сумме внешнего и капиллярного давлений, а также отсутствия касательных напряжений:

$$\begin{aligned} p_{nn} &= -p_0 + p_k, \\ p_{ns} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где p_k – капиллярное давление.

В качестве начальных условий в момент времени $t = 0$ задается распределение функции $d(x,0)$, соответствующее начальному перепаду уровня воды в канале. При $0 \le x \le 1.5$ м распределение $d(x,0) = H + 2A$, при 1.5 м $< x \le 15$ м – $d(x,0) = H$.

В наших расчетах мы полагаем, что течение в канале является ламинарным. Обоснованием такого подхода являются результаты экспериментов в каналах прямоугольного сечения [16], которые свидетельствуют о достаточно высоких числах Рейнольдса перехода в турбулентное состояние $\mathbf{Re}^* = \rho_1 U_{\text{ср}} H/\mu_1$, где $U_{\text{ср}}$ – усредненная по глубине скорость жидкости, H – начальная глубина воды в канале. При этом величина $\mathbf{Re}^*$ увеличивается с уменьшением расстояния от входа в канал. Так, при $x/H = 60$ начало перехода в турбулентное состояние соответствует значению $\mathbf{Re}_1^* = 8\cdot 10^3$, а конец перехода $\mathbf{Re}_2^* = 1.8\cdot 10^4$. Кроме того, известно, что с уменьшением начальных возмущений в потоке жидкости число Рейнольдса перехода также увеличивается. В нашем случае, при длине волны $\lambda \approx 3$ м, $H \approx 0.1$ м величина $x/H \le 30$, а начальные возмущения перед волной близки к нулю.

Методика расчета

Уравнения (1), (2) с соответствующими начальными и граничными условиями решались с помощью метода контрольных объемов. Численные расчеты проводились с использованием решателя InterFoam свободно распространяемого пакета программ OpenFOAM [18]. В процессе расчета временной шаг был нефиксированным и рассчитывался автоматически из условия, что число Куранта не должно быть больше 0.6. Расчет физического времени прохождения волны по каналу составляет 20 с.

Для расчета среды использовался метод Volume of Fluid (*VOF*), предложенный в [17], позволяющий отслеживать изменение границы раздела сред вода – воздух. Уравнение переноса записывается в виде

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \vec{\upsilon}\cdot\nabla\gamma = 0, \quad 0 \le \gamma \le 1, \tag{6}$$

где γ – объемная концентрация вещества в расчетной ячейке. Когда $\gamma = 0$ – в расчетной ячейке находится воздух, $\gamma = 1$ – в расчетной ячейке находится жидкость. Если $0 < \gamma < 1$ – расчетная ячейка находится на границе раздела сред.

Локальная плотность и вязкость в каждой расчетной ячейке в зависимости от параметра γ рассчитываются по формулам

$$\rho = \gamma\rho_{\text{в}} + (1-\gamma)\rho_{\text{ж}},$$
$$\mu = \gamma\mu_{\text{в}} + (1-\gamma)\mu_{\text{ж}}.$$

Для проверки аппроксимационной сходимости численного метода были выполнены расчеты на последовательности сеток. Численные расчеты проводились для расчетной области длиной 15 и высотой 0.120 м. Амплитуда падающей волны $A = 3.5$ мм, начальный уровень воды в канале $H = 0.103$ мм. Сетка расчетной области состояла из структурированных прямоугольных ячеек, которые в процессе расчета имели фиксированный размер. Мелкая расчетная сетка имела шаг

$\Delta x = 0.002$ метра, а шаг $\Delta y = 0.001$ м и состояла из 900 000 ячеек. Промежуточная расчетная сетка имела шаг $\Delta x = \Delta y = 0.002$ м и состояла из 450 000 ячеек. Грубая расчетная сетка имела шаг $\Delta x = \Delta y = 0.004$ м и состояла из 112 000 ячеек. Валидация численного расчета проводилась путем сравнения кривой смещения свободной поверхности $d(t)$ с аналогичной кривой, полученной в эксперименте. На рис. 1 представлено сравнение численных расчетов на различных расчетных сетках с экспериментом в сечении $x = 5.245$ м. Как можно видеть, численное решение имеет сходимость на последовательности сеток. Мелкая расчетная сетка также имеет хорошее совпадение с экспериментальной кривой.

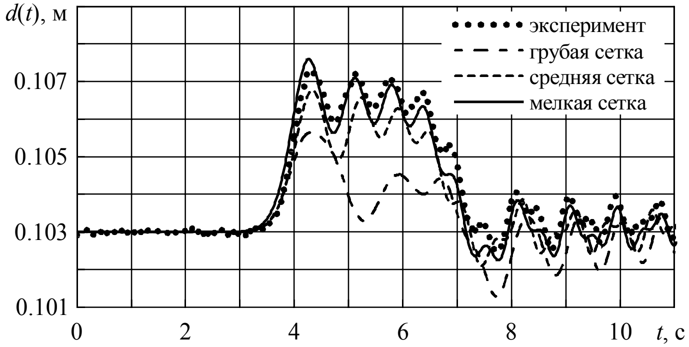


Рис. 1. Временная зависимость смещения поверхности воды $d(t)$
Fig. 1. Water level evolution with time $d(t)$

Методика численного моделирования была верифицирована прямым сравнением с соответствующими экспериментами и для случая более сложной задачи – трансформации и обрушения сильно нелинейной волны ($A/H \approx 1$) при её взаимодействии с пологим мелководьем. Данные результаты можно увидеть в работе [10].

Методика исследований

В начальный момент времени в расчетной области задается распределение объемной концентрации γ, соответствующее начальному состоянию уровня воды в рабочей части лотка (длина 13.5 м) и в генераторе волны (длина которого равна 1.5 м). При $t = 0$ распределение скорости во всей расчетной области лотка задавалось равным нулю. С началом расчета под действием силы тяжести начинается волновое движение.

Исследуемый барьер (преграда) устанавливался вблизи середины лотка, чтобы исключить влияние отраженных волн от торцевых стенок лотка. В данных исследованиях он располагался на расстоянии 9.04 м от начала лотка. Высота барьера $h = 95$ мм, а толщина $b = 10$ мм. Глубина воды в гидродинамическом лотке и длина генерируемой волны оставались неизменными: $H = 103$ мм, $\lambda = 3000$ мм, а высота падающей волны изменялась от 0.5 до 16.5 мм, т.е. в более широком, чем в работе [14] диапазоне. В трех сечениях рабочей части гидродинамического лотка, на расстояниях 4.5, 6 и 12 м от начала лотка фиксировался уровень воды в зависимости от времени: $H+\xi(t) = d(t)$. На рис. 2 дан схематический чертеж, образующихся волн при взаимодействии с подводным барьером.

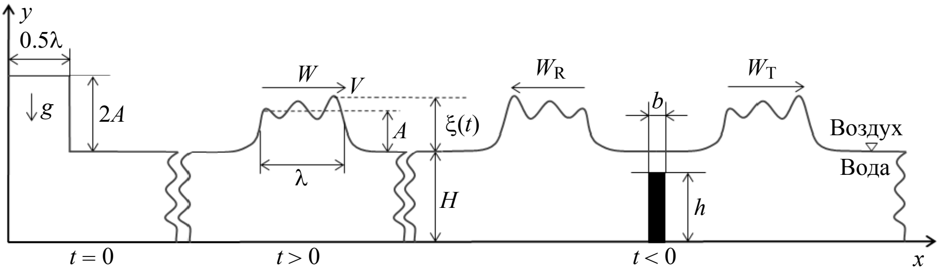


Рис. 2. Схематический чертеж гравитационной волны, образующейся при взаимодействии с подводным барьером
Fig. 2. Schematic diagram of the gravitational waves generated when interacting with underwater barrier

По расчетным зависимостям уровня $d(t)$, полученных в этих сечениях, строились волновые диаграммы смещения свободной поверхности для каждого численного эксперимента, что позволяло надежно идентифицировать падающие отраженные и прошедшие через преграду волны и вычислять скорости их распространения. Коэффициенты K_{R}, K_{T} и K_{V} определялись на основе вычисления полной энергии соответствующих волн:

$$K_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{W_{\mathrm{R}}}{W}}; \qquad K_{\mathrm{T}} = \sqrt{\frac{W_{\mathrm{T}}}{W}}; \qquad K_{\mathrm{V}} = \sqrt{1 - \frac{W_{\mathrm{R}}}{W} - \frac{W_{\mathrm{T}}}{W}}\,. \tag{7}$$

Полная энергия гравитационной волны равна сумме потенциальной и кинетической энергий $W = W_p + W_k$:

$$W_p = \frac{g\rho_1}{2}\int_0^{\lambda} \xi^2(x)dx = \frac{g\rho_1}{2}V\int_0^{T} \xi^2(t)dt\,; \tag{8}$$

$$W_k = \frac{\rho_1}{2}\int_0^{\lambda} dx \int_0^{H+\xi} \upsilon^2(x,y)dy = \frac{\rho_1}{2}V\int_0^{T} dt \int_0^{H+\xi} \upsilon^2(x,y)dy\,. \tag{9}$$

В формулах (8) и (9) g – ускорение силы тяжести, V – скорость гравитационной волны. Скорость распространении слабых волн ($A/H < 0.1$) равна скорости распространения малых возмущений в мелкой воде: $V = c = \sqrt{gH}$. При этом $W_k = W_p$ и полная энергия волны $W = 2W_p$. Таким образом, в этом случае полную энергию волны легко вычислить по формуле (8) только на основе измерения зависимости $\xi(t)$ [1].

Обсуждение результатов

Результаты численного моделирования

Основная цель наших исследований, результаты которых приведены в данной работе, заключается в том, чтобы найти оптимальные условия взаимодействия волн типа цунами с непроницаемыми подводными барьерами, при которых суммарный эффект подавления энергии волн будет максимальным. Для тонких непроницаемых преград суммарный эффект подавления складывается из энергии в отраженной волне и вихревой энергии, аккумулируемой вблизи преграды. Чтобы упростить задачу, на первом этапе исследований наши усилия были сосредоточены на детальном исследовании физических эффектов при взаимодействии с преградами лишь слабых гравитационных волн ($A/H < 0.16$), при этом моделируемая волна цунами имела достаточно продолжительное время взаимодействия с преградой, чтобы крупномасштабные вихревые структуры вблизи преграды могли полностью установиться.

На рис. 3 дана зависимость относительной вихревой энергии (по отношению к энергии падающей волны W), аккумулируемой вблизи тонкой непроницаемой преграды, от относительной высоты преграды, построенная на основе экспериментов и численного моделирования работы [14].

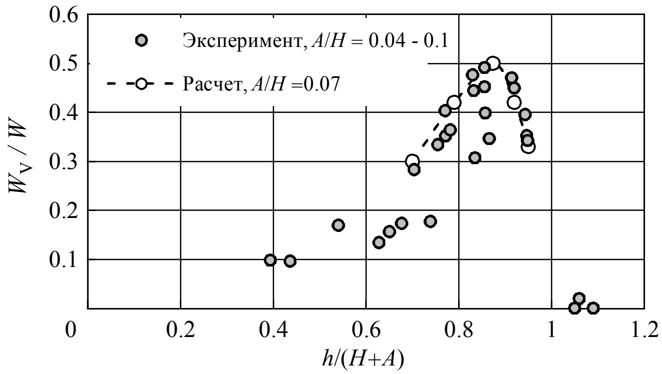


Рис. 3. Относительная вихревая энергия W_V/W, аккумулируемая вблизи тонкой непроницаемой преграды в зависимости от безразмерной высоты преграды

Fig. 3. Relative energy of the eddies W_V/W, accumulated near a thin impermeable barrier, as a function of dimensionless height of the barrier

Видно, что с увеличением высоты барьера в диапазоне $0 < h/(H+A) < 0.87$ вихревая энергия плавно увеличивается, достигая максимума (до 50 % от энергии падающей волны), а затем резко уменьшается до нуля. Далее высоту барьера $h \approx 0.87H$, при которой вихревые потери достигают максимума, будем называть оптимальной высотой. Важно отметить, что при оптимальной высоте преграды разброс экспериментальных данных достигает 30 и более процентов, что свидетельствует о влиянии на эффективность вихреобразования другого неучтенного параметра.

На рис. 4 приведены относительные потери энергии на преграде в зависимости от параметра нелинейности: $W_V/W = f(A/H)$. Треугольные маркеры – данные, полученные в результате численного моделирования по вышеизложенной методике, при оптимальной высоте барьера. Круглые маркеры – данные численного моделирования, взятые из работы [6], при относительной высоте барьера меньше оптимальной: $h/(H+A) < 0.65$.

Из рис. 4 видно, что при $A/H > 0.1$ и высоте подводной преграды, близкой к оптимальной, потери энергии падающей волны при прохождении через преграду (т.е. без учета отраженной энергии) достигают 50 % и почти в два раза больше, чем при высоте $h/(H+A) < 0.65$. При этом, вне зависимости от высоты преграды, имеет место слабая зависимость от параметра нелинейности. При значениях параметра $A/H < 0.075$ и оптимальной высоте барьера мы наблюдаем резкое уменьшение энергетических потерь. Визуализация поля скоростей вблизи барьера наглядно демонстрирует причины наблюдаемой на рис. 4 зависимости.

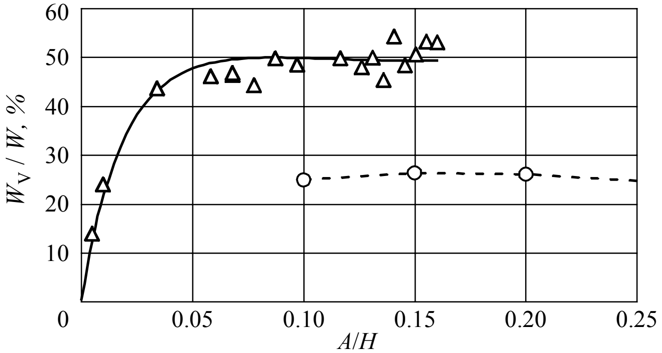


Рис. 4. Зависимость относительной энергии, аккумулируемой в вихревых структурах, от параметра нелинейности. Треугольные маркеры – для оптимальной высоты преграды, круглые маркеры – результаты работы [6], полученные при высоте преграды $h/(H+A) < 0.65$

Fig. 4. Relative energy accumulated in the eddy structures as a function of nonlinearity parameter. The triangles indicate the optimum barrier height; the circles, the numerical results obtained at the barrier height of $h/(H+A) < 0.65$ in [6]

На рис. 5 приведены результаты численного моделирования динамики поля скоростей вблизи непроницаемого подводного барьера оптимальной высоты $h = 0.85(H + A)$ и при значении параметра $A/H = 0.068$, больше которого потери энергии достигают максимальной величины, равной 50 % от энергии падающей волны (см. рис. 4).

Из рис. 5 видно, при $t = 7$ с передний фронт гравитационной волны приблизился к преграде. Скорость потока за фронтом волны увеличивается со временем пропорционально уровню воды $\xi(t)$. При $t = 7.4$ с картина обтекания становиться несимметричной, за угловой точкой преграды уже виден зарождающийся вихрь. При $t = 7.6$ с – вихрь за преградой полностью сформировался и далее, отбирая энергию у проходящей через преграду волны, он увеличивается в размерах до максимального диаметра равного глубине воды в лотке, а затем ($t = 9.5$ с) начинается формирование второго вихря с противоположным вращением. При $t = 11$ с мы видим вблизи преграды сформировавшиеся крупномасштабные вихревые образования, суммарная энергия которых составляет 50 % (теоретический максимум [15] от энергии падающей волны). В это время задний фронт гравитационной волны уже ушел за поле зрения кадра. Видим, что скорость жидкости вне вихревых структур близка к нулю. Далее при $t = 11$–14 с вихревые образования живут своей жизнью, взаимодействуя друг с другом и распадаясь на более мелкие вихреобразования, постепенно теряя энергию, из-за внутреннего трения жидкости.

На рис. 6, при взаимодействии с той же преградой более слабой волны $A/H = 0.0048$ мы наблюдаем совершенно другую картину. Из рис. 6 видно, что симметричное (потенциальное) обтекание преграды без вихрей продолжается более 1 с – рис. 5, *а* – 5, *е*. Образование вихря наблюдается лишь на девятой секунде. При $t = 9.5$ с небольшой вихрь у верхней угловой кромки преграды полностью сформировался. При $t = 11$ с взаимодействие падающей волны с преградой и рост размера вихря практически прекратились, скорость жидкости вне

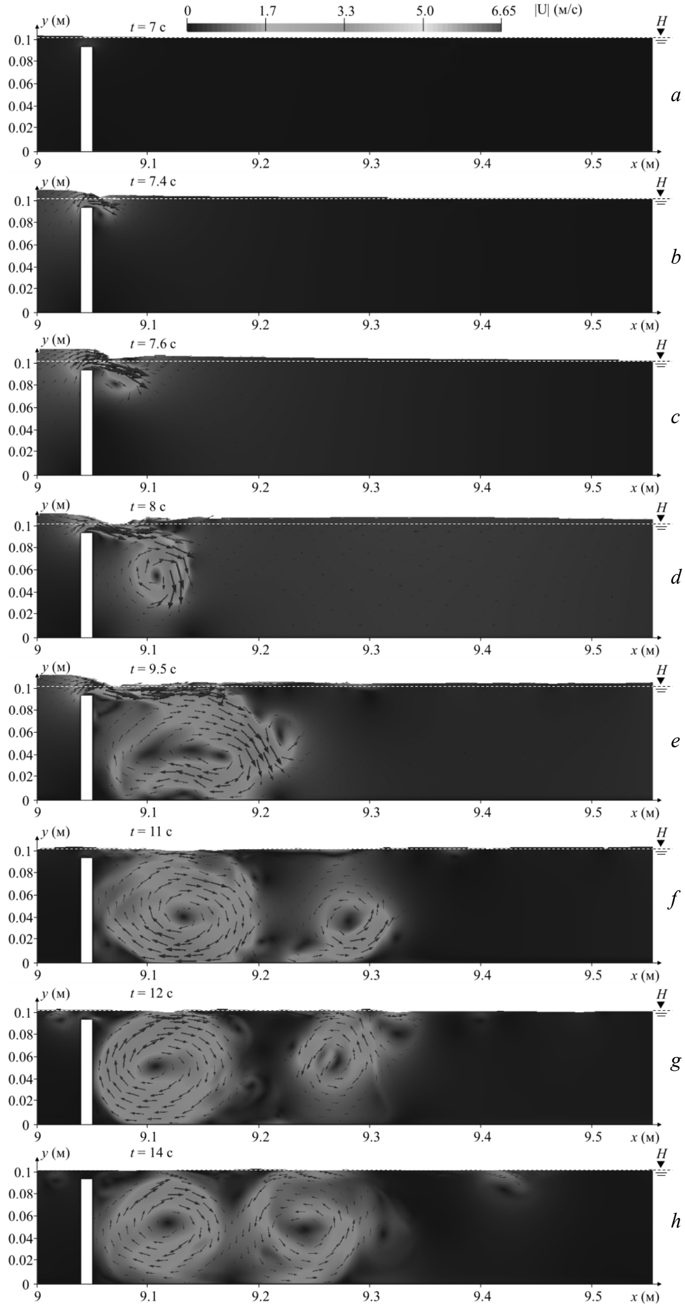


Рис. 5. Процесс генерации и эволюции вихрей за непроницаемой преградой оптимальной высоты при $A/H = 0.068$. На всех характерных кадрах течения тонкой пунктирной линией показан начальный уровень воды в волновом лотке

Fig. 5. Eddy generation and evolution behind the impermeable barrier of optimal height at $A/H = 0.068$. The dashed line indicates the initial water level in a wave flume

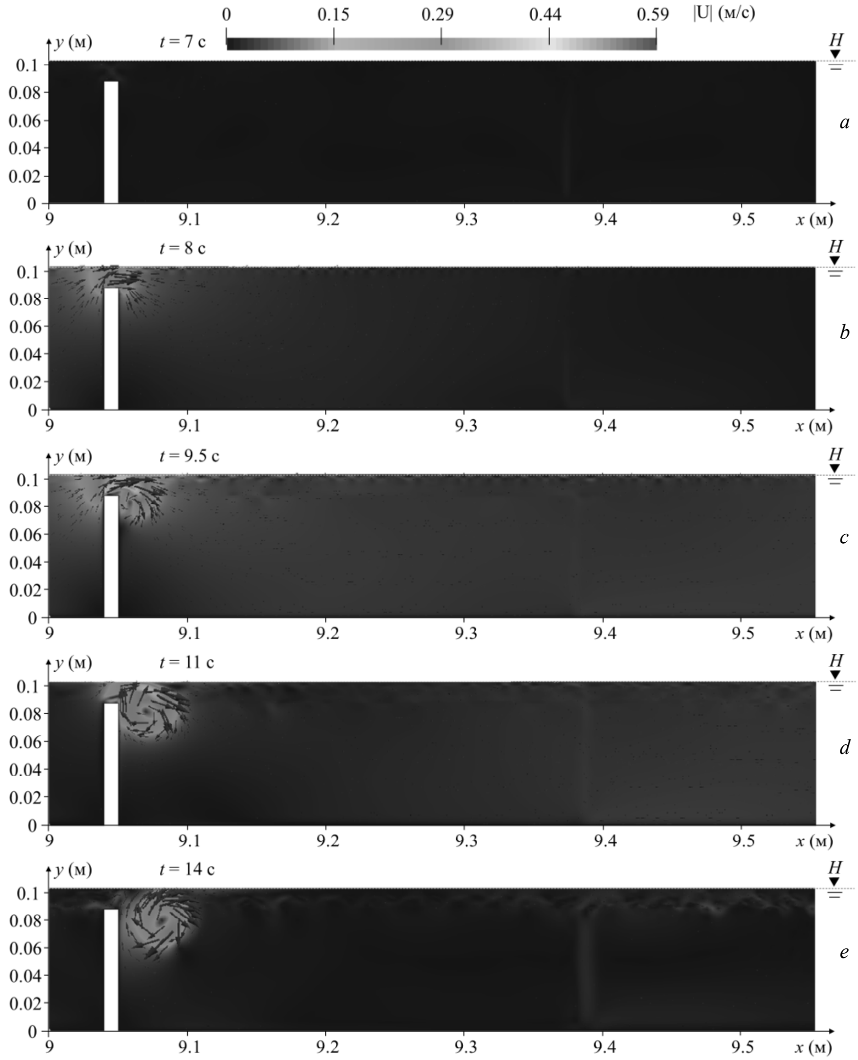


Рис. 6. Процесс генерации и эволюции вихрей за непроницаемой преградой оптимальной высоты при $A/H = 0.0048$. Тонкой пунктирной линией (на всех кадрах) показан начальный уровень воды в волновом лотке

Fig. 6. Eddy generation and evolution behind the impermeable barrier of optimal height at $A/H = 0.0048$. The dashed lines indicate the initial water level in a wave flume (in all the pictures)

вихревого образования близка к нулю. В этот момент времени в соответствии с рис. 4 вихревая энергия не превышает 10 %. Далее происходит постепенная диссипация вихревой энергии, которая локализована вблизи преграды.

Таким образом, представленная на рис. 4 зависимость энергетических потерь при прохождении длинной гравитационной волны над подводным барьером объясняется характером вихреобразования в непосредственной близости за барьером, который зависит не только от высоты барьера, но и от высоты падающей волны.

Условия образования вихревых структур в исследованиях [6, 19] и многих других, например [20], не соответствуют оптимальным. Высота преград, как правило, меньше оптимальной величины. Поэтому, даже для гравитационных волн относительно большой высоты $A/H > 0.1$ потери энергии на преграде не превышают 30 %. Кроме того, во многих случаях волну цунами моделируют относительно короткими волнами, продолжительности которых недостаточно для полномасштабного развития вихревых структур [8]. Этим и объясняется существенно более низкая эффективность подводных преград в подавлении энергии гравитационных волн, которую наблюдали другие авторы подобных исследований.

Довольно неожиданным результатом наших исследований является то, что относительная энергия W_R/W, уносимая отраженной от барьера волной, так же, как и вихревая W_V/W, зависит от высоты падающей волны. На рис. 7 приведена зависимость коэффициента отражения K_R от параметра нелинейности при оптимальной высоте барьера. Там же, для сравнения, приведены данные работ [6, 19], полученные при высоте барьера меньше оптимальной. Кроме того, на рис. 7 пунктирными линиями показаны соответствующие величины коэффициента отражения волны от преграды той же высоты, но бесконечно большой протяженности в направлении распространения волны $b = \infty$, рассчитанные по линейной теории мелкой воды [1]:

$$K_R = \frac{\sqrt{H} - \sqrt{H-h}}{\sqrt{H} + \sqrt{H-h}} = 0.564\,. \tag{10}$$

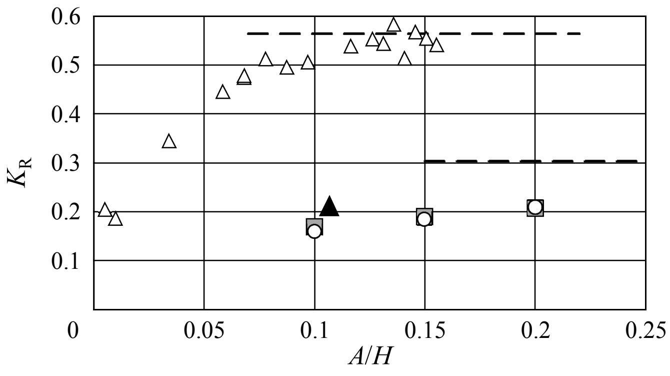


Рис. 7. Зависимость коэффициента отражения K_R от параметра нелинейности A/H. Треугольные маркеры относятся к преграде оптимальной высоты, круглые и прямоугольные маркеры – численные данные работ [6, 19] Штриховые линии – соответствующий расчет по линейной теории мелкой воды для преграды бесконечной толщины ($b = \infty$) в виде ступеньки.

Fig. 7. Dependency diagram of the reflection coefficient K_R on the nonlinearity parameter A/H. The triangles indicate the optimum barrier height; the circles and squares, the numerical results from [6, 19]; the dashed lines, the results calculated using a linear theory of shallow water for a barrier of infinite thickness ($b = \infty$) in the form of step

Видно, что в диапазоне изменения $0.05 < A/H < 0.12$ коэффициент отражения увеличивается от 0.2 до максимально возможной величины при заданной высоте преграды равной 0.564, рассчитанной по формуле (10). Расчетные данные работ [6, 19], полученные при взаимодействии гравитационной волны с подводной преградой, высота которой отличалась от оптимальной $h/(H+A) < 0.65$, находятся значительно ниже полученных в данной работе результатов. Видно, что в этом случае коэффициенты отражения не превышают 0.22 и на 25 % ниже максимально возможной величины при той же высоте преграды, рассчитанной по формуле (10). Также на рис. 7 черный треугольник – численный расчет, проведенный нами и повторяющий условия работы [19]. Можно отметить, что имеющееся отклонение от данных работы [19] является результатом того, что авторы рассматривали более короткую уединенную волну.

Отметим, что наши исследования взаимодействия волн типа цунами с подводными преградами конечной толщины [21] показали, что для преграды оптимальной высоты и толщины $b > 0.1\lambda$ коэффициент отражения практически не изменяется и равен коэффициенту отражения от преграды бесконечной толщины ($b = \infty$). Таким образом, образование за преградой крупномасштабных вихревых структур увеличивает эффективную толщину преграды, делая ее волновое сопротивление эквивалентным волновому сопротивлению преграды бесконечной толщины $b = \infty$. При этом коэффициент отражения можно с достаточной точностью вычислять по формуле (10).

В заключение статьи приведем график, который характеризует суммарную эффективность тонкой (по отношению к длине волны) преграды оптимальной высоты в зависимости от параметра нелинейности A/H. На рис. 8 дана такая зависимость: $\dfrac{W_\mathrm{R} + W_\mathrm{V}}{W} \cdot 100\,\% = f(A/H)$. Для сравнения на рис. 8 приведены расчетные данные работы [6], в которой исследовались характеристики подобной преграды произвольной (не оптимальной) высоты при взаимодействии с более короткой волной.

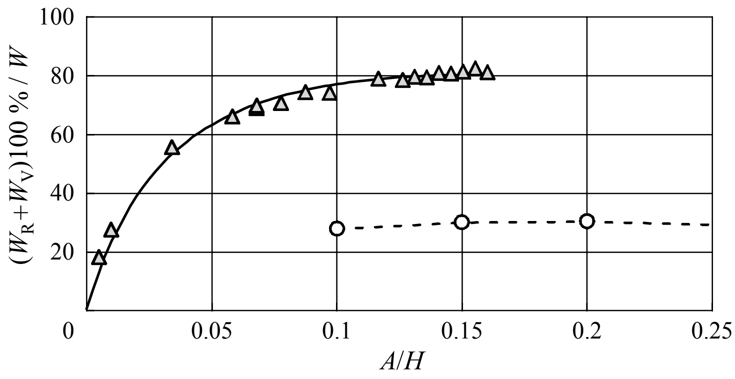


Рис. 8. Суммарная эффективность тонкой и непроницаемой подводной преграды: треугольные маркеры соответствуют оптимальной высоте преграды $h \approx 0.8H$; круглые маркеры – данные работы [6] при высоте преграды ниже оптимальной

Fig. 8. Total efficiency of the thin impermeable underwater barrier: the triangles indicate the optimum barrier height $h \approx 0.8H$; the circles, the results for barrier height lower than optimum presented in [6]

Из рис. 8 видно, что для слабых волн $A/H < 0.1$, падающих на преграду, суммарная эффективность преграды сильно зависит от высоты волны. При значениях параметра нелинейности $A/H < 0.01$ суммарные потери энергии не превышают 20 %. При значениях $0.13 < A/H < 0.16$ потери энергии на преграде оптимальной высоты достигают максимальной величины равной 80 % от энергии падающей волны; данные по эффективности подобной преграды не оптимальной высоты, приведенные в работе [6], более чем в 2.5 раза ниже.

Заключение

Получены новые результаты исследований особенностей взаимодействия длинных гравитационных волн типа цунами с непроницаемыми подводными барьерами. Ранее было установлено [4, 6, 14], что в ряде случаев вблизи тонкой непроницаемой преграды образуются крупномасштабные вихревые структуры, которые аккумулируют значительную часть (25 % и более) энергии, проходящей над ней волны. В работах [14, 15], было показано, что существует оптимальная высота преграды, при которой энергия вихревых структур может достигать максимальной величины равной 50 % от энергии падающей волны. Таким образом, суммарная эффективность тонкой подводной преграды определяется не только энергией отраженной волны, но и энергией крупномасштабных вихревых структур, образующихся вблизи преграды.

Установлено, что при оптимальной высоте подводного барьера $h \approx 0.8H$ как энергия отраженной волны, так и энергия, поглощаемая вихревыми структурами, зависят от высоты падающей волны. При значениях $A/H < 0.0001$, что соответствует натурным величинам для волн цунами в глубоком океане, течение вблизи тонкого подводного барьера высотой $h < 0.9H$ имеет практически потенциальный характер и волны типа цунами преодолевают эти барьеры практически без потерь энергии. При значениях $A/H > 0.1$ и оптимальной высоте барьера суммарные потери энергии на тонкой преграде составляют около 80 % от энергии падающей волны: 30 % отраженная энергия и 50 % – вихревая.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин Б.В.*, *Носов М.А.* Физика цунами и родственных явлений в океане. М.: Янус-К, 2005. 360 с.
2. *Li Ai-jun*, *Liu Yong*, *Li Hua-jun*. Accurate solutions to water wave scattering by vertical thin porous barriers // Hinduwi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering. 2015. Article ID 985731. 11 pages. http://dx.doi.org/10.1155/2015/985731.
3. *Фридман А.Н.*, *Альперович Л.С.*, *Шемер Л.*, *Пустильник Л.*, *Штивельман Д.*, *Марчук Ан.Г.*, *Либерзон Д.* О подавлении волн цунами подводными барьерами // УФН. 2010. Т. 180. № 8. С. 843–850
4. *Бошенятов Б.В.*, *Жильцов К.Н.* Математическое моделирование взаимодействия длинных волн типа цунами с комплексом преград // Современные наукоемкие технологии. 2015. № 12. С. 80 – 83.
5. *Boshenyatov B.V.*, *Zhiltsov K.N.* Simulation of the interaction of tsunami waves with underwater barriers // American Institute of Physics. Conference Series. 2016. V. 1770. No. 3. P. 030088.
6. *Wu Y.T.*, *Hsiao S.C.*, *Huang Z.C.*, *Hwang K.S.* Propagation of solitary waves over a bottom-mounted barrier // Coastal Engineering. 2012. V. 62. P. 31–47. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2012.01.002.
7. *Madsen P.A.*, *Fuhrman D.R.*, *Schaffer H.A.* On the solitary wave paradigm for tsunamis // Journal of Geophysical Research. 2008. V. 113: C12012. DOI: 10.1029/2008JC004932.

8. *Qu K.*, *Ren X.Y.*, *Kraatz S.* Numerical investigation of tsunami-like wave hydrodynamic characteristics and its comparison with solitary wave // Applied Ocean Research. 2017. V. 63. P. 36–48.
9. *Бошенятов Б.В.*, *Попов В.В.* Экспериментальные исследования взаимодействия волн типа цунами с подводными преградами // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55. № 9/3. С. 145−150.
10. *Бошенятов Б.В.*, *Лисин Д.Г.* Численное моделирование волн типа цунами в гидродинамическом лотке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6 (26). С. 45–55.
11. *Бошенятов Б.В.* Особенности моделирования волн цунами в лабораторной установке // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015) 2015. С. 384–385.
12. *Бошенятов Б.В.*, *Левин Ю.К.*, *Попов В.В.*, *Семянистый А.В.* Метод измерения волн малой амплитуды на водной поверхности // ПТЭ. 2011. № 2. С. 116–117.
13. *Бошенятов Б.В.*, *Левин Ю.К.*, *Попов В.В.* Устройство измерения уровня воды // Патент РФ на изобретение № 2485452. Приоритет 07.10.2010. Заявка № 2010141060. Зарегистрировано 20.06.2013.
14. *Бошенятов Б.В.* О подавлении волн цунами подводными преградами // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452. № 4. С. 392–395.
15. *Бошенятов Б.В.* О вихревом механизме подавления волн цунами подводными преградами // Доклады Академии наук. 2017. Т. 477. № 4. С. 485–487.
16. *Кутателадзе С.С.*, *Миронов Б.П.*, *Накоряков В.Е.*, *Хабахпашева Е.М.* Экспериментальные исследования пристенных турбулентных течений. Новосибирск: Наука, 1975. 166 с.
17. *Hirt*, *C.W.*, *Nichols*, *B.D.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free Boundaries // J. Comp. Phys. 1981. V. 39. P. 201–225; DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5.
18. *OpenFOAM* Foundation. OpenFOAM. User guide. Available at http://www.openfoam.org. 2016. p. 211.
19. *Wu Y.T*, *Hsiao S-C.* Propagation of solitary waves over double submerged barriers // Water. 2017. V. 9. P. 917; doi:10.3390/w9120917.
20. *Huang C.-J.*, *Dong C.-M.* On the interaction of a solitary wave and a submerged dike // Coastal Engineering. 2001. V. 43 P. 265–286
21. *Бошенятов Б.В.*, *Жильцов К.Н.* Исследование взаимодействия волн цунами с подводными преградами конечной толщины в гидродинамическом лотке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 86–103.

Статья поступила 10.12.2018 г.

Boshenyatov B.V., Zhiltsov K.N. INVESTIGATION OF NON-LINEAR EFFECTS RESULTING FROM THE INTERACTION OF TSUNAMI LIKE WAVES AND UNDERWATER BARRIERS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 37–52

DOI 10.17223/19988621/59/5

Keywords: tsunami wave, impermeable underwater obstacles (barriers), Navies-Stocks equations, reflection coefficient, eddy loss coefficient, numerical modeling.

The paper presents the investigation results on the nonlinear effects due to the interaction of long gravitational tsunami-like waves with underwater barriers. Mathematical model is based on the two-dimensional Navier–Stokes equations for an incompressible fluid. The numerical results are obtained using the finite volume method and the open source OpenFOAM package.

The new data on the efficiency of thin impermeable underwater barrier are presented. The energy of incident, reflected, and transmitted waves is determined using the integral method. The coefficients of reflection and transmission, as well as the eddy loss coefficient are obtained from the calculation of wave total energy. It is shown that the total efficiency of the thin underwater

barrier is governed not only by reflected wave energy, but also by the energy of large-scale eddies generated near the barrier. It is revealed that at the optimum height of the barrier, the energy of reflected wave and the energy absorbed by eddies both depend on the incident wave height. When the nonlinearity parameter of the wave is greater than 0.1, the underwater barrier of optimal height suppresses about 80% of the incident wave energy.

Financial support. This work was carried out within the framework of the Competitiveness Enhancement Program of National Research Tomsk State University (№ 8.1.33.2018), Fundamental Research Programs of The Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences (Project N AAAA-A19-119012290136-7).

BOSHENYATOV Boris Vladimirovich (Doctor of Technical Sciences, Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: bosbosh@mail.ru

ZHILTSOV Konstantin Nikolaevich (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Levin B.V., Nosov M.A. (2005) *Fizika tsunami i rodstvennykh yavleniy v okeane* [Physics of tsunamis and related phenomena in the ocean]. Moscow: Yanus-K.
2. Li A., Liu Y., Li H. (2015) Accurate solutions to water wave scattering by vertical thin porous barriers. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. pp. 1–11. DOI: 10.1155/2015/985731.
3. Fridman A.M., Alperovich L.S., Shemer L., Pustilnik L.A., Shtivelman D., Marchuk A.G., Liberzon D. (2010) Tsunami wave suppression using submarine barriers. *Physics-Uspekhi*. 53(8). pp. 809–816. DOI: 10.3367/UFNe.0180.201008d.0843.
4. Boshenyatov B.V., Zhil'tsov K.N. (2015) Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya dlinnykh voln tipa tsunami s kompleksom pregrad [Mathematical simulation of the interaction of long tsunami type waves and complex of barriers]. *Modern High Technologies*. 12-1. pp. 20–23.
5. Boshenyatov B.V., Zhiltsov K.N. (2016) Simulation of the interaction of tsunami waves with underwater barriers. *American Institute of Physics. Conference Series*. 1770(3). p. 030088. DOI: 10.1063/1.4964030.
6. Wu Y.T., Hsiao S.C., Huang Z.C., Hwang K.S. (2012) Propagation of solitary waves over a bottom-mounted barrier. *Coastal Engineering*. 62. pp. 31–47. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2012.01.002.
7. Madsen P.A., Fuhrman D.R., Schaffer H.A. (2008) On the solitary wave paradigm for tsunamis. *Journal of Geophysical Research*. 113(C12012). pp. 1–22. DOI: 10.1029/2008JC004932.
8. Qu K., Ren X.Y., Kraatz S. (2017) Numerical investigation of tsunami-like wave hydrodynamic characteristics and its comparison with solitary wave. *Applied Ocean Research*. 63. pp. 36–48. DOI: 10.1016/j.apor.2017.01.003.
9. Boshenyatov B.V., Popov V.V. (2012) Eksperimental'nye issledovaniya vzaimodeystviya voln tipa tsunami s podvodnymi pregradami [Experimental studies of the interaction of tsunami-like waves and underwater obstacles]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 55. 9/3. pp. 145–150.
10. Boshenyatov B.V., Lisin D.G. (2013) Numerical simulation of tsunami type waves in a hydrodynamic channel. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(26). pp. 45–55.
11. Boshenyatov B.V. (2015) Osobennosti modelirovaniya voln tsunami v laboratornoy ustanovke [Features of tsunami wave modeling in a laboratory flume]. *Proceedings of the XIX International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems*. pp. 384–385.

12. Boshenyatov B.V., Levin Yu.K., Popov V.V., Semyanistyy A.V. (2011) A method for measuring small-amplitude waves on a water surface. *Instruments and Experimental Techniques*. 54(2). pp. 254–255. DOI: 10.1134/S0020441211020229.
13. Boshenyatov B.V., Levin Yu.K., Popov V.V. (2013) *Ustroystvo izmereniya urovnya vody* [Water level measuring device]. RF Patent 2485452.
14. Boshenyatov B.V. (2013) Suppression of tsunami waves by underwater obstacles. *Doklady Physics*. 58(10). pp. 453–456. DOI: 10.7868/S0869565213290070.
15. Boshenyatov B.V. (2017) The vortex mechanism of suppression of tsunami waves by underwater obstacles. *Doklady Earth Sciences*. 477(2). pp. 1434–1436. DOI: 10.1134/S1028334X17120017.
16. Kutateladze S.S., Mironov B.P., Nakoryakov V.E., Habakhpasheva E.M. (1975) *Eksperimental'nye issledovaniya pristennykh turbulentnykh techeniy* [Experimental study of the wall turbulent flows]. Novosibirsk: Nauka.
17. Hirt C.W., Nichols B.D. (1981) Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*. 39. pp. 201–225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5.
18. *OpenFOAM Foundation*. *OpenFOAM. User guide*. Available at http://www.openfoam.org. 2016. p. 211.
19. Wu Y.-T, Hsiao S-C. (2017) Propagation of solitary waves over double submerged barriers. *Water*. 9(12). pp. 1–17. DOI:10.3390/w9120917.
20. Huang C.-J., Dong C.-M. (2001) On the interaction of a solitary wave and a submerged dike. *Coastal Engineering*. 43(3). pp. 265–286. DOI: 10.1016/S0378-3839(01)00017-5.
21. Boshenyatov B.V., Zhiltsov K.N. (2018) Investigation of the interaction of tsunami waves and submerged obstacles of finite thickness in a hydrodynamic wave flume. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 86–103. DOI: 10.17223/19988621/51/8.

УДК 532.137:519.6
DOI 10.17223/19988621/59/6

В.М. Галкин, А.В. Богословский, Ю.С. Волков

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МОМЕНТА ГЕЛЕОБРАЗОВАНИЯ

Для вязкоупругой среды в качестве момента гелеобразования предложено использовать момент, когда модуль сдвиговой упругости среды становится больше нуля. С использованием реологической модели Кельвина – Фойхта численно исследовано взаимодействие датчика и гелеобразующего состава в вибрационном реометре. Показано, что предлагаемый метод можно реализовать в рамках классической вибрационной вискозиметрии с использованием результатов двух экспериментов на разных частотах.

Ключевые слова: *гелеобразующий состав*, *вязкость*, *упругость*, *численное моделирование*, *момент гелеобразования.*

В данной работе обсуждается метод определения момента гелеобразования. При этом рассматриваются гелеобразующие составы (ГОС) на основе растворов неорганических солей и маловязких растворов полимеров, у которых на начальном этапе модули сдвиговой упругости столь малы, что их можно считать ньютоновской жидкостью. Эти ГОС исходно представляют собой маловязкую ньютоновскую жидкость, а на завершающем этапе превращаются в нетекучее вязкоупругое тело – гель.

ГОС имеют широкую область применения. Например, ГОС используется в пищевой и микробиологической промышленности, а также в области нефтедобычи для уменьшения обводненности нефти [1]. В последнем случае через остановленную скважину в продуктивный пласт закачивают маловязкий на начальном этапе ГОС. При этом момент гелеобразования определяет время «жизни» ГОС, в течение которого он должен быть закачан в пласт. В пласте ГОС в основном вытесняет воду и в меньшей степени нефть. После необходимой выдержки ГОС превращается в вязкоупругое тело, изолирующее каналы, по которым в добывающую скважину поступала вода. Таким образом, после запуска добывающей скважины за счет образовавшихся гелевых пробок уменьшается обводненность нефти.

Процесс гелеобразования может запускаться в результате изменения некоторых параметров, например, температуры, кислотности, добавки инициатора и т.д. Поскольку многие технологические операции, использующие ГОС, привязаны ко времени, их успешное применение зависит от знания динамики реологического состояния. При этом представляет интерес момент, когда с появлением упругости [2, 3] меняется реологическое состояние ГОС и в относительно маловязкой жидкости формируется перколяционный кластер.

Получение информации о динамике процесса гелеобразования в основном базируется на визуальном наблюдении потери текучести [4], динамических измерениях [2, 5–8] и на методах вибрационной вискозиметрии (ВВ) [9–16].

В работах [5–8] точка гелеобразования определяется из пересечения кривых модуля накопления и модуля потерь на основе модели Кельвина – Фойхта и динамической реометрии. Данный подход широко используется, однако при этом результаты могут отличаться. Об этом справедливо отмечено в работе [17, с. 617]:

«The gel point is often detected using rheological methods. Different methods can give different gel points…».

Эти динамические методы, разработанные для изучения вязкоупругих характеристик нетекучих объектов, менее чувствительны и поэтому менее удобны для исследования начальных стадий процесса. Методы ВВ специально разработаны для контроля маловязких жидкостей. Авторами работ [11–16] рассматривается использование ВВ для контроля динамики теряющего текучесть исходно маловязкого образца, однако теория таких измерений еще недостаточно развита. В работе [12] с использованием двух сосудов разного размера определяется «точка (момент) потери текучести» [12, с. 1], который принимается авторами как точка гелеобразования.

В предлагаемой работе за точку гелеобразования принимается момент времени, когда модуль сдвиговой упругости среды становится больше нуля и обосновывается двухчастотный вариант ВВ определения этой точки. Получаемое таким образом значение не будет зависеть от размеров сосудов в отличие от работы [12].

В основу метода ВВ положена модифицированная вторая задача Стокса [18] о течении вблизи колеблющейся плоской стенки среды, которая обладает не только вязкими, но и упругими свойствами. В отличие от классической задачи Стокса, в статье рассматривается пластина с двумя смоченными поверхностями, кроме того, учитывается влияние стенок и упругих свойств среды [2, 3, 9 – 16, 18 – 20]. В рассматриваемом случае стенки неподвижны, а колеблется прямоугольная пластина (зонд), которая расположена симметрично относительно стенок измерительного сосуда и присоединена к камертонному вибратору, как показано на рис. 1. В камертоне поддерживаются незатухающие периодические колебания на собственной частоте ν, а зонд в своей плоскости совершает вынужденные вертикальные периодические колебания $y_0e^{i\omega t}$, где $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота; y_0 – амплитуда колебаний зонда ($y_0 \le 10^{-5}$ м для реометра из работы [13]); t – время; i – мнимая единица. При этом измеряется сила, которая необходима для поддержания постоянной амплитуды движения зонда. Схема на рис. 1 может реализовывать как интерференционный метод, результат которого связан с величиной измерительного сосуда [14], так и классическую ВВ, в основе которой лежит постулат о бесконечном сосуде с отсутствием отражения сдвиговой волны от стенок.

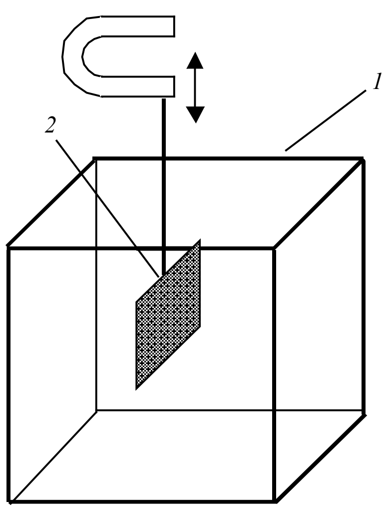


Рис. 1. Схема вибрационного реометра. *1* – сосуд с образцом ГОС; *2* – зонд, соединенный с камертоном, который колеблется на основной частоте
Fig. 1. Design of the vibration rheometer: *1*, vessel with a gel-forming composition; and *2*, sensor joined to a tuning fork oscillating at a fundamental frequency

1. Математическая постановка

Введем обозначения: y – вертикальная координата; x – горизонтальная координата, перпендикулярная плоскости зонда (начало координат находится в центре зонда); S – площадь одной смоченной стороны зонда; L – высота смоченной поверхности зонда; X_0 – расстояние по оси x от плоскости зонда до стенок сосуда. Для параметров, характеризующих исследуемый материал, используем обозначения: G – модуль сдвиговой упругости; η – коэффициент динамической вязкости; ρ – плотность среды. Характерные значения параметров и их размерности следующие:

$$L = 10^{-2}\text{ м},\ X_0 = 10^{-2}\text{ м},\ y_0 = 10^{-5}\text{ м},\ \nu = 400\text{ Гц},$$
$$G = 10^2\text{ Па},\ \eta = 10^{-3}\text{ Па·с},\ \rho = 10^3\text{ кг/м}^3. \quad (1)$$

Размерности остальных величин: $[t] = \text{с}$, $[z] = \text{м}$. Далее размерности не указываются.

При описании процесса используются следующие допущения: среда вязкоупругая, частота колебаний и амплитуды движения малы и не влияют на свойства среды; плотность среды и геометрические параметры постоянны; толщина зонда, а также градиенты вязкости, упругости, температуры и давления считаются малыми и их влияние не учитывается. Наряду с этим полагается, что упругость и вязкость исследуемого материала изменяются в квазистационарном режиме. Из характерных значений (1) следует, что до появления упругости течение в исследуемой среде ламинарное, так как число Рейнольдса меньше критического, а после появления упругости число Вайсенберга меньше критического, то есть гель не разрушается. Для описания вязкоупругой среды можно использовать две простейшие реологические модели – Кельвина – Фойхта и Максвелла, содержащие упругий элемент Гука и вязкий элемент Ньютона [19]. В первой модели имеется параллельное соединение этих элементов, а во второй модели – соответственно последовательное соединение. Так как на заключительном этапе гелеобразования ГОС превращается в нетекучее вязкоупругое тело, которое не может быть описано моделью Максвелла, но адекватно описывается моделью Кельвина – Фойхта, то в статье использовалась последняя:

$$\tau = G\gamma + \eta\dot{\gamma}\,, \quad (2)$$

где τ – напряжение сдвига, создаваемое движущейся пластиной в ее плоскости; $\gamma = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}$ – деформация; $\dot{\gamma} = \dfrac{\partial\gamma}{\partial t}$ – скорость деформации; ξ – смещение.

Используемое уравнение движения для вязкоупругой среды между стенками сосуда и зондом имеет вид [19]

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial\tau}{\partial x}. \quad (3)$$

В качестве граничных условий на колеблющейся поверхности зонда и на неподвижных стенках сосуда используются условия прилипания

$$\xi\big|_{x=X_0} = 0, \quad \xi\big|_{x=0} = y_0 e^{i\omega t}. \quad (4)$$

Для изучения свойств системы, содержащей колеблющиеся элементы, используют как импеданс, так и удельное механическое сопротивление зонда

$$Z = -\left(\frac{2\gamma SG + 2\dot{\gamma}S\eta}{2wS\rho\omega}\right)\Bigg|_{x=0}, \quad (5)$$

у которого в числителе находится сумма упругой и вязкой сил, действующих на обе стороны зонда. Здесь $w = \dfrac{\partial\xi}{\partial t}$ – скорость. Если в знаменателе выражения (5) оставить только скорость, то получится импеданс.

Аналогично [9] и [11] значение ξ находится из совместного решения уравнений (2) и (3) с использованием граничных условий (4). В результате формула (5) приводится к виду

$$Z = \frac{-i}{\beta}\operatorname{ctg}\left(\beta X_0\right), \tag{6}$$

где $\beta = \omega\sqrt{\rho/(G + i\eta\omega)}$ – комплексное волновое число [9]. Удельное механическое сопротивление (6) является комплексной величиной, но в экспериментах регистрируется только его действительная часть, которая в дальнейшем и будет представлять интерес, а в соответствии с [15] она имеет вид

$$z = \operatorname{Re}(Z) = \frac{\sqrt{c+G}\,\operatorname{th} b + \sqrt{c-G}\,\sin a\cos a\left(1-\operatorname{th}^2 b\right)}{\omega\sqrt{2\rho}\left[1-\cos^2 a\left(1-\operatorname{th}^2 b\right)\right]}, \tag{7}$$

где

$$a = X_0\omega\sqrt{\rho}\sqrt{c+G}\Big/\left(c\sqrt{2}\right),\ b = X_0\omega\sqrt{\rho}\sqrt{c-G}\Big/\left(c\sqrt{2}\right),\ c = \sqrt{G^2+\omega^2\eta^2}\,. \tag{8}$$

Предельный случай этого решения при $X_0 \to \infty$ соответствует второй задаче Стокса [18] и условиям применимости ВВ [10, 11], когда влияние стенок отсутствует.

2. Модельная задача

Используемые в статье идеализированные зависимости от времени модуля сдвиговой упругости и динамической вязкости по виду аналогичны зависимостям, полученным в работе [11]. Для численного моделирования соответствующие графики были аппроксимированы в [15] кусочно-непрерывными функциями:

$$G(t) = \begin{cases} G_{\min}, \quad 0 \le t < \tau_1, \\ \dfrac{1}{2}\left[G_{\max} + G_{\min} + (G_{\max} - G_{\min})\sin\left(\pi\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\tau_2 - t}{\tau_2 - \tau_1}\right)\right)\right], \tau_1 \le t < \tau_2, \\ G_{\max}, \quad t \ge \tau_2, \end{cases}$$

$$\eta(t) = \begin{cases} \eta_{\min} + (\eta_{\max} - \eta_{\min})\sin\left(\dfrac{\pi t}{2\tau_3}\right), \quad 0 \le t < \tau_3, \\ \dfrac{1}{2}\left[\eta_{\max} + \eta_{\min 2} + (\eta_{\max} - \eta_{\min 2})\sin\left(\pi\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{t - \tau_3}{\tau_4 - \tau_3}\right)\right)\right], \tau_3 \le t \le \tau_4, \\ \eta_{\min 2}, \quad t > \tau_4. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $G_{\min} = 0$; $G_{\max} = 100$; $\eta_{\min} = 10^{-5}$; $\eta_{\max} = 10^{-3}$; $\eta_{\min2} = 2{\cdot}10^{-4}$; $\tau_1 = 399.96$; $\tau_2 = 1595$; $\tau_3 = 750$; $\tau_4 = 1100$. При проведении численных исследований, имитирующих реальные эксперименты, использовались зашумленные значения, которые вычислялись следующим образом:

$$z_m = z\left(t_m\right)\cdot\left(1 + RND\cdot R\right), \tag{10}$$

где t_m – равноотстоящие моменты времени; $m = 1,\ldots,5001$ – число шагов по времени; $z(t_m)$ вычислялось по формуле (7) с учетом (9); $R\in\{0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3\}$ – относительный коэффициент зашумления; $RND\in[-0.5;\ 0.5]$ – случайное число, равномерно распределенное на отрезке. При этом параметры были следующие:

$$\nu = 400,\ \omega = \omega_0 = 2\pi\nu,\ \rho = 10^3,\ X_0 = 10^{-2},\ t\in[0;\ \tau_2]. \qquad (11)$$

На рис. 2 изображены рассчитанные из формул (9) вязкость и упругость, а также соответствующий им коэффициент сопротивления (7) для вибрационного реометра с параметрами (11).

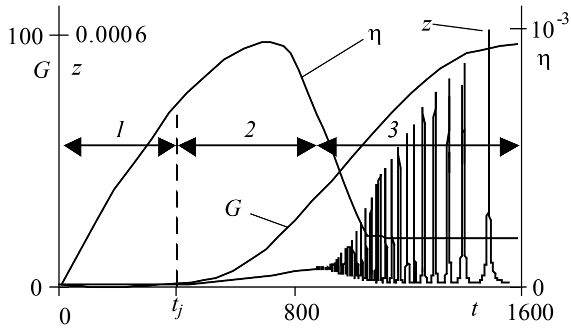


Рис. 2. Параметры модельной задачи. *G* – упругость; η – вязкость; *z* – коэффициент удельного механического сопротивления; *1* – нерезонансная область, в которой отсутствует упругость; *2* – нерезонансная область, в которой вязкие силы преобладают над упругими; *3* – резонансная область; t_j – момент, когда *G* становится больше нуля

Fig. 2. Parameters of the test problem: *G* is the elasticity, η is the viscosity, *z* is the coefficient of specific mechanical resistance; *1*, non-resonance region without elasticity; *2*, non-resonance region with viscous forces dominating over elastic forces; *3*, resonance region; and t_j is the time instant when *G* becomes greater than zero

Рисунок 2 разделён на три области, обозначенные цифрами: первая характеризуется тем, что в ней отсутствует упругость, вторая – область, в которой вязкие силы преобладают над упругими, третья – резонансная область, в которой существенную роль играет интерференция сдвиговой волны, отражённой от стенок сосуда. Поскольку в первых двух областях нет влияния отражённой сдвиговой волны, то выполняется основной постулат классической ВВ – отсутствие влияния стенок сосуда [9, 20]. При этом коэффициент сопротивления не зависит от размеров сосуда. Точка $t_j\in\{t_m,\ m = 1,\ldots,5001\}$, ближайшая большая к τ_1 определяет момент возникновения упругости и является границей раздела нерезонансных областей *1* и *2*. В резонансной области, зависящей от размера сосуда, упругие силы преобладают над вязкими и максимальным пикам на графике соответствует ситуация, когда половина длины волны укладывается между стенкой и зондом целое число раз. Естественно, что для каждого гелеобразующего состава зависимости $\eta(t)$ и $G(t)$ будут своими, однако характер их поведения будет близок к изображенному на рис. 2.

3. Метод определения момента гелеобразования

Рассмотрим влияние размера сосуда на результаты измерений на основе модельной задачи (9), (11) и разных размеров сосудов $X_0 = 10^{-3}$, $X_0 = 10^{-2}$ и $X_0 = 2\cdot 10^{-2}$. На рис. 3 изображено поведение величин b из формулы (8) и th$b$ в зависимости от t. Если сравнить рис. 3 с рис. 2, то видно, что в нерезонансной области th$b$ = 1, вернее, $1-\mathrm{th}b < \varepsilon$, ($\varepsilon$ – машинная точность), а в резонансной области th $b < 1$. Полагаем, что $\varepsilon \approx 10^{-19}$. Тогда из условия $1-\mathrm{th}b < \varepsilon$ получается, что $b \geq 23$, а из формулы (8) следует, что $X_0 \geq 23\sqrt{2\eta/(\rho\omega)}$. Учитывая характерные значения (1) получим условие $X_0 \geq 6\cdot 10^{-4}$, которое для модельного примера (9), (11) выполняется.

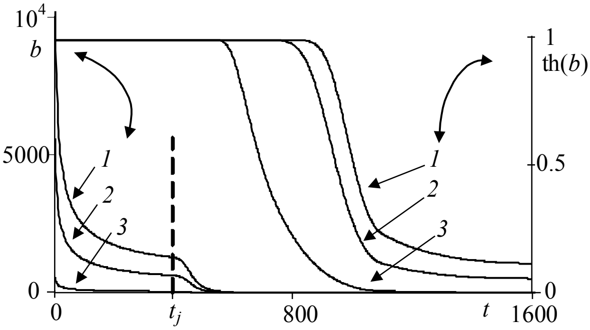


Рис. 3. Зависимости от времени величин b и th$b$. Размеры сосудов: *1* – $X_0 = 10^{-3}$, *2* – $X_0 = 10^{-2}$, *3* – $X_0 = 2\cdot 10^{-2}$, t_j – момент, когда G становится больше нуля

Fig. 3. Time-dependences of b and th$b$. The sizes of vessels: X_0 = (*1*) 10^{-3}, (*2*) 10^{-2}, and (*3*) $2*10^{-2}$; t_j is the time instant when G becomes greater than zero

Кроме этого, из рис. 3 следует, что как расхождение огибающих графиков механического сопротивления th$b$, так и результат, полученный на основе способа [12], зависят от размера сосудов.

Для определения t_j – момента возникновения упругости, предлагается способ на основе ВВ. Способ не связан с размером сосудов и использует две разные частоты колебаний зонда. Воспользуемся тем свойством, что точка t_j находится внутри нерезонансной области, где $1-\mathrm{th}b < \varepsilon$, поэтому в нерезонансной области действительная часть удельного механического сопротивления (7) будет вычисляться по формуле

$$z = \sqrt{\sqrt{G^2+\omega^2\eta^2}+G}\Big/\left(\omega\sqrt{2\rho}\right). \tag{12}$$

Пусть $\eta > 0$ и два эксперимента проводятся в нерезонансной области на двух частотах ω_1 и ω_2. В моменты времени t_m регистрируются значения $z_{1,m}$ для ω_1 и значения $z_{2,m}$ для ω_2. Рассмотрим идеальный случай, когда в измеренных значениях $z_{1,m}$ и $z_{2,m}$ отсутствуют шумы. Заметим, если $G = 0$, то из (12) следует, что выражение $z\sqrt{\omega}$ не зависит от ω. При $G>0$, так как $\dfrac{\partial(z\sqrt{\omega})}{\partial\omega} < 0$, то выражение $z\sqrt{\omega}$ будет убывающей функцией по ω. Следовательно, если $\omega_2 > \omega_1 > 0$, то

$z_{1,m}\sqrt{\omega_1} > z_{2,m}\sqrt{\omega_2}$. Таким образом, при идеальных измерениях, как величина G, так и

$$f\left(t_m\right) = z_{1,m}\sqrt{\omega_1} - z_{2,m}\sqrt{\omega_2} \qquad (13)$$

одновременно перестанут быть нулевыми и станут положительными в момент гелеобразования $t_m = t_j$. Номер этого отсчёта времени j можно определить из условия нахождения минимального времени, когда соотношение (13) становится больше нуля

$$t_j \in \{t_m\}, \quad j = \underset{m}{\arg}\min_{t_m}\left(f\left(t_m\right) > 0\right). \qquad (14)$$

Очевидно, что найденное таким образом значение, будет меньше, чем значение, найденное по пересечению кривых модуля накопления и модуля потерь.

Рассмотрим случай, когда упругость мала или равна нулю, а в экспериментально измеренных значениях $z_{1,m}$ и $z_{2,m}$ присутствует шум. Так как при этом значения $f(t_m)$ могут быть знакопеременными для некоторых $t_m \le t_j$, то условие (14) заменим на условие нахождения минимального времени, начиная с которого все последующие соотношения (13) становятся больше нуля

$$t_j \in \{t_m\}, \quad j = \underset{m}{\arg}\min_{t_m}\left(f\left(t_{m+n}\right) > 0;\, n = 0,1...;\, m + n \le 5001\right). \qquad (15)$$

Здесь 5001 – число шагов по времени в модельной задаче. Так как при вычислениях используются зашумленные данные, то предлагается взамен $f(t_m)$ применять усредненные значения f_m с использованием интегрального среднего, в котором интеграл можно вычислять по формуле прямоугольников. В этом случае получается скользящее среднее

$$f_m = \frac{1}{2\Delta m + 1}\sum_{l=m-\Delta m}^{m+\Delta m} f\left(t_l\right), \qquad (16)$$

где f_m – усредненные значения $f(t_m)$; $2\Delta m$ – длина отрезка усреднения. Таким образом, на основе соотношений (15) – (16) точка гелеобразования определяется из условия

$$t_j \in \{t_m\}, \quad j = \underset{m}{\arg}\min_{t_m}\left(f_{m+n} > 0;\, n = 0,1...;\, m + n \le 5001\right). \qquad (17)$$

4. Численные расчеты

Оценка работоспособности предлагаемого метода проводилась путем численного определения момента гелеобразования и сравнения его с точным значением на основе модельной задачи (9). Использовались зашумленные значения $z_{1,m}$ и $z_{2,m}$, полученные по формуле (10) соответственно для двух частот $\omega_1 = \omega_0$ и $\omega_2 = 2\omega_0$. Остальные параметры взяты из (11). Номер точки j находился из условия (17) для усредненных значений f_m, найденных по формуле (16). Половина длины отрезка усреднения принимала значения $\Delta m = \{0;\ 10;\ 20\}$. Отсутствию усреднения соответствует $\Delta m = 0$.

В расчетах использовался статистический подход, вычислялось среднеарифметическое значение момента гелеобразования $\left\langle t_j \right\rangle$ и среднеквадратичное отклонение s:

$$\langle t_j \rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} t_{j,k}, \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(t_{j,k} - \langle t_j \rangle\right)^2}\ .$$

Здесь $N = 1000$ – количество испытаний, $t_{j,k}$ – найденные из (17) значения t_j для k-го испытания. Результаты расчетов показаны на рис. 4 в виде средней величины $\langle t_j \rangle$ и процентов относительной погрешности, найденных по формуле

$$\delta = \left(\langle t_j \rangle / \tau_1 - 1\right)100\,, \tag{18}$$

где δ – относительная погрешность определения момента возникновения упругости, τ_1 – точное значение момента гелеобразования из (9). Среднеквадратичное отклонение s для каждой рассчитанной величины показано на рис 4, *a* вертикальными отрезками соответствующей длины.

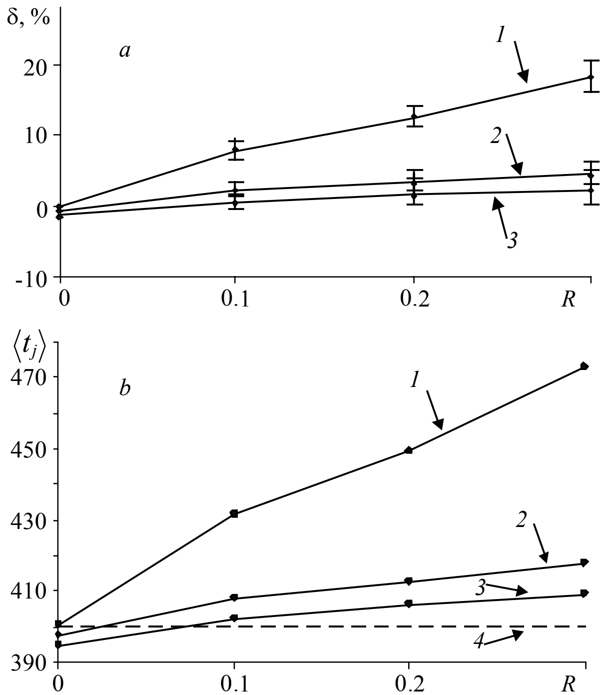


Рис. 4. Влияние на результаты коэффициента зашумления R и полудлины отрезка усреднения Δm: *a* – относительная погрешности δ и среднеквадратичное отклонение, *b* – среднеарифметическое значение момента гелеобразования $\langle t_j \rangle$. *1* – $\Delta m = 0$, *2* – $\Delta m = 10$, *3* – $\Delta m = 20$, *4* – точное значение момента гелеобразования τ_1

Fig. 4. Effect of the noise factor R and half-length of the averaging segment Δm on the results: (*a*) the relative error δ and standard deviation and (*b*) the arithmetic mean of gel point $\langle t_j \rangle$. Δm = (*1*) 0, (*2*) 10, and (*3*) 20, (*4*) is the exact value of gel point τ_1

На рис. 4 видно, что для максимального зашумления $R = 0.3$ предлагаемый способ, даже без усреднения, дает относительную погрешность (18), не превышающую 21 %, а при использовании усреднения со значением $\Delta m = 20$ относительная погрешность не превышает 5 %.

5. О практической реализации

Реализация экспериментов с двумя разными частотами может быть следующей. Во-первых, в двух отдельных сосудах или в одном сосуде находятся отдельные зонды, каждый из которых колеблется на своей частоте. Во-вторых, в единственном сосуде единственный зонд может попеременно переключаться на источники колебаний с разными частотами соответствующих гармоник.

Что касается выбора частоты, то должен использоваться тот диапазон, в котором частота не влияет на свойства исследуемой среды.

Заключение

Предложено считать точкой гелеобразования момент появления значения $G > 0$. Дано обоснование двухчастотного метода определения точки гелеобразования, который не зависит от размера измерительного сосуда. С использованием численного моделирования показана работоспособность обсуждаемого метода. Рассмотрены варианты его практической реализации.

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ν – собственная частота колебаний камертона;
ω – круговая частота;
y_0 – амплитуда колебаний зонда;
t – время;
i – мнимая единица
y – вертикальная координата;
x – горизонтальная координата;
S – смоченная площадь одной стороны зонда;
X_0 – расстояние по оси x от плоскости зонда до стенок сосуда;
L – смоченная высота зонда;
G – модуль сдвиговой упругости;
η – коэффициент динамической вязкости;
ρ – плотность среды;
τ – напряжение сдвига;
γ – деформация;
$\dot{\gamma}$ – скорость деформации;
ξ – смещение;
w – скорость;
β – комплексное волновое число;
Z – удельное механическое сопротивление зонда;
z – действительная часть удельного механического сопротивления зонда;
z_m – зашумленные значения z, имитирующие реальные эксперименты;
t_m – равноотстоящие моменты времени;
$m = 1,\ldots,5001$ – шаги по времени;
R – относительный коэффициент зашумления;

RND – случайное число;

τ_1 – точное значение момента времени, когда *G* становится больше нуля;

t_j – найденное из расчетов значение момента времени, когда *G* становится больше нуля;

f – функция, отражающая поведение упругости;

ε – машинная точность;

δ – относительная погрешность;

Δm – половина длины отрезка усреднения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кувшинов И.В.*, *Кувшинов В.А.*, *Алтунина Л.К.* Применение термотропных композиций для повышения нефтеотдачи // Нефтяное хозяйство. 2017. № 1. С. 44 – 47.
2. *Шрамм Г.* Основы практической реологии и реометрии. М.: КолосС, 2003. 312 с.
3. *Малкин А.Я.*, *Исаев А.И.* Реология: концепции, методы, приложения. СПб.: Профессия, 2007. 560 с.
4. *ГОСТ* 32463-2013 Нефтепродукты. Определение температуры потери текучести методом автоматического наклона.
5. *Rudé E.*, *Llorens J.*, *Mans C.* Rheological gel point determinations in silica and titanium based sol-gel systems // Progress and Trends in Rheology: Proceedings of the fifth European rheology conference, Portoroz, Slovenia, September 6 – 11, 1998. P. 613–614. DOI: 10.1007/978-3-642-51062-5.
6. *Mortimer S.*, *Ryan A.J.*, *Stanford J.L.* Rheological behavior and gel-point determination for a model lewis acid-initiated chain growth epoxy resin // Macromolecules. 2001. V. 34. Iss. 9. P. 2973-2980. DOI: 10.1021/ma001835x.
7. *Matsunaga T.*, *Shibayama M.* Gel point determination of gelatin hydrogels by dynamic light scattering and rheological measurements // Physical Review E 76, 030401(R). 2007. P. 21–27. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.030401.
8. *Harkous A.*, *Colomines G.*, *Leroy E.*, *Mousseau P.*, *Deterre R.* The kinetic behavior of liquid silicone rubber: a comparison between thermal and rheological approaches based on gel point determination // Reactive and Functional Polymers. 2016. V. 101. P. 20–27. DOI: 10.1016/j.reactfunctpolym.2016.01.020.
9. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М.: ИЛ, 1963. 535 с.
10. *Соловьев А.Н.*, *Каплун А.Б.* Вибрационный метод измерения вязкости жидкостей. Новосибирск: Наука, 1970. 140 с.
11. *Браилов Э.С.*, *Школьник С.И.* Исследование кинетики и контроль процесса вулканизации полиэфируретанового каучука вибрационным методом // Каучук и резина. 1968. № 8. С. 17–19.
12. *Алтунина Л.К.*, *Богословский А.В.*, *Кожевников И.С.* Способ определения точки гелеобразования методом вибрационной вискозиметрии. Патент № 2529674 от 16.04.2013.
13. *Богословский А.В.*, *Полуэктов М.А.*, *Алтунина Л.К.* Устройство для измерения вязкости. Патент № 2135980 от 01.04.1997.
14. *Богословский А. В.*, *Журавлева Т. Б.*, *Стрелец Л. А.* Интерференционные резонансы при вискозиметрических измерениях // Теоретические и прикладные основы физико-химического регулирования свойств нефтяных дисперсных систем. Томск: Изд-во ТГУ, 2001. С. 105–109.
15. *Галкин В.М.*, *Богословский А.В.*, *Волков Ю.С.* Вибрационная вискозиметрия и численный метод определения динамики гелеобразования // Сибирский журнал индустриальной математики. 2016. Т. 19. № 4. С. 22–30. DOI 10.17377/sibjim.2016.19.403
16. *Каплун А.Б.*, *Мешалкин А.Б.* Вибрационный метод фазового анализа – прецизионный метод для комплексного исследования физико-химических характеристик и процессов кристаллизации-плавления // Журн. структур. химии. 2014. Т. 55, № 6. С. 1229–1236.
17. *International* union of pure and applied chemistry. Compendium of chemical terminology. Gold Book. Version 2.3.3. 2014-02-24. URL: http://goldbook.iupac.org/

18. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 743 с.
19. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
20. *Мэзон У.* Физическая акустика. Т. 2, ч. Б: Свойства полимеров и нелинейная акустика. М.: Мир, 1969. 422 с.

Статья поступила 11.09.2018 г.

Galkin V.M., Bogoslovskiy A.V., Volkov Yu.S. ON DETERMINATION OF GEL POINT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 53–64

DOI 10.17223/19988621/59/6

Keywords: gel-forming composition, viscosity, elasticity, numerical simulation, gel point.

In this paper, the gel-forming compositions exhibiting a low-viscosity Newtonian fluid behavior at the initial stage and a viscoelastic body – gel behavior at the final stage are considered. A gel point is referred to as the time instant when the shear modulus of elasticity of the composition becomes greater than zero. The interaction between sensor and gel-forming composition in the vibration rheometer is numerically studied using the Kelvin-Voigt rheological model. It is revealed that the method that uses the results of two experiments at different frequencies can be applied to determine the gel point within the framework of classical vibration viscosimetry. It is shown that the proposed method is independent of the size of measuring vessel. The algorithm for determining the gel point in the case of the noise presence in the experimental data is described. A test problem is considered using the idealized dependencies of the shear modulus of elasticity and dynamic viscosity on time for gelation process. Based on the test problem solution, the assessment of the impact of the noise factor and length of averaging segment on the results is obtained. The efficiency of proposed method is exposed. Two versions of practical implementation are proposed: two sensors oscillating at their own frequencies or one sensor switching to different harmonics.

GALKIN Vladislav Mikhaylovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vlg@tpu.ru

BOGOSLOVSKIY Andrey Vladimirovich (Candidate of Chemical Sciences, Institute of Petroleum Chemistry, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bav@ipc.tsc.ru

VOLKOV Yuriy Stepanovich (Doctor of Physics and Mathematics, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: volkov@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Kuvshinov I.V., Kuvshinov V.A., Altunina L.K. (2017) Primenenie termotropnykh kompozitsiy dlya povysheniya [Application of thermotropic compositions for enhanced oil recovery]. *Neftyanoe hozyaystvo – Oil Industry.* 1. pp. 44–47.
2. Schramm G. (1994) *A Practical Approach to Rheology and Rheometry*. Karlsruhe: Gebrueder HAAKE.
3. Malkin A.Ya., Isayev A.I. (2005) *Rheology: Conceptions*, *Methods*, *Applications*. Toronto: ChemTec Publishing.
4. *Nefteprodukty. Opredelenie temperatury poteri tekuchesti metodom avtomaticheskogo naklona* [Petroleum products. Determination of the pour point by automatic tilt method]. (2013) GOST 32463-2013.
5. Rudé E., Llorens J., Mans C. (1998) Rheological gel point determinations in silica and Titanium based sol-gel systems. *Progress and Trends in Rheology*. pp. 613–614. DOI: 10.1007/978-3-642-51062-5.
6. Mortimer S., Ryan A.J., Stanford J.L. (2001) Rheological behavior and gel-point determination for a model lewis acid-initiated chain growth epoxy resin. *Macromolecules.* 34(9). pp. 2973–2980. DOI: 10.1021/ma001835x.

7. Matsunaga T., Shibayama M. (2007) Gel point determination of gelatin hydrogels by dynamic light scattering and rheological measurements. *Physical review* E 76. 030401(R). pp. 21–27. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.030401.
8. Harkous A., Colomines G., Leroy E., Mousseau P., Deterre R. (2016) The kinetic behavior of liquid silicone rubber: a comparison between thermal and rheological approaches based on gel point determination. *Reactive and Functional Polymers*. 101. pp. 20–27. DOI: 10.1016/j.reactfunctpolym.2016.01.020.
9. Ferry J.D. (1961) *Viscoelastic Properties of Polymers*. New York: Wiley.
10. Solov'ev A.N., Kaplun A.B. (1970) *Vibratsionnyy metod izmereniya vyazkosti zhidkostey* [Vibration method of measuring viscosity of liquids]. Novosibirsk: Nauka.
11. Brailov E.S., Shkol'nik S.I. (1968) Issledovanie kinetiki i kontrol' protsessa vulkanizatsii poliefiruretanovogo kauchuka vibratsionnym metodom [Investigation of the kinetics and the control of vulcanization of a synthetic rubber by vibration method]. *Kauchuk i rezina*. 8. pp. 17–19.
12. Altunina L.K., Bogoslovskiy A.V., Kozhevnikov I.S. (2013) *Sposob opredeleniya tochki geleobrazovaniya metodom vibratsionnoy viskozimetrii* [Determination of the gel point by the method of vibration rheometer]. RF Patent 2529674.
13. Bogoslovskiy A.V., Poluektov M.A., Altunina L.K. (1997) *Ustroystvo dlya izmereniya vyazkosti* [Device for measuring viscosity]. RF Patent 2135980.
14. Bogoslovskiy A.V., Zhuravleva T.B., Strelets L.A. (2001) Interferentsionnye rezonansy pri viskozimetricheskikh izmereniyakh [Interference resonances in rheometry]. *Teoreticheskie i prikladnye osnovy fiziko-khimicheskogo regulirovaniya svoystv neftyanykh dispersnykh system*. pp. 105–109.
15. Galkin V.M., Bogoslovskiy A.V., Volkov Yu.S. (2016) Vibration viscosimetry and a numerical method for determining gelation dynamics. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 10(4). pp. 474–481. DOI: 10.1134/S1990478916040037.
16. Kaplun A.B., Meshalkin A.B. (2014) Oscillation method of phase analysis: a precision method for integrated studying the physicochemical characteristics and the processes of crystallization and melting. *Journal of Structural Chemistry*. 55(6). pp. 1172–1179. DOI: 10.1134/S0022476614060286.
17. *Compendium of chemical terminology* (2014) Gold Book. International Union of Pure and Applied Chemistry. Version 2.3.3. URL: http://goldbook.iupac.org/
18. Schlichting H. (1951) *Grenzschicht-Theorie*. Karlsruhe: Verlag G. Braun.
19. Loytsyanskiy L.G. (1987) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.
20. *Physical Acoustics*. (1964) Vol. 2, Part B: Properties of polymers and nonlinear acoustics. Ed. by W. P.Mason. New York: Academic Press.

Received: September 11, 2018

УДК 536.37
DOI 10.17223/19988621/59/7

Д.П. Касымов, М.В. Агафонцев, В.В. Перминов, В.В. Рейно, П.С. Мартынов

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МОЩНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ И ОБУГЛИВАНИЯ ДРЕВЕСНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ИК-ДИАГНОСТИКИ[1]

Представлены результаты экспериментального исследования воздействия теплового потока от эталонного источника на характеристики обугливания и воспламенения древесных строительных материалов с использованием термографии. Получены значения скорости, глубины обугливания и времени воспламенения для рассматриваемых образцов. Предложена оригинальная методика постановки эксперимента с регистрацией ИК-изображения температурного поля торца исследуемого образца при воздействии на его фронтальную поверхность теплового потока. Проанализировано влияние некоторых огнезащитных составов на скорость и глубину обугливания образцов, а также время воспламенения. Полученные результаты могут служить в качестве дополнительных рекомендаций при разработке методов испытаний строительных материалов и огнезащитных составов на пожарную опасность.

Ключевые слова: *тепловой поток*, *древесные строительные материалы*, *ИК-диагностика*, *обугливание*, *воспламенение*, *огнезащита.*

При распространении лесных низовых и верховых пожаров выделяется большое количество тепла, которое может стать причиной воспламенения деревянных строений в населенных пунктах, расположенных близко к границе леса. В России причина увеличения числа природных пожаров, с одной стороны, связана с большой протяженностью лесных насаждений и, как следствие, повышением рисков появления пожаров, с другой – в недостаточном понимании физики природных пожаров, в частности перехода их на здания и строительные конструкции. Для обеспечения требуемого уровня пожарной безопасности нашей страны ведутся непрерывные и многоплановые работы: подготовка кадров, разработка методов и способов тушения пожаров; мониторинг и прогнозирование; совершенствование экспериментальной и учебно-материальной базы научно-исследовательских учреждений и другие. Несмотря на большой объем выполняемых работ по профилактике пожароопасных ситуаций, ежегодные показатели возникновения пожаров остаются достаточно высокими.

В работе [1] отмечено, что между закономерностями процессов возникновения и распространения лесных пожаров и пожаров в зданиях и сооружениях с применением конструкционных и строительных материалов из древесины наблюдается много общего, что обусловлено органической природой лесных горючих материалов и древесины. Вопросы, связанные с эффектами от лесных и смешанных пожаров, обсуждались в работах [2–5]. Авторами отмечено, что при развитии горения в замкнутом помещении унос конвективного тепла и теплового излучения задерживается стенами этого помещения, кроме того, в помещении поддерживается опре-

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-00232).

деленная влажность, в то время как в лесу она определяется параметрами окружающей среды (осадки, время года, солнечное излучение, ветер). Также в помещении ограничен приток окислителя, в лесу же ситуация является обратной [6].

Изучение влияния пожаров на деревянные конструкции в натурных крупномасштабных экспериментах затруднено из-за плохой воспроизводимости результатов и большой зависимости параметров экспериментов от внешних факторов [7–9]. В основном эти проблемы решаются в лабораторных условиях, позволяющих с некоторыми допущениями частично моделировать условия воздействия природных пожаров на образцы, выполненные из дерева.

В строительстве в качестве несущих конструкций, как правило, используют древесину хвойных пород, а как отделочные материалы применяется древесина лиственных пород. Одним из факторов, определяющих пожарную опасность древесины, является ее способность к воспламенению и распространению горения. В работе [3] выделены основные физико-химические процессы, протекающие при горении древесины, включающие в себя нагрев от фронта лесного пожара вследствие конвекции и излучения, сушку, пиролиз, образование конденсированных, газообразных и дисперсных продуктов пиролиза с последующим горением. Как результат над очагом горения древесины возникает конвективная колонка, содержащая дисперсные (частицы кокса и сажи) и газообразные продукты горения древесины, что представляет сложную задачу математической физики.

В литературе имеется большое количество экспериментальных работ по исследованию пожарной опасности древесины, которые свидетельствуют о влиянии различных факторов на ее пожароопасные показатели (порода и разновидность древесины, условия и продолжительность эксплуатации, влажность, интенсивность пожара и др.). Среди них можно отметить работы [1, 10–20]. На основе полученных данных в настоящее время можно судить о показателях огнестойкости деревянных конструкций, однако большинство методов, используемых для оценки пожарной опасности древесины, относятся к классу контактных методов (микротермопарная техника, метод молекулярно-пучковой зондовой масс-спектрометрии, методы термического анализа и т.д.).

С развитием химической промышленности были разработаны средства – антипирены, которые частично или полностью предотвращают возгорание обработанных поверхностей. На рынке представлено множество подобных средств, обладающих своими техническими параметрами, расходом, степенью токсичности, а также ценовой категорией. В работе [1] отмечено, что в качестве способов огнезащиты в зданиях и сооружениях с несущими и ограждающими конструкциями из древесины наиболее широкое применение нашли конструктивные способы с помощью плитных и рулонных материалов; поверхностная и глубокая пропитка специальными огнезащитными составами (ОЗС), а также применение огнезащитных покрытий. Авторы [1] указывают на ограниченные данные по экспериментальному исследованию влияния огнезащитных покрытий на пределы огнестойкости деревянных конструкций, что подтверждает актуальность работы в данном направлении.

В настоящее время при исследовании процессов горения и природных пожаров активно применяются современные методы инфракрасной (ИК) диагностики [21–25]. Следует учесть тот факт, что до сих пор в литературе имеется достаточно мало сведений по результатам применения бесконтактных методов при огневых испытаниях конструкций и строительных материалов из древесины. В частности, в работах [11, 17, 26] рассмотрен опыт применения бесконтактного метода измерения температуры при лабораторных и натурных огневых испытаниях фрагментов зданий и строительных конструкций из древесины. В работах [27, 28] экспериментально проанализировано влияние различных огнезащитных составов на пожароопасные свойства хвойных и лиственных пород древесины с применением методов ИК-диагностики. Выработаны некоторые рекомендации по применению термографии при испытании древесины [29], строительных материалов на огнестойкость и пожарную опасность, однако имеющиеся данные требуют проведения дополнительных экспериментов по исследованию пожароопасных характеристик различных материалов, используемых в строительстве, методом ИК-диагностики. Разработка на основе этих данных методики испытания различных строительных конструкций, выполненных из древесины, на огнестойкость и пожарную опасность с применением термографии позволит уменьшить экономическую составляющую при проведении такого рода работ при одновременном повышении оперативности получения данных и разрешающей способности.

Целью работы является исследование воздействия эталонного источника теплового потока на характеристики обугливания и воспламенения древесных строительных материалов с использованием методов ИК-диагностики. Впервые предложена оригинальная методика по регистрации ИК-изображения торца исследуемого образца при воздействии на его фронтальную поверхность теплового потока с высокой однородностью. Кроме того проанализировано влияние некоторых огнезащитных составов для древесины на скорость обугливания образцов, а также задержки зажигания.

Лабораторное оборудование и методика проведения эксперимента

Для оценки скорости обугливания в результате теплового воздействия в лабораторных условиях была подготовлена следующая лабораторная база, изображённая на (рис. 1).

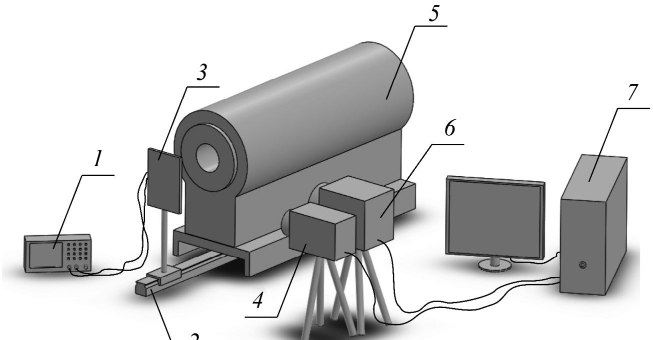


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: *1* – осциллограф Tektronix TDS-1002; *2* – оптический рельс; *3* – каретка с подставкой; *4* – видеокамера Canon HF R88; *5* – модель абсолютно черного тела; *6* – инфракрасная камера JADE J530SB; 7 – персональный компьютер

Fig. 1. Design of the experimental set-up: *1*, oscilloscope Tektronix TDS-1002; *2*, optical rail; *3*, carriage with retainer; *4*, video camera Canon HF R88; *5*, blackbody model; *6*, infrared camera JADE J530SB; and *7*, personal computer

Экспериментальное оборудование включало: инфракрасную камеру научного класса JADE J530SB с использованием оптического фильтра, с рабочей длиной волны 2.5–2.7 мкм, позволяющего регистрировать температуру в диапазоне 300–800 °С; видеокамеру Canon HF R88 для оценки задержки зажигания рассматриваемых образцов древесных строительных материалов; излучатель АЧТ-45/100/1100 Омского завода ОАО НПП «Эталон» с диапазоном изменения температуры от 100–1100 °С, используемый в качестве модели абсолютно черного тела (АЧТ), который имитирует источник теплового излучения с излучательной способностью, близкой к 1, с апертурой равной 45 мм; датчик теплового потока Hukseflux SBG01 с рабочим диапазоном 0 – 100 кВт/м^2; осциллограф Tektronix TDS-1002 для регистрации термо-ЭДС (электродвижущей силы, возникающей при использовании термопар); анализатор влажности AND MX-50 для контроля влагосодержания исследуемых образцов. Размер матрицы инфракрасной камеры 320×240 пикселей. Частота ИК-съемки составляла 5 кадров в секунду.

Использование узкополосного оптического фильтра было выбрано на основании закона Планка для плотности излучения абсолютно черного тела (АЧТ), ввиду того, что обугленный слой древесных материалов близок по своим оптическим свойствам к модели АЧТ. На основании этого была построена кривая Планка (рис. 2), соответствующая температуре 1100 °С

$$\frac{dR(\lambda,T)}{d\lambda}=\frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}, \qquad (1)$$

где $\frac{dR(\lambda,T)}{d\lambda}$ – мощность излучения, испускаемого единицей поверхности черного тела в единичном интервале длин волн, h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, c – скорость света, T – абсолютная температура черного тела, π – число Пи, λ – длина волны, e – экспонента [30].

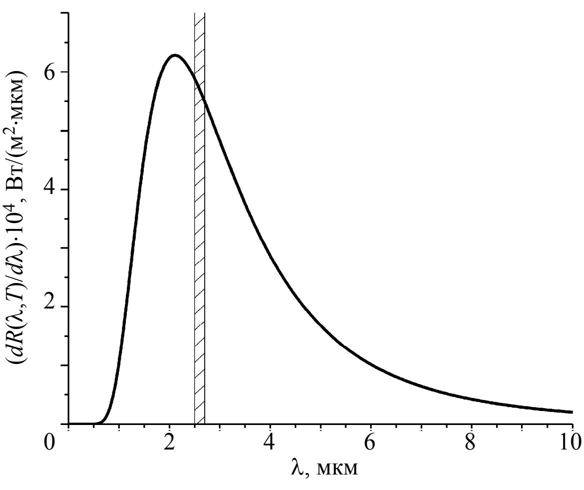


Рис. 2. Расчетная кривая Планка, соответствующая температуре 1100 °С, с выделенной рабочей спектральной полосой 2.5–2.7 мкм
Fig. 2. The calculated Planck curve corresponding to a temperature of 1100 °C with a selected operating spectral band of 2.5–2.7 μm

На основании рис. 2 можно сделать вывод о том, что использование узкополосного фильтра позволяет регистрировать инфракрасное излучение наибольшей интенсивности для выбранной температуры АЧТ. Выбор оптического фильтра с рабочей спектральной полосой 2.5–2.7 мкм позволяет уйти от влияния поглощающих свойств углекислого газа, выделяемого при горении (максимальная линия поглощения CO_2 наблюдается в основном в полосе длин волн 4.3–4.6 мкм).

В качестве образцов древесных строительных материалов использовались популярные на рынке фанера, древесно-стружечная плита (ДСП), ориентированно-стружечная плита (ОСП). Размер исследуемого образца был равен 100×100 мм, толщина варьировалась в зависимости от материала: 18 мм для ОСП и ДСП; 21 мм для фанеры.

В качестве огне-биозащитной пропитки для древесины использовались следующие средства: «ЗОТЕКС Биопирол», «Фенилакс», «ФУКАМ», применяемые, в частности, для пиленых, строганных и бревенчатых элементов конструкций жилищного, общественного, производственного и сельскохозяйственного назначения. Расход представленных средств, обеспечивающий II группу огнезащитной стойкости (по нормам пожарной безопасности (ГОСТ 16363)), выбирался исходя из рекомендаций завода-изготовителя. В качестве технологии пропитки образцов использовалось нанесение состава кистью [31], после чего производилась их сушка. Влагосодержание рассматриваемых образцов в эксперименте не превышало 10 %.

Эксперимент проводился следующим образом. На оптический рельс устанавливалась подвижная каретка с фиксатором, на которую была закреплена подставка с исследуемым образцом (рис. 1). Далее, каретка с образцом устанавливалась напротив АЧТ с фиксированным зазором. Предварительно, с помощью блока управления, задавалась температура теплового излучателя АЧТ, которая составляла 1100 °C, а погрешность поддержания температуры – 1 °C. Расположение образца и оптико-электронной регистрирующей аппаратуры напротив АЧТ выбралось таким образом, чтобы фиксировать влияние теплового потока на торце образца (рис. 3). Тепловое воздействие продолжалось в течение 10 минут. Дополнительно, для контроля температуры на поверхности образца, были проведены термопарные измерения. В исследуемый образец устанавливались две термопары (тип K, диаметр спая 200 мкм), спай одной из которых выходил на поверхность, а другой – был заглублен на 3 мм.

Для того чтобы определить плотность излучения АЧТ на различном удалении от его апертуры, было проведено дополнительное исследование. На подвижную каретку был закреплен датчик теплового потока SBG01 (рис. 4).

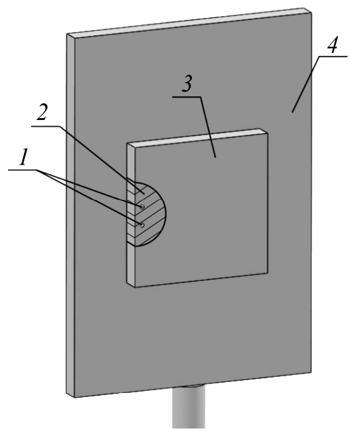


Рис. 3. Подставка с установленным образцом: *1* – отверстия для термопар; *2* – область воздействия теплового потока АЧТ; *3* – исследуемый образец; *4* – державка

Fig. 3. Retainer with a fixed sample: *1*, outlet for thermocouples; *2*, area of impact of the blackbody heat flux; *3*, studied sample; and *4*, holder

Рис. 4. Измерение теплового потока от АЧТ: *a* – фотография экспериментальной установки; *b* – инфракрасное изображение установленного датчика теплового потока SBG01: *1* – выходная часть АЧТ, *2* – виртуальный измерительный инструмент программного обеспечения «Altair», с помощью которого контролировался зазор

Fig. 4. Measurement of the blackbody heat flux: (*a*) picture of the experimental setup; (*b*) infrared image of the installed heat flux sensor SBG01: *1*, output part of the blackbody and *2*, virtual measuring instrument in an Altair software for distance control

Перемещая каретку с датчиком, тем самым изменяя расстояние между АЧТ и датчиком теплового потока, производилась регистрация сигнала с помощью осциллографа. Полученные данные пересчитывались в соответствии с калибровкой завода изготовителя. В результате измерений максимальная плотность теплового потока (рис. 5) при зазоре 1 мм составила 40.1 кВт/м^2, а максимальная ошибка между аппроксимационной и экспериментальной кривой составила 3.5 %.

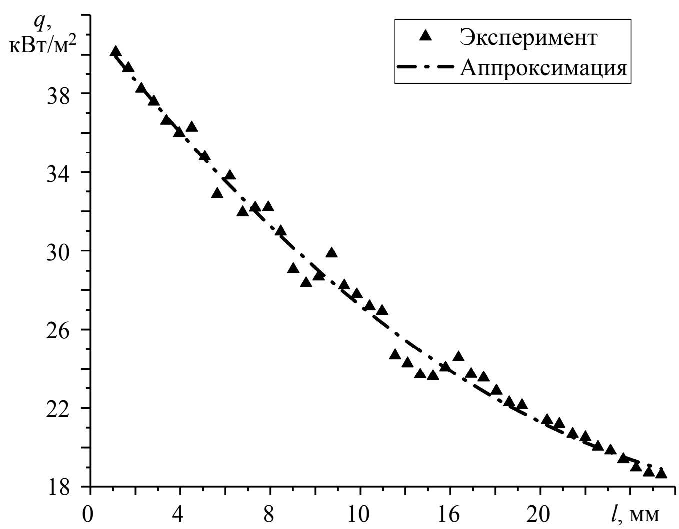


Рис. 5. Изменение теплового потока в зависимости от расстояния между датчиком и АЧТ

Fig. 5. Heat flux variation with distance between sensor and blackbody

Известно, что большое влияние на скорость обугливания и время задержки воспламенения древесины оказывает ее плотность и теплофизические свойства [1]. Максимально допустимый тепловой поток, при котором использование данной модели АЧТ является безопасным без повреждения аппаратной части, является порог 37.5 кВт/м^2. Нижняя граница была подобрана экспериментальным путем. Таким образом, в качестве рабочего значения теплового потока был выбран интервал 32 – 37.5 кВт/м^2, который соответствует литературным данным по параметрам оценки пожароопасных свойств материалов из древесины [13].

В результате съемки на инфракрасную камеру были получены последовательности термограмм, дальнейшая обработка которых производилась с использованием программного обеспечения «Altair». Для анализа динамики изменения температуры на торце исследуемого образца была проведена следующая обработка. Зная размеры матрицы инфракрасной камеры и масштабный коэффициент (расстояние от объектива камеры до торца образца), на полученной термограмме были определены границы образца на кадре (рис. 6). Для того чтобы получить таблицу температур, соответствующую данному образцу, был произведен экспорт значений температуры, соответствующий каждому пикселю матрицы. В дальнейшем, из нее были удалены лишние значения в соответствии с ранее полученными данными о положении образца на кадре.

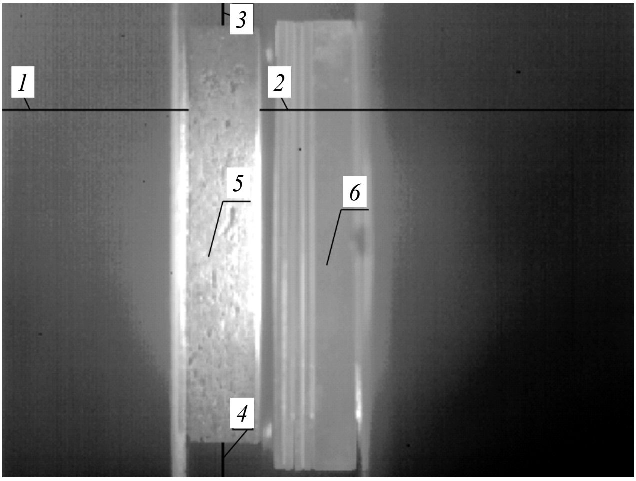


Рис. 6. Инфракрасное изображение образца ДСП: (*1–4*) – установленные измерительные инструменты для определения положения образца в кадре; *5* – исследуемый образец; *6* – модель АЧТ

Fig. 6. Infrared image of the chipboard sample: *1–4*, installed measuring instruments for determining sample position in the frame; *5*, studied sample; and *6*, blackbody model

Результаты экспериментальных исследований

На рис. 7 представлена типичная последовательность термограмм распространения фронта тления на примере образца ДСП. Асимметричность распределения температуры на торце образца вызвана влиянием конвективного потока разогретых газообразных продуктов горения.

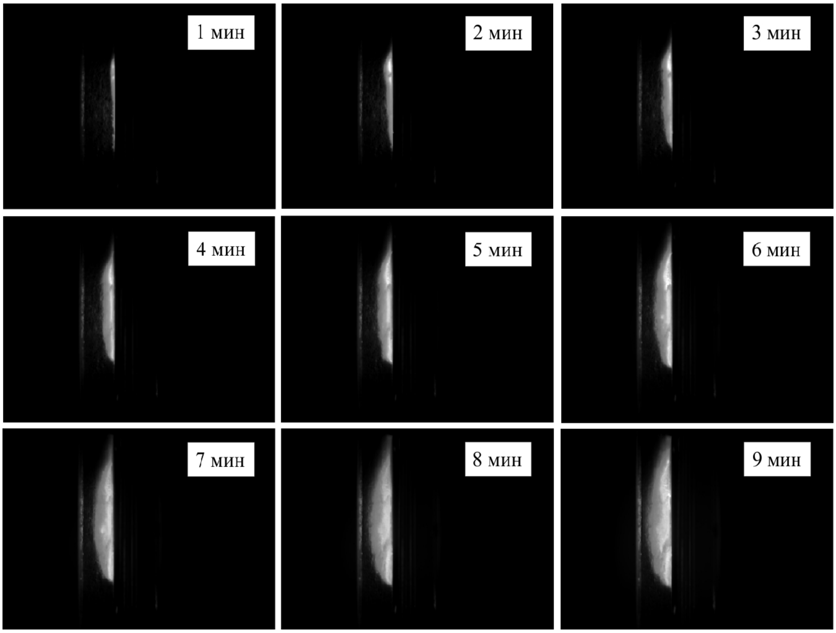


Рис. 7. Последовательность термограмм развития фронта тления на торце образца ДСП
Fig. 7. **S**equence of thermograms of smouldering front propagation at the end of chipboard sample

Использование ИК-диагностики позволило оценить пожароопасные характеристики исследуемых образцов древесных строительных материалов в результате воздействия теплового потока. Данные представлены в табл. 1 (v_{char} – скорость обугливания, d_{char} – глубина обугливания).

Таблица 1

Скорость и глубина обугливания рассматриваемых образцов древесных строительных материалов (осреднение по 3 опытам) при плотности теплового потока 34.7 кВт/м^2

Материал	Фанера		ОСП		ДСП	
	v_{char}, мм/мин	d_{char}, мм	v_{char}, мм/мин	d_{char}, мм	v_{char}, мм/мин	d_{char}, мм
Без пропитки	1.38	13.77	1.42	14.29	1.42	14.19
«ЗОТЕКС Биопирол»	1.49	14.87	1.37	13.72	1.46	14.61
«Фенилакс»	1.52	15.30	1.43	14.10	1.44	14.40
«ФУКАМ»	1.13	11.34	1.47	14.65	1.07	12.47

В результате проведенных исследований с использованием термопар и инфракрасной камеры было получено хорошее согласование данных по максимальной температуре на поверхности, подверженной тепловому воздействию. В частности, для рассматриваемых образцов без использования огнезащитной пропитки, среднее значение температуры на поверхности составило 650 °C, а с использованием пропитки 820 °C.

Литературный обзор по теме исследования показал, что в настоящее время отсутствуют сведения по оценке скорости и глубины обугливания рассмотренных в настоящей работе древесных строительных материалов. Для верификации полученных экспериментальных данных было проведено сравнение с работой [1], в которой обобщены результаты по средней скорости обугливания древесины лиственных и хвойных пород в зависимости от интенсивности внешнего теплового потока в интервале 10–40 кВт/м^2. Ввиду того, что в составе исследуемых образцов присутствуют дополнительные связующие компоненты (синтетические смолы и пр.), для сравнения была выбрана фанера как материал, наиболее близкий по составу к массиву березы. Расхождение результатов составило 30 %. Авторы полагают, что это связано с многослойной структурой материала фанеры.

Время воспламенения образцов в результате теплового воздействия (q = 37.5 кВт/м^2) представлены в табл. 2.

Таблица 2

Время воспламенения образцов

Тип материала	Огнезащитный состав	Время воспламенения*, с
ОСП	Без пропитки	24
	«ЗОТЕКС Биопирол»	32
	«Фенилакс»	30
	«ФУКАМ»	30
Фанера	Без пропитки	23
	«ЗОТЕКС Биопирол»	52
	«Фенилакс»	38
	«ФУКАМ»	43
ДСП	Без пропитки	35
	«ЗОТЕКС Биопирол»	38
	«Фенилакс»	37
	«ФУКАМ»	53

* осреднение производилось по 6 повторениям.

Следует отметить, что при выбранных параметрах эксперимента для необработанных материалов быстрее всего зажигались образцы фанеры и ОСП, а время зажигания ДСП увеличивалось на 30 %. Это связано, по-видимому, с различиями в химическом составе, структуре материала и разной степенью впитываемости. В частности, применение огнезащитных составов для образцов фанеры увеличивало время воспламенения в 1.7–2 раза. Похожий эффект наблюдался для образца ДСП с пропиткой «ФУКАМ» – увеличение времени воспламенения в 1.5 раза. Для остальных случаев вклад в увеличение времени воспламенения составил не более 20 %.

Результаты проведенных экспериментов показывают, что наличие огнезащитной пропитки на поверхности материала увеличивает время зажигания образца, но не исключает возможности появления пламени на поверхности. Это может быть обусловлено образованием на поверхности карбонизированного слоя, кокса, препятствующего быстрому прогреву образца. Анализ полученных данных показывает, что вклад рассмотренных огнезащитных составов на увеличение времени воспламенения образца минимален с учетом выбранного способа пропитки, что подтверждается в работе [31].

Заключение

Предложена оригинальная методика постановки эксперимента с регистрацией ИК-изображения температурного поля торца исследуемого образца при воздействии на его фронтальную поверхность теплового потока. Использование в качестве излучателя теплового потока эталонного излучателя АЧТ позволяет иметь исследователю источник тепла с высокой однородностью плотности теплового потока, большой диапазон задаваемых температур с погрешностью поддержания 1.0 °С задаваемой температуры.

Проведено экспериментальное исследование влияния мощности теплового потока на характеристики воспламенения и обугливания древесных строительных материалов с применением бесконтактных методов ИК-диагностики в узких спектральных диапазонах инфракрасных длин волн. Показано, что эффективность обработки поверхностными огнезащитными пропитками разных производителей поверхностей выбранных строительных материалов не превышает 30 % на основе метода определения времени воспламенения, скорости и глубины обугливания.

Полученные результаты могут служить в качестве дополнительных рекомендаций при разработке методов испытаний строительных материалов и огнезащитных составов на пожарную опасность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асеева Р.М.*, *Серков Б.Б.*, *Сивенков А.Б.* Горение и пожарная опасность древесины // Пожаровзрывобезопасность. 2012. № 21 (1). С. 19–32.
2. *Chandler C.*, *Cheney P.*, *Thomas P.*, *Trabaud L.*, *Williams D.* Forest fire behavior and effects (Fire in Forestry). New York: John Wiley and Sons, 1983. V. 1. 450 p.
3. *Гришин А. М.* Общая физико-математическая модель зажигания и горения древесины // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 2. С. 60–70. URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000461276
4. *North M.*, *Stephens S.*, *Collins B.M.* Using fire to increase the scale, benefits, and future maintenance of fuels treatments // J. Forestry. 2012. V. 110. Iss. 7. P. 392–401. DOI: https://doi.org/10.5849/jof.12-021.
5. *Campbell J.L.*, *Ager A.A.* Forest wildfire, fuel reduction treatments, and landscape carbon stocks: A sensitivity analysis // Journal of Environmental Management. 2013. V. 121. P. 124–132. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2013.02.009.
6. *Rehm R.G.*, *Hamins A.*, *Baum H.R.*, *McGrattan K.B.*, *Evans D.D.* Community-scale fire spread // Proceedings of the California's 2001 Wildfire Conference, California. 2002. P. 126–139.
7. *Morandini F.*, *Silvani X.* Experimental investigation of the physical mechanisms governing the spread of wildfires // Int. J. Wildland Fire. 2010. V. 19. Iss. 5. P. 570–582. DOI: 10.1071/WF08113.
8. *Filkov A.I.*, *Prohanov S.A.*, *Mueller E.*, *Kasymov D.P. Martynov P.*, *Houssami M.*, *Thomas J.C.*, *Skowronski N.*, *Butler B.*, *Gallagher M.R.*, *Clark K.*, *Mell W.*, *Kremens R.*, *Hadden R.M.*, *Simeoni A.* Investigation of firebrand production during prescribed fires conducted in a pine forest // Proceedings of the Combustion Institute. 2017. V. 36. Iss. 2. P. 3263–3270. DOI: 10.1016/j.proci.2016.06.125.
9. *Sullivan A. L.* Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 1: Physical and quasi-physical models // Int. J. Wildland Fire. 2009. V. 18. P. 349–368. DOI: https://doi.org/10.1071/WF06143.
10. *Babrauskas V.* Charring rate of wood as a tool for fire investigations // Fire Safety Journal. 2005. V. 40. P. 528–554. DOI:10.1016/j.firesaf.2005.05.006.
11. *Grishin A.M.*, *Filkov A.I.*, *Loboda E.L.*, *Reyno V.V.*, *Kozlov A.V.*, *Kuznetsov V.T.*, *Kasymov D.P.*, *Andreyuk S.M.*, *Ivanov A.I.* A Field Experiment on Grass Fire Effects on Wooden Constructions and Peat Layer Ignition // Int. J. Wildland Fire. 2014. V. 23. P. 445–449.

12. *Hirle S.*, *Balog K.* The effect of the heat flux on the self-ignition of oriented strand board // Research Papers Faculty of Materials Science and Technology in Trnava. 2017. V. 25. Iss. 40. P. 123–129.
13. *Bartlett A.I.*, *Hadden R.M.*, *Bisby L.A.* A review of factors affecting the burning behaviour of wood for application to tall timber construction // Fire Technology. 2019. V. 55. Iss. 1. P. 1–49.
14. *Hedayati F.*, *Yang W.*, *Zhou A.* Effects of moisture content and heating condition on pyrolysis and combustion properties of structural fuels // Fire and Materials. 2018. V. 42. Iss. 7. P. 741–749.
15. *Polishchuk E.Yu.*, *Sivenkov A.B.*, *Kenzhehan S.K.* Heating and charring of timber constructions with thin-layer fire protection // Magazine of Civil Engineering. 2018. V. 81. Iss. 5. P. 3–14. DOI: 10.18720/MCE.81.1.
16. *Hasburgh L. E.*, *Stone D. S.*, *Zelinka S. L.* Laboratory investigation of fire transfer from exterior wood decks to buildings in the Wildland–Urban interface // Fire Technology. 2017. V. 53. Iss. 2. P. 517–534. DOI:10.1007/s10694-016-0588-0.
17. *Vermesi I.*, *Di Domizio M.J.*, *Richter F.*, *Weckman E.J.*, *Rein G.* Pyrolysis and spontaneous ignition of wood under transient irradiation: Experiments and a-priori predictions // Fire Safety Journal. 2017. V. 91. P. 218–225. DOI:10.1016/j.firesaf.2017.03.081.
18. *Мельников В.С.*, *Хасанов И.Р.*, *Кириллов С.В.*, *Васильев В.Г.*, *Ванин С.А.*, *Щербаков М.И.*, *Гарсков Р.В.* Термографирование при огневых испытаниях фрагментов зданий и строительных конструкций // Пожарная безопасность. 2015. № 3. С. 83–90.
19. *Мельников В.С.*, *Хасанов И.Р.*, *Кириллов С.В.*, *Васильев В.Г.*, *Ванин С.А.*, *Потемкин С.А.* Натурные огневые испытания фрагментов зданий из сэндвич-панелей // Пожарная безопасность. 2016. № 2. С. 120–127.
20. *Асеева Р.М.*, *Серков Б.Б.*, *Сивенков А.Б.* Горение древесины и ее пожароопасные свойства: монография. М.: Академия ГПС, 2010. 262 с.
21. *Вавилов В.П.* Инфракрасная термография и тепловой контроль. М.: ИД Спектр, 2009. 544 с.
22. *O'Brien J.J.*, *Loudermilk E.L.*, *Hornsby B.*, *Hudak A.T.*, *Bright B.C.*, *Dickinson M.B.*, *Hiers J.K.*, *Teske C.*, *Ottmar R.D.* High-resolution infrared thermography for capturing wildland fire behaviour: RxCADRE 2012 // Int. J. Wildland Fire. 2016. V. 25. P. 62–75. DOI: 10.1071/WF14165.
23. *Rios O.*, *Pastor E.*, *Valero M.M.*, *Planas E.* Short-term fire front spread prediction using inverse modelling and airborne infrared images // Int. J. Wildland Fire. 2016. V. 25. P. 1033–1047. DOI: http://dx.doi.org/10.1071/WF16031.
24. *Sofan P.*, *Bruce D.*, *Jones E.*, *Marsden J.* Detecting peatland combustion using shortwave and thermal infrared landsat-8 data // Advances in Forest Fire Research. 2018. P. 969–979. DOI: https://doi.org/10.14195/978-989-26-16-506_106.
25. *Valero M.M.*, *Jimenez D.*, *Butler B.*, *Mata C.*, *Rios O.*, *Pastor E.*, *Planas E.* On the use of compact thermal cameras for quantitative wildfire monitoring // Advances in Forest Fire Research. 2018. P. 1077–1086. DOI: https://doi.org/10.14195/978-989-26-16-506_119.
26. *Лобода Е.Л.*, *Касымов Д.П.*, *Фильков А.И.*, *Рейно В.В.*, *Агафонцев М.В.* Некоторые аспекты исследования в полевых и лабораторных условиях природных пожаров с применением термографии // Актуальные проблемы пожарной безопасности: тез. докл. XXX Междунар. науч.-практ. конф. М.: ВНИИПО. 2018. С. 295–300.
27. *Kasymov D.P.*, *Agafontsev M.V.*, *Perminov V.V.* Estimation of the influence of wood-fire retardants on fire behavior of some types of wood construction materials // J. Physics: Conference Series. 2018. V. 1105. P. 1–7. DOI: 10.1088/1742-6596/1105/1/012039.
28. *Kasymov D.P.*, *Agafontsev M.V.*, *Perminov V.V.*, *Martynov P.* Investigation of the ignition of wood structural materials (with and without fire retardant treatment) under the influence of a model fire of irregular intensity // EPJ Web Conf. 2019. V. 196. DOI: https://doi.org/10.1051/epjconf/201919600038.
29. *Лобода Е.Л.*, *Матвиенко О.В.*, *Агафонцев М.В.*, *Рейно В.В.* Применение термографии для оценки масштабов турбулентности в пламени // Оптика атмосферы и океана. 2018. Т. 31. № 12. С. 1001–1006. DOI: 10.15372/AOO20181210.

30. *Госсорг Ж.* Инфракрасная термография. М.: Мир, 1988. 416 с.
31. *Chernenko V.A.* Technology of wood impregnation by polymeric compositions // Construction of Unique Buildings and Structures. 2017. V. 7. Iss. 58. P. 32–52. DOI: 10.18720/CUBS.58.3.

Статья поступила 21.01.2019 г.

Kasymov D.P., Agafontsev M.V., Perminov V.V., Reyno V.V., Martynov P.S. EXPERIMENTAL STUDY OF THE INFLUENCE OF HEAT FLUX CAPACITY ON THE IGNITION AND CHARRING CHARACTERISTICS OF WOOD CONSTRUCTION MATERIALS BY USING INFRARED DIAGNOSTICS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 65–78

DOI 10.17223/19988621/59/7

Keywords: heat flux, wood construction materials, infrared diagnostics, charring, ignition, fire protection.

Much heat is released during the propagation of ground and crown fires, which can be a reason of wood construction firing in the settlements located near the forest border. There are a great number of experimental studies on the fire hazard of wooden materials. However, the available data require additional experimental results to study the fire-hazardous characteristics of various construction materials by using infrared diagnostics.

The paper presents the results of experimental study of the impact of heat flux emitted by a standard source on the charring and ignition characteristics of wood construction materials using thermography. The effect of various fire retardants on the charring rate and depth of the samples as well as the ignition time are analyzed. The following widespread wood construction materials are used as studied samples: plywood, chipboard, and oriented strand board.

As a result of experimental studies carried out using thermocouples and infrared camera, a good agreement in the maximum temperature on the surface exposed to the heat effect was obtained. The use of the fire retardant impregnation results in an increase in the ignition time of the sample. At the same time it does not eliminate a possibility of the flame occurrence on the sample surface. The experimental method proposed in this paper allows one to estimate the charring depth and rate of the material exposed to the heat flux effect, and to determine the ignition time.

Financial support. This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 18-79-00232).

KASYMOV Denis Petrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk. Russian Federation). E-mail: denkasymov@gmail.com

AGAFONTSEV Mikhail Vladimirovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kim75mva@gmail.com

PERMINOV Vladislav Valer`evich (Tomsk State University, Tomsk. Russian Federation). E-mail: ya.vladperminov2013@yandex.ru

REYNO Vladimir Vladimirovich (V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: reyno@iao.ru

MARTYNOV Pavel Sergeevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: martypavel@bk.ru

REFERENCES

1. Aseeva R.M., Serkov B.B., Sivenkov A.B. (2012) Gorenie i pozharnaya opasnost' drevesiny [Combustion and fire safety of wooden materials]. *Pozharovzryvobezopasnost' – Fire and Explosion Safety*. 21(1). pp. 19–32.
2. Chandler C., Cheney P., Thomas P., Trabaud L., Williams D. (1983) *Fire in Forestry. Forest fire behavior and effects. Vol. 1*. New York: John Wiley and Sons.
3. Grishin A.M. (2010) Obshchaya fiziko-matematicheskaya model' zazhiganiya i goreniya drevesiny [Physical and mathematical model of ignition and combustion of wooden materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(10). pp. 60–70.
4. North M., Stephens S., Collins B.M. (2012) Using fire to increase the scale, benefits, and future maintenance of fuels treatments. *Journal of Forestry*. 110(7). pp. 392–401. DOI: 10.5849/jof.12-021.
5. Campbell J.L., Ager A.A. (2013) Forest wildfire, fuel reduction treatments, and landscape carbon stocks: A sensitivity analysis. *Journal of Environmental Management*. 121. pp. 124–132. DOI: 10.1016/j.jenvman.2013.02.009.
6. Rehm R.G., Hamins A., Baum H.R., McGrattan K.B., Evans D.D. (2002) Community-scale fire spread. *Proceedings of the California's 2001 Wildfire Conference*. pp. 126–139.
7. Morandini F., Silvani X. (2010) Experimental investigation of the physical mechanisms governing the spread of wildfires. *International Journal of Wildland Fire*. 19(5). pp. 570–582. DOI: 10.1071/WF08113.
8. Filkov A.I., Prohanov S.A., Mueller E., Kasymov D.P. Martynov P., Houssami M., Thomas J.C., Skowronski N., Butler B., Gallagher M.R., Clark K., Mell W., Kremens R., Hadden R.M., Simeoni A. (2017) Investigation of firebrand production during prescribed fires conducted in a pine forest. *Proceedings of the Combustion Institute*. 36(2). pp. 3263–3270. DOI: 10.1016/j.proci.2016.06.125.
9. Sullivan A.L. (2009) Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 1: Physical and quasi-physical models. *International Journal of Wildland Fire*. 18(4). pp. 349–368. DOI: 10.1071/WF06143.
10. Babrauskas V. (2005) Charring rate of wood as a tool for fire investigations. *Fire Safety Journal*. 40(6). pp. 528–554. DOI:10.1016/j.firesaf.2005.05.006.
11. Grishin A.M., Filkov A.I., Loboda E.L., Reyno V.V., Kozlov A.V., Kuznetsov V.T., Kasymov D.P., Andreyuk S.M., Ivanov A.I. (2014) A Field experiment on grass fire effects on wooden constructions and peat layer ignition. *International Journal of Wildland Fire*. 23(3). pp. 445–449. DOI: 10.1071/WF12069.
12. Hirle S., Balog K. (2017) The effect of the heat flux on the self-ignition of oriented strand board. *Research Papers Faculty of Materials Science and Technology in Trnava*. 25(40). pp. 123–129. DOI:10.1515/rput-2017-0014.
13. Bartlett A.I., Hadden R.M., Bisby L.A. (2019) A review of factors affecting the burning behaviour of wood for application to tall timber construction. *Fire Technology*. 55(1). pp. 1–49. DOI: 10.1007/s10694-018-0787-y.
14. Hedayati F., Yang W., Zhou A. (2018) Effects of moisture content and heating condition on pyrolysis and combustion properties of structural fuels. *Fire and Materials*. 42(7). pp. 741–749. DOI: 10.1002/fam.2528.
15. Polishchuk E.Yu., Sivenkov A.B., Kenzhehan S.K. (2018) Heating and charring of timber constructions with thin-layer fire protection. *Magazine of Civil Engineering*. 81(5). pp. 3–14. DOI: 10.18720/MCE.81.1.
16. Hasburgh L.E., Stone D.S., Zelinka S.L. (2017) Laboratory investigation of fire transfer from exterior wood decks to buildings in the Wildland–Urban interface. *Fire Technology*. 53(2). pp. 517–534. DOI:10.1007/s10694-016-0588-0.
17. Vermesi I., Di Domizio M.J., Richter F., Weckman E.J., Rein G. (2017) Pyrolysis and spontaneous ignition of wood under transient irradiation: Experiments and a-priori predictions. *Fire Safety Journal*. 91. pp. 218–225. DOI:10.1016/j.firesaf.2017.03.081.

18. Mel'nikov V.S., Khasanov I.R., Kirillov S.V., Vasil'ev V.G., Vanin S.A., Shcherbakov M.I., Garskov R.V. (2015) Termografirovanie pri ognevykh ispytaniyakh fragmentov zdaniy i stroitel'nykh konstruktsiy [Thermography of the buildings and their elements at fire tests]. *Pozharnaya bezopasnost'*. 3. pp. 83–90.
19. Mel'nikov V.S., Khasanov I.R., Kirillov S.V., Vasil'ev V.G., Vanin S.A., Potemkin S.A. (2016) Naturnye ognevye ispytaniya fragmentov zdaniy iz sendvich-paneley [Full-scale fire tests of building elements made of sandwich panels]. *Pozharnaya bezopasnost'*. 2. pp. 120–127.
20. Aseeva R.M., Serkov B.B., Sivenkov A.B. (2010) *Gorenie drevesiny i eye pozharoopasnye svoystva* [Combustion and fire-hazardous properties of wooden material]. Moscow: Akademiya GPS.
21. Vavilov V.P. (2009) *Infrakrasnaya termografiya i teplovoy kontrol'* [Infrared thermography and heat control]. Moscow: Spector.
22. O'Brien J.J., Loudermilk E.L., Hornsby B., Hudak A.T., Bright B.C., Dickinson M.B., Hiers J.K., Teske C., Ottmar R.D. (2016) High-resolution infrared thermography for capturing wildland fire behaviour: RxCADRE 2012. *International Journal of Wildland Fire*. 25. pp. 62–75. DOI:10.1071/WF14165.
23. Rios O., Pastor E., Valero M.M., Planas E. (2016) Short-term fire front spread prediction using inverse modelling and airborne infrared images. *International Journal of Wildland Fire*. 25. pp. 1033–1047. DOI: 10.1071/WF16031.
24. Sofan P., Bruce D., Jones E., Marsden J. (2018) Detecting peatland combustion using short-wave and thermal infrared landsat-8 data. *Advances in Forest Fire Research*. pp. 969–979. DOI: 10.14195/978-989-26-16-506_106.
25. Valero M.M., Jimenez D., Butler B., Mata C., Rios O., Pastor E., Planas E. (2018) On the use of compact thermal cameras for quantitative wildfire monitoring. *Advances in Forest Fire Research*. pp. 1077–1086. DOI: 10.14195/978-989-26-16-506_119.
26. Loboda E.L., Kasymov D.P., Filkov A.I., Reyno V.V., Agafontsev M.V. (2018) Nekotorye aspekty issledovaniya v polevykh i laboratornykh usloviyakh prirodnykh pozharov s primeneniem termografii [Some aspects of the research of wildfires using thermography in the field and laboratory conditions]. *Aktual'nye problemy pozharnoy bezopasnosti: tezisy dokladov: XXX Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii – Current Problems of Fire Safety: Theses of Reports of XXX International Research and Practical Conference*. pp. 295–300.
27. Kasymov D.P., Agafontsev M.V., Perminov V.V. (2018) Estimation of the influence of wood-fire retardants on fire behavior of some types of wood construction materials. *Journal of Physics: Conference Series*. 1105. pp. 1–7. DOI: 10.1088/1742-6596/1105/1/012039.
28. Kasymov D.P., Agafontsev M.V., Perminov V.V., Matrynov P. (2019) Investigation of the ignition of wood structural materials (with and without fire retardant treatment) under the influence of a model fire of irregular intensity. *EPJ Web Conf.* 196. DOI: 10.1051/epjconf/201919600038.
29. Loboda E.L., Matvienko O.V., Agafontsev M.V., Reyno V.V. (2018) Primenenie termografii dlya otsenki masshtabov turbulentnosti v plameni [The use of thermography for assessment of the magnitude of flame turbulence]. *Optika atmosfery i okeana*. 31(12). pp. 1001–1006. DOI: 10.15372/AOO20181210.
30. Gossorg Zh. (1988) *Infrakrasnaya termografiya* [Infrared thermography]. Moscow: Mir.
31. Chernenko V.A. (2017) Technology of wood impregnation by polymeric compositions. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 7(58). pp. 32–52. DOI: 10.18720/CUBS.58.3.

Received: January 21, 2019

УДК 614.841.42
DOI 10.17223/19988621/59/8

**Н.П. Копылов, В.Н. Карпов, А.Е. Кузнецов,
Д.В. Федоткин, И.Р. Хасанов, Е.Ю. Сушкина**

ОСОБЕННОСТИ ТУШЕНИЯ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ АВИАЦИИ

Систематизированы данные по плотности орошения водой леса для создания заградительных полос и тушения очагов горения. Приведены характеристики зон орошения при сбросе воды с самолетов легкого класса GL-215, среднего – БЕ-200 и тяжелого – ИЛ-76. Выполнена оценка влияния высоты сброса огнетушащего вещества на плотность орошения и приведены формулы для расчета эффективной высоты сброса, карты орошения и массовой концентрации огнетушащего вещества на земле. Приведены результаты стендовых огневых экспериментов по оценки эффективности добавок к воде при тушении верхового и низового пожаров.

Ключевые слова: *лесной пожар*, *авиационное пожаротушение*, *плотность орошения*, *дисперсность огнетушащего вещества*, *расчет высоты сброса и карт орошения*, *добавки к воде.*

Применение авиации при определённых условиях может существенно повысить эффективность борьбы с лесными пожарами на всех стадиях ликвидации [1]:

- при сдерживании (локализации) пожара;
- дотушивании (ликвидации очагов горения на локализованной площади);
- окарауливании (наблюдении за пожарищем для предотвращения возобновления пожара от необнаруженных очагов горения и переноса горящих частиц на несгоревшую территорию).

Для каждого вида перечисленных операций необходимо обеспечить расходные характеристики сбрасываемых авиацией огнетушащих веществ.

В [2] приведены обобщенные данные по требуемым удельным расходам воды при прокладке опорных и заградительных полос (локализации пожара) (табл. 1).

Таблица 1

Требуемый расход воды при прокладке опорных и заградительных полос

Лесорастительные условия	Удельный расход воды, $л \cdot м^{-2}$
Лесорастительные участки с полнотой хвойных насаждений менее 0.2	0.7
Хвойные насаждения с полнотой от 0.2 до 0.3 со слабовыраженным напочвенным покровом и подстилкой 2–3 см	1.3
Хвойные насаждения с полнотой от 0.4 до 0.5 со слабовыраженным напочвенным покровом и подстилкой 3–5 см	2.0
Высокополнотные хвойные насаждения с мощным слоем подстилки, а также участки повышенной пожарной опасности (хвойные молодняки, захламленные вырубки, гари и т.п.	2.6

В США [3] приняты также четыре уровня средней величины дозировки покрытия поверхности лесных массивов огнетушащей жидкостью при тушении лесных пожаров. Диапазон дозировки от 0.5 до 1.75 л·м$^{-2}$ в зависимости от плотности леса, скорости ветра и других параметров. Тушение предполагает слив огнетушащего вещества на очаг горения (горящую кромку леса). В [4] отмечается, что для тушения степных и низовых лесных пожаров в среднем необходимо обеспечить плотность орошения водой 5–7 л·м$^{-2}$, а для пожаров с более интенсивным горением свыше 10 л·м$^{-2}$, при этом необходимая плотность определяется тепловым балансом пожара, связанным со свойствами и запасом горючих веществ, и зависит от характеристик огнетушащего вещества.

Для оценки возможностей авиационного способа борьбы с лесными пожарами экспериментально определяется карта орошения земной поверхности при сбросе воды с самолета. Величина площади орошения зависит от ёмкости баков, высоты сброса, скорости самолета, метеорологических условий. В [2–4] приведены карты орошения для зарубежных и отечественных самолетов (табл. 2).

Таблица 2

Карты орошения для самолетов GL-215 «Canadair», БЕ-200, ИЛ-76

Тип самолета и характеристика сброса воды						
GL-215 $V_{воды}$ = 5455 л; $H_{сб}$ = 20–30 м; $v_{полета}$ = 180–200 км·ч$^{-1}$		БЕ-200 $V_{воды}$ = 12000 л; $H_{сб}$ = 30–50 м; $v_{полета}$ = 260 км·ч$^{-1}$			ИЛ-76 $V_{воды}$ = 42000 л; $H_{сб}$ = 60 м; $v_{полета}$ = 280 км·ч$^{-1}$	
Пороговая плотность орошения, л·м$^{-2}$	Длина × ширина полосы, м	Пороговая плотность орошения, л·м$^{-2}$	Длина × ширина полосы, м	Средняя плотность орошения л·м$^{-2}$	Средняя/ максимальная плотность орошения, л·м$^{-2}$	Длина × ширина полосы, м
0.5	90×35	0.1	133–500 × 50–88	0.34–0.95	0.8/2.7	600–800 × 60–80
1.0	64×29	0.8	20–320 × 20–44	0.98–2.21		
1.75	52×26	3.5	10–40 × 4–16	3.01–5.22		

Все эти данные получены в «холодных» экспериментах, то есть без учёта воздействия горящего леса.

Приведенные значения показывают, что карты орошения со значениями плотности воды, во-первых, имеют небольшие размеры по смачиваемой площади и, во-вторых, полученные плотности, в лучшем случае, обеспечивают локализацию пожара в соответствии с данными табл. 1. Плотность орошения в значительной степени зависит, как отмечалось выше, от высоты полёта, которая в свою очередь при тушении реальных пожаров влияет на дисперсность капель воды.

Высота сброса огнетушащего вещества определяется безопасностью полёта над зоной пожара. В реальных условиях лесной пожар вносит существенные изменения в состояние атмосферы. В [5] с помощью аналитических и математических моделей, которые основаны на уравнении Навье – Стокса, численно исследованы параметры конвективных движений над крупными пожарами. Установлено, что для линейного пожара с мощностью тепловыделения $5 \cdot 10^6$ кВт·м$^{-1}$ и шириной фронта 80 м вертикальный Z и горизонтальный D размеры зон возмущений, реализующихся в конвективной колонке, составили $Z = 1.5$ км, $D = 0.5$ км. Анализ характеристик возмущений атмосферы при крупных пожарах показал, что взаимодействие индуцированных пожаром воздушных потоков с ветром может привести к проявлению знакопеременных нагрузок в горизонтальной плоскости. Наличие вихревой структуры в конвективной колонке над пожаром приводит к появлению знакопеременной вертикальной перегрузки. При подлете к кромке колонки из-за нисходящих движений воздуха на ее периферии эта перегрузка будет направлена вниз, при пролете центра колонки она максимальна и направлена вверх, при выходе из колонки снова вниз. При полете на малых высотах в условиях ограниченной из-за задымления видимости фактор знакопеременных возмущений имеет важное значение с точки зрения обеспечения безопасности полетов. Таким образом, по соображениям безопасности требуется увеличить высоту полета.

В [6] получены зависимости плотности орошения от высоты полета самолета. Эта зависимость имеет экспоненциальный характер. В этой работе на основании обработки экспериментальных данных для самолетов GL-215 и БЕ-200 получено соотношение для расчета эффективной высоты сброса жидкости

$$H_0 = A(\lambda) \cdot \frac{\sqrt{\sigma} \cdot \lambda}{g \cdot \mathrm{Fr}^2} \quad (1),$$

где $A(\lambda)$ – коэффициент, зависящий от вида добавки к воде (замедлителя горения); $\lambda = l^2 / \sigma$ – удлинение поперечного сечения сливного люка; l – длина водяного бака, м; σ – площадь сливного люка бака самолета, м^2; g – ускорение свободного падения, м^2·с$^{-1}$.

На рис. 1 приведена зависимость плотности орошения q в зависимости от высоты полета H_0. Fire Trol 100 – раствор воды с добавкой сульфата аммония, аттипульгитной глины (загуститель) окиси железа. Плотность раствора $1.12 \cdot 10^3$ кг·м$^{-3}$, вязкость раствора 1.5–2 Па·с.

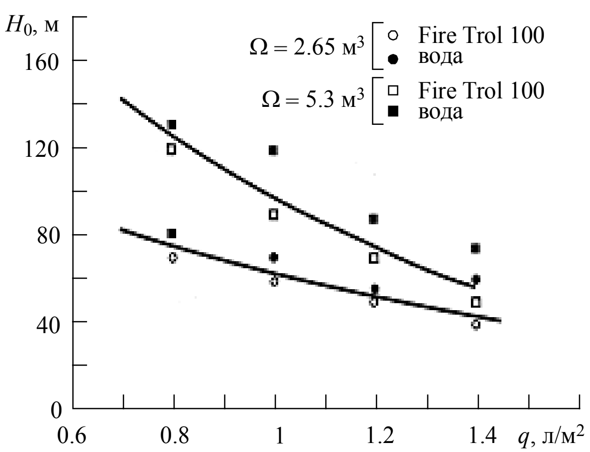


Рис. 1. Зависимость эффективной высоты H_0 сброса от плотности орошения q для Fire Trol 100 и воды (по данным работы [6])

Fig. 1. Dependency diagram of the optimum altitude of discharge H_0 on the irrigation density q for Fire Trol 100 and water (according to the data from [6])

Для самолета ИЛ-76 зависимости плотности орошения от высоты полета приведены на рис. 2. [2].

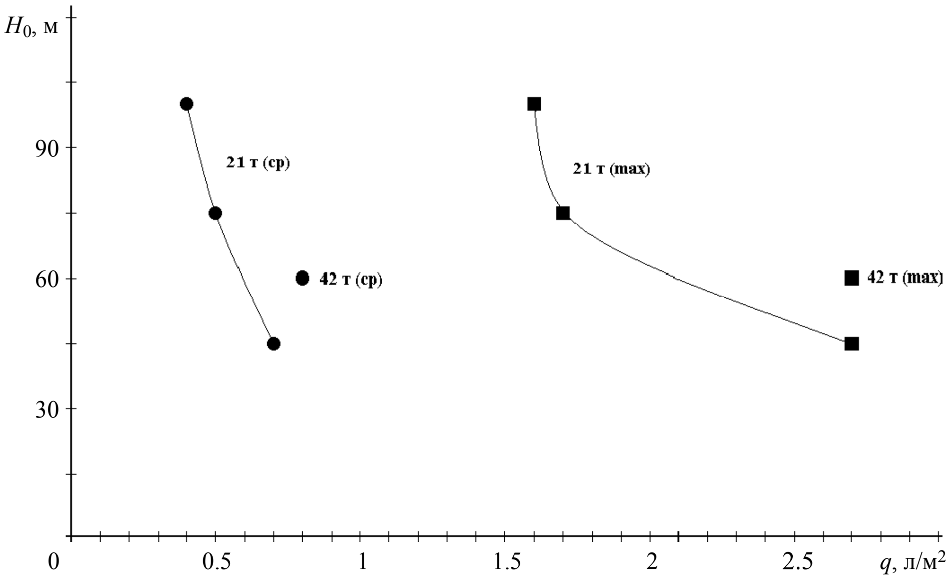


Рис. 2. Зависимость плотности орошения, от высоты полета самолета ИЛ-76 (● – средние значения плотности орошения, ■ – максимальные значения плотности орошения)
Fig. 2. Dependency diagram of the irrigation density on the flight altitude of IL-76 aircraft (● – the average values of the irrigation density, ■ – the maximum values of the irrigation density)

Единственным источником, в котором описаны результаты измерения у поверхности земли капель воды при сбросе с самолета ИЛ-76, является работа [7]. Эксперименты показали, что спектр капель воды, сброшенной с самолета ИЛ-76, близок к спектру дождевых капель. Образовавшиеся капли воды в зависимости от размера частично уносятся воздушными потоками в атмосфере, частично испаряются или теряют свою массу в факеле пламени. Такие потери по данным [8] могут доходить до 50 %. Это приводит к изменению реальной площади и плотности орошения (к их уменьшению). Краткий обзор работ по испарению капель воды приведен в [9]. В [10] выполнен расчет испарения капель воды. В [2] представлена математическая модель для расчета плотности и карты орошения. В этой модели учитывается высота сброса, скорость самолета, скорости и направление ветра, турбулентная диффузия, дисперсность капель. Геометрические границы области распределения дисперсной фазы жидкости в вертикальной $0 < Y < Y_0$ и горизонтальной $Y = 0$ плоскостях описываются соотношениями

$$Y(X, t, d) = \sup\{\inf[Y_0;\ Y_0 - W(d)(t - X/V_{н})];\ 0\}; \tag{2}$$

$$Z(X, t, d) = \inf\{\sup[0;\ V_{в}\sin(\alpha)(t - X/V_{н});\ V_{в}\sin(\alpha)Y_0/\ W(d)]\}, \tag{3}$$

где X, Y, Z – координаты; Y_0 – высота полета; t – время; d – диаметр капель; W(d) – скорость оседания капли диаметром d; $V_{н}$ – скорость самолета; $V_{в}$ – скорость ветра; α – угол между направлением ветра и направлением полета.

Для расчета массовой наземной концентрации получена формула:

$$C\left(X, Y=0, Z, t>Y_0 / W(d), d\right)=\int_0^{t_1} \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \frac{q \cdot F(d) \cdot W(d)}{W'(d) \cdot Y_0 \cdot V_{\text{в}} \cdot \sin(\alpha)} dt\, dd\ , \qquad (4)$$

где $q = G/V_{\text{н}}$ – погонный расход жидкости; G – секундный расход жидкости; $F(d)$ – плотность вероятности распределения капель по размерам; t_1 – время оседания капель жидкости.

$$W(d)=\frac{12,4}{1+1,7/d+(0,55/d)^2}\ ; \qquad (5)$$

$$F(d)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\text{e}} d} \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(d/d_{\text{m}}\right)\right)^2}{2\sigma_{\text{e}}^2}\right), \qquad (6)$$

где d_{m} – медиана распределения; σ_{e} – дисперсия логарифма диаметра частиц d.

Для повышения эффективности воды, сбрасываемой с самолета, в нее вводятся добавки в виде смачивателей, ингибиторов горения, загустителей. На эту тему выполнено большое количество работ, например [8]. В этих работах определены параметры зон орошения огнетушащими веществами с добавками. В частности, добавки загустителей могут увеличить линейные геометрические размеры зон орошения в 4 раза. Вместе с тем количественно не оценивалась эффективность добавок к воде в огневых экспериментах при сбросе огнетушащего вещества с самолета.

В [11, 12] оценена эффективность добавок к воде при тушении очагов горения, моделирующих низовой и верховой пожары. В табл. 3 приведены результаты экспериментов по тушению низового и верхового пожаров. Эксперименты проводились на специально созданном стенде, моделирующем дисперсных состав сбрасываемой с самолета огнетушащей жидкости.

Таблица 3

Результаты огневых экспериментов по определению эффективности тушения очагов, имитирующих лесной пожар водой и различными растворами

Огнетушащее вещество	Кинематическая вязкость $\times 10^{-6}$, м^2·с$^{-1}$	Время разгорания, с	Время тушения очагов, с	Очаг, имитирующий вид лесного пожара
Вода	1	383	39/52/57/62/80	Верховой
Вода	1	380	30 (время тушения последнего очага)	Низовой
Раствор бишофита, 8 %-й	1.45		14/57/63/70/92	Верховой
Раствор бишофита, 8 %-й	1.45	325	11/14/16/23/29/31/33	Низовой
Раствор бентонита, 5 %-й	10.19	320	11/13/15/16/18/19/34	Низовой
Раствор воды с примесью бентонита 10 %-й	26.2	360	13/16/17/20/21/31/45	Низовой
Раствор воды с примесью бентонита 10 %-й	26.2	340	39/43/51/57/78	Верховой
Вода + 0.3 %-й «Файрэкс»	1.14	385	60/90 – на остальных очагах горение продолжалось	Верховой
Вода + 0.3 %-й «Файрэкс»	1.14	323	13/16/17/18/22/35/84	Низовой

Верховой пожар: удельное тепловыделение $W = 2–7$ МВт·м$^{-2}$; низовой пожар: удельное тепловыделение $W = 0.31–0.327$ МВт·м$^{-2}$.

В частности, эти исследования подтвердили гипотезу Арцыбашева Е.С. [13] о том, что добавка смачивателя в воду может уменьшить эффективность тушения.

Результаты исследований [11, 12] также показали, что необходимо разработать специальный стандарт для проведения сертификационных испытаний добавок к воде, который учитывал бы особенности тушения лесных пожаров авиационным способом. Кроме того, необходимо оптимизировать концентрацию растворов с добавками. Это позволит увеличить величину плотности орошения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Проблемы* совершенствования пожаротушения в лесах и на предприятиях лесной промышленности // Материалы служебного совещания-семинара. г. Братск, 11–13 мая 1989 г. М.: ГУПО МВД СССР, 1989. С. 157.
2. *Копылов Н.П., Хасанов И.Р., Кузнецов А.Е., Федоткин Д.В., Москвилин Е.А., Стрижак П.А., Карпов В.Н.* Параметры сброса воды авиационными средствами при тушении лесных пожаров // Пожарная безопасность. 2015. № 2. С.49–55.
3. *Техническая* справка по результатам обработки методики тушения лесных пожаров с использованием самолета ИЛ-76. М.: ПО «Авиалесоохрана», НПП «ИНТЭЛ». 1993. С. 40.
4. *Асовский В.П.* Методы и средства совершенствования системы и технологий авиационных работ по распределению веществ (докторская диссертация). Краснодар: ВНИИПАНХ, 2010. С. 421.
5. *Копылов Н.П., Хасанов И.Р., Гостинцев Ю.А.* Влияние атмосферных возмущений над пожарами на полеты авиационной техники // Пожарная безопасность – история, состояние, перспективы: Материалы XIV Всерос. науч.-практич. конф. Ч. 2. М.: ВНИИПО, 1997. С. 101–103.
6. *Журавлев Ю.Ф., Михалькова Е.П., Варюхин А.Н.* Гидродинамические аспекты борьбы с лесными пожарами с помощью авиатанкеров с вертикальным сбросом воды // Пожарная безопасность. 2014. № 3. С. 132–140.
7. *Отчет* о научно-исследовательской работе «Измерение распределения по размерам водяных капель, образованных в результате сброса воды с самолета ИЛ-76 в условиях натурного эксперимента». М.: НПК «Атмосферные технологии» («АТТЕХ»). 1993. С. 91.
8. *Давыденко Э.П.* Стратегия и тактика применения авиатанкеров для борьбы с лесными пожарами с воздуха // Пожары в лесу и на объектах лесохимического комплекса: возникновение, тушение и экологические последствия // Материалы Междунар. конф. Томск; Красноярск: ТГУ. 1999. С. 58–59.
9. *Копылов Н.П., Кузнецов А.Е., Федоткин Д.В., Москвилин Е.А., Стрижак П.А., Карпов В.Н., Вагенлейтнер Е.В.* Тушение диффузионного факела пламени распыленной водой (краткий обзор) // Пожарная безопасность. 2015. № 3. С. 109–113.
10. *Сиянов А.А., Тивина Е.Н., Черных И.В.* Анализ огнетушащих свойств воды в зависимости от размеров капель // Математическое и физическое моделирование лесных пожаров и их экологических последствий: Материалы Междунар. конф. Томск; Иркутск: ТГУ, 1997. С. 149–150.
11. *Копылов Н.П., Хасанов И.Р., Федоткин Д.В., Стрижак П.А., Карпов В.Н., Зверева-Степная А.В., Москвилин Е.А.* Стенд для испытания огнетушащих веществ, применяемых при тушении лесных пожаров авиационными средствами // Пожарная безопасность. 2015. № 4. С. 51–57.
12. *Копылов Н.П., Хасанов И.Р., Кузнецов А.Е., Федоткин Д.В., Москвилин Е.А., Стрижак П.А., Карпов В.Н.* Оптимизация выбора добавок к воде при тушении лесных пожаров с помощью авиации // Пожарная безопасность. 2016. № 4. С. 48–50.
13. *Арцыбашев Е.С.* Об эффективности огнетушащих химических веществ // Лесное хозяйство. 1981. № 6. С. 47–48.

Статья поступила 17.10.2018 г.

Kopylov N.P., Karpov V.N., Kuznetsov A.E., Fedotkin D.V., Khasanov I.R., Sushkina E.Yu. PECULIARITIES OF THE FOREST FIREFIGHTING WITH THE USE OF AIRCRAFTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 79–86

DOI 10.17223/19988621/59/8

Keywords: forest fire, aerial firefighting, irrigation density, dispersion of the fire extinguishing agent, calculation of the optimum altitude of discharge and irrigation maps, water additives.

The use of aircrafts improves the efficiency of forest fires suppression. Currently, the most widely used aircrafts are GL-215 Canadair, BE-200, and Il-76. The corresponding maps and irrigation density of the extinguishing agents have been experimentally obtained for them.

The density and size of irrigation maps is significantly affected by the aircraft flight altitude. The height of the extinguishing agent discharge is determined by the safety of the flight over the fire zone, which in turn introduces significant aerodynamic disturbances into the atmosphere.

The irrigation density is influenced by dispersion and viscosity of the extinguishing agent as well as the meteorological conditions, primarily the direction and speed of wind.

In this regard, it is important to obtain the formulas for calculating optimum flight altitude, extension of zones, and irrigation density. These formulas include the parameters that take into account the characteristics of both aircraft (the speed) and drain devices (the sizes and fire flow). Investigation of the efficiency of the use of aircrafts in forest firefighting is time-consuming and expensive. It is proposed to test the water additives using a special experimental setup simulating both the dispersion of the fire extinguishing agent discharged from the aircraft and the crown and ground forest fires. The fires are simulated by specific heat release, and the dispersion, by specially selected sprinklers.

Fire experiments have shown a significant impact of the viscosity of fire extinguishing agents on the forest fire suppression. It is required to optimize viscosity by means of water additives.

KOPYLOV Nikolay Petrovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, FGBU VNIIPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russian Federation). E-mail: np.nanpb@mail.ru

KARPOV Vyacheslav Nikolaevich (Orenburg Branch FGBU VNIIPO EMERCOM of Russia, Orenburg, Russian Federation). E-mail: v75karpov@mail.ru

KUZNETSOV Aleksandr Evgen'evich (Candidate of Technical Sciences, FGBU VNIIPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russian Federation). E-mail: ae.kuznetsov@yandex.ru

FEDOTKIN Dmitriy Vyacheslavovich (Candidate of Technical Sciences, FGBU VNIIPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russian Federation). E-mail: fdv982@mail.ru

KHASANOV Irek Ravil'evich (Doctor of Technical Sciences, FGBU VNIIPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russian Federation). E-mail: irhas@rambler.ru

SUSHKINA Elena Yur'evna (Candidate of Technical Sciences, FGBU VNIIPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russian Federation). E-mail: sushkina@bk.ru

REFERENCES

1. Problemy sovershenstvovaniya pozharotusheniya v lesakh i na predpriyatiyakh lesnoy promyshlennosti [Problems of the fire suppression improvement in the forests and at the forestry enterprises] (1989) *Proceedings of the workshop. Bratsk*. Moscow: GUPO MVD SSSR.
2. Kopylov N.P., Khasanov I.R., Kuznetsov A.E., Fedotkin D.V., Moskvilin E.A., Strizhak P.A., Karpov V.N. (2015) Parametry sbrosa vody aviatsionnymi sredstvami pri tushenii lesnykh pozharov [Parameters of water dumping by airplanes at forest fire suppression]. *Pozharnaya bezopasnost' – Fire Safety*. 2. pp.49–55.
3. *Tekhnicheskaya spravka po rezul'tatam obrabotki metodiki tusheniya lesnykh pozharov s ispol'zovaniem samoleta IL-76* [Technical information on the results of the applied methods of

forest fire suppression using IL-76 aircraft] (1993) Moscow: PO «Avialesookhrana», NPP «INTEL».
4. Asovskiy V.P. (2010) *Metody i sredstva sovershenstvovaniya sistemy i tekhnologiy aviatsionnykh rabot po raspredeleniyu veshchestv* [Methods and means for improvement of the system and technologies of aviation work on the distribution of substances]. Dissertation. Krasnodar: VNIIPANKh.
5. Kopylov N.P., Khasanov I.R., Gostintsev Yu.A. (1997) Vliyanie atmosfernykh vozmushcheniy nad pozharami na polety aviatsionnoy tekhniki [Effect of the atmospheric disturbances over the fires on the aircraft flights]. *Pozharnaya bezopasnost' – istoriya, sostoyanie, perspektivy: materialy XIV Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferntsi – Fire Safety – History, Current State, and Prospects: Proceedings of XIV all-Russian Research and Practical Conference* . 2. pp. 101–103.
6. Zhuravlev Yu.F., Mikhal'kova E.P., Varyukhin A.N. (2014) Gidrodinamicheskie aspekty bor'by s lesnymi pozharami s pomoshch'yu aviatankerov s vertikal'nym sbrosom vody [Hydrodinamic aspects of forest fire-fighting using airtankers with vertical liquid discharge]. *Pozharnaya bezopasnost' – Fire Safety*. 3. pp. 132–140.
7. *Izmerenie raspredeleniya po razmeram vodyanykh kapel', obrazovannykh v rezul'tate sbrosa vody s samoleta IL-76 v usloviyakh naturnogo eksperimenta* [Measurement of the size distribution of water droplets resulting from the water discharge from the IL-76 aircraft in a full-scale experiment] (1993) Research Report. Moscow: NPK Atmosfernye tekhnologii.
8. Davydenko E.P. (1999) Strategiya i taktika primeneniya aviatankerov dlya bor'by s lesnymi pozharami s vozdukha [Strategy and tactics of the use of airtankers in the forest firefighting from the air]. *Pozhary v lesu i na ob"ektakh lesokhimicheskogo kompleksa: vozniknovenie, tushenie i ekologicheskie posledstviya – Fires in the forest and at the forest chemical complex: occurrence, extinguishing, and environmental consequences*. Materials of International Conference. Tomsk; Krasnoyarsk: TGU. pp. 58–59.
9. Kopylov N.P., Kuznetsov A.E., Fedotkin D.V., Moskvilin E.A., Strizhak P.A., Karpov V.N., Vagenleytner E.V. (2015) Tushenie diffuzionnogo fakela plameni raspylennoy vodoy (kratkiy obzor) [Suppression of the diffusive flame torch by the sprayed water (short review)] *Pozharnaya bezopasnost' – Fire Safety*. 3. pp. 109–113.
10. Siyanov A.A., Tivina E.N., Chernykh I.V. (1997) Analiz ognetushashchikh svoystv vody v zavisimosti ot razmerov kapel' [Analysis of the fire extinguishing properties of water depending on the droplet size]. *Matematicheskoe i fizicheskoe modelirovanie lesnykh pozharov i ikh ekologicheskikh posledstviy: materialy mezhdunarodnoy konferentsii – Mathematical and physical modeling of the forest fires and their environmental consequences: proceedings of the international conference*. Tomsk; Irkutsk: TGU. pp. 149–150.
11. Kopylov N.P., Khasanov I.R., Fedotkin D.V., Strizhak P.A., Karpov V.N., Zvereva-Stepnaya A.V., Moskvilin E.A. (2015) Stend dlya ispytaniya ognetushashchikh veshchestv, primenyaemykh pri tushenii lesnykh pozharov aviatsionnymi sredstvami [Test bench for fire extinguishing agents applied at forest fire suppression by aviation]. *Pozharnaya bezopasnost' – Fire Safety*. 4. pp. 51–57.
12. Kopylov N.P., Khasanov I.R., Kuznetsov A.E., Fedotkin D.V., Moskvilin E.A., Strizhak P.A., Karpov V.N. (2016) Optimizatsiya vybora dobavok k vode pri tushenii lesnykh pozharov s pomoshch'yu aviatsii [Optimization of the choice of additives to water at forest fires suppression by means of aircraft]. *Pozharnaya bezopasnost' – Fire Safety*. 4. pp. 48–50.
13. Artsybashev E.S. (1981) Ob effektivnosti ognetushashchikh khimicheskikh veshchestv [On the effectiveness of fire extinguishing chemicals]. *Lesnoe khozyaystvo*. 6. pp. 47–48.

Received: October 17, 2018

УДК 536.24
DOI 10.17223/19988621/59/9

П.Д. Лобанов, М.А. Пахомов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА В ПУЗЫРЬКОВОМ ТЕЧЕНИИ ЗА ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КАНАЛА[1]

Представлены результаты экспериментального и численного моделирования структуры течения и теплообмена пузырькового восходящего течения за внезапным расширением трубы. Математическая модель использует эйлерово описание с учетом обратного влияния пузырьков на процессы переноса в жидкой фазе. Турбулентность жидкости моделируется с использование модели переноса рейнольдсовых напряжений. Осредненная и пульсационная структура течения двухфазного потока при $\beta \leq 10$ % остается качественно подобной таковой для однофазного течения жидкости Показано, что добавление воздушных пузырьков вызывает значительное возрастание интенсивности теплообмена (до трех раз) в области релаксации течения при небольших числах Рейнольдса потока, причем эти эффекты возрастают с ростом концентрации пузырьков.

Ключевые слова: *пузырьковый поток*, *внезапное расширение*, *труба*, *измерения*, *расчет*, *турбулентность*, *теплообмен.*

Пузырьковые потоки широко распространены в химической технологии, в энергетике и других практических приложениях. Такие течения осложнены межфазным взаимодействием между несущей жидкостью и газовыми пузырьками, отрывом потока, полидисперсностью, дроблением и коалесценцией пузырьков и межфазным теплообменом. Рециркуляционное течение, образующееся при отрыве потока на острой кромке, во многом определяет структуру турбулентного потока и оказывает значительное влияние на интенсивность процессов переноса импульса, массы и теплоты.

Несмотря на наличие некоторого числа работ [1–6] по исследованию пузырьковых течений после внезапного расширения трубы или канала многие важные вопросы гидродинамики и теплофизики отрывных двухфазных течений остаются открытыми. Это касается, прежде всего, влияния дисперсной фазы на структуру течения, интенсивность теплообмена и другие факторы. Авторам не известно работ, кроме [5, 6], в которых был исследован теплообмен в отрывных пузырьковых течениях.

Целью настоящей работы является проведение экспериментального и численного исследования влияния концентрации газовой фазы на теплоперенос в восходящем пузырьковом потоке за внезапным расширением трубы. Полученная база экспериментальных данных позволила более точно провести верификацию разработанного авторами численного кода. В расчетной части данная работа представляет собой развитие подхода [5] для описания гидродинамики и теплообмена пу-

[1] Экспериментальная часть работы выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 18-58-45006_Инд), а расчетная – в рамках бюджетного финансирования ФАНО России (номер гос. рег. № 01201350445).

зырькового течения. Основное отличие данной работы от [6] заключается в том, что выполнено экспериментальное и численное исследование не только теплообмена, но и гидродинамики.

Экспериментальное исследование и математическая модель

В работе была использована рабочая установка для исследования течений двухфазных пузырьковых газожидкостных потоков в трубах с внезапным расширением (рис. 1). Экспериментальный стенд был подключен к замкнутому по жидкой фазе и разомкнутому по газовой фазе контуру, включающему бак для рабочей жидкости (*1*), напорную линию с вентилем (*3*, *4*) и систему поддержания температуры в рабочем участке. Для контроля расхода рабочей жидкости применяется ультразвуковой расходомер (*5*), для контроля расхода воздуха – расходомеры производства фирмы Brounckorst. Рабочий участок установки представляет собой трубу малого диаметра (*8*), вставленную через переходник в трубу большего диаметра (*12*). Торец малой трубы был зашлифован вровень с плоскостью переходника в отрывной зоне потока (*9*). Внутренний диаметр канала после расширения $R_2 = 42$ мм. Степень расширения $(R_2/R_1)^2 = 9$. Погрешность измерения расходов жидкости и газа составляла ±2 % от измеряемой величины. Генерация пузырей производилась путем подачи воздуха в поток жидкости через 12 капилляров длиной 50 мм с внутренним диаметром 0.7 мм, равномерно распределенных в сечении канала. Экспериментальное исследование выполнено при вариации объемного расходного газосодержания $\beta = V_b/(V_b+V) = 0\text{–}10$ %, где V_b и V – объемный расход газа и жидкости соответственно. Размеры пузырей определялись с помощью видеосъемки с теневой подсветкой и анализа изображений. Средний диаметр пузырьков составлял $d = 1.7\text{–}2$ мм, среднее квадратичное отклонение диаметров пузырей для разных расходных характеристик находилось в пределах 0.3–0.4 мм, неопределенность определения диаметров пузырей около 5 %.

Для проведения экспериментальных исследований теплообмена от нагреваемой стенки к пузырьковому потоку использовался рабочий участок (*2*), изготовленный из тонкостенной нержавеющий стали. Внутренний диаметр рабочего участка был 42 мм, толщина стенки – 0.2 мм, длина области обогрева 500 мм. Нагрев участка производился с помощью электрического тока. Подвод тока осуществлялся с помощью лабораторного источника питания (ЛАТР), мощностью до 2 кВт, с помощью которого осуществлялось управление подаваемой мощностью. За измерительным участком находился участок трубы диаметром 42 мм и длиной 1 м. В качестве основного измерительного метода использовалась инфракрасная термография. Для проведения термографических измерений внешняя поверхность рабочего участка была покрашена в черный цвет при помощи матовой краски для увеличения коэффициента излучения. Для измерений использовался тепловизор Fluke Ti32 (*3*). Для сравнения, на поверхность рабочего участка с противоположной стороны были установлены 3 терморезистора Pt1000 на расстояниях $x/H = 5$, 17 и 30.

Для описания газожидкостных турбулентных потоков используется эйлерово двухжидкостное описание. В данной работе используется подход, получивший свое развитие на случай учета межфазного теплообмена [5–7]. В математической модели используется система осредненных RANS уравнений в осесимметричном приближении, записанная с учетом обратного влияния пузырьков на осредненные и пульсационные характеристики течения. Одним из способов, дающим возможность частичного учета анизотропии, является использование модели переноса

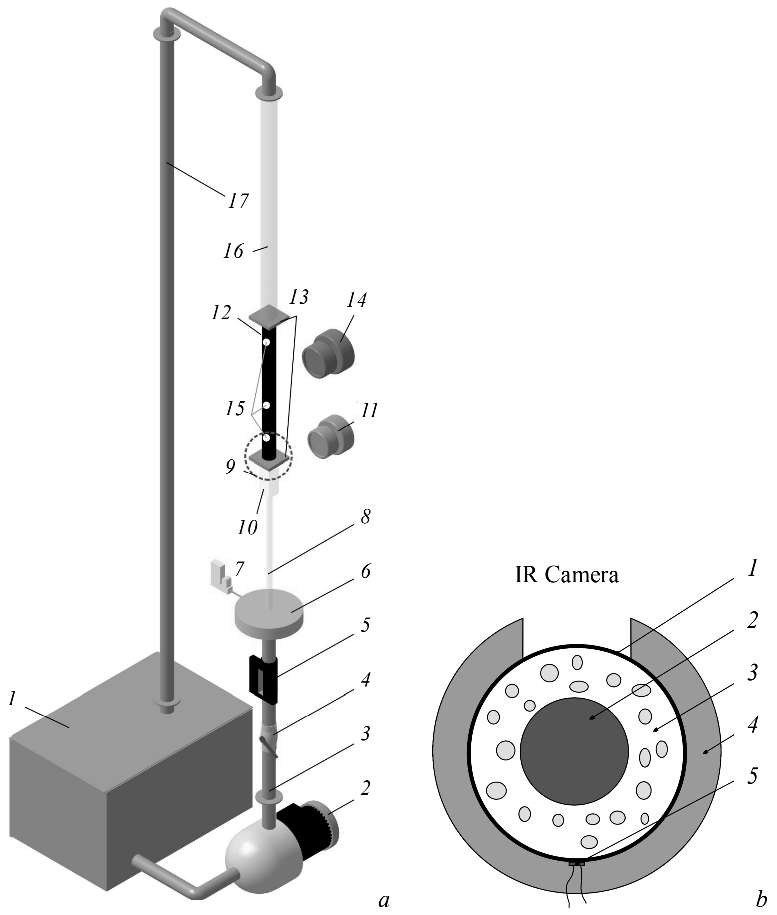


Рис. 1. Схемы экспериментальной установки (*a*) и рабочего участка для исследования теплообмена (*b*); *a*: *1* – основной бак; *2* – насос; *3* – напорная линия; *4* – вентиль, *5* – ультразвуковой расходомер; *6* – газожидкостный смеситель; *7* – контроллер расхода газовой фазы, *8* – труба малого диаметра; *9* – область расширения; *10* – бак, наполненный водой; *11* – видеокамера; *12* – измерительный участок; *13* – подвод электрического тока к тепловому участку; *14* – ИК камера; *15* – терморезисторы; *16* – труба большого диаметра. Поперечное сечение теплообменного участка (*b*): *1* – труба из нержавеющей стали; *2* – труба малого диаметра (до расширения); *3* – двухфазный пузырьковый поток после расширения; *4* – теплоизоляция; *5* – терморезисторы

Fig. 1. Design of the (*a*) experimental setup and (*b*) heat transfer measurement unit. (*a*): *1*, main tank; *2*, pump; *3*, supply line; *4*, control valve; *5*, ultrasound flow meter; *6*, gas-liquid mixer; *7*, gas flow controller; *8*, the pipe of small diameter (upstream of the expansion); *9*, expansion section; *10*, tank with water; *11*, video camera; *12*, test section; *13*, power supply of the heated section; *14*, infrared (IR) camera; *15*, resistance temperature detectors (RTDs); *16*, the pipe of large diameter (downstream of the expansion); and *17*, downcomer. Cross section of the heat transfer measurement unit (*b*): *1*, thin wall made of stainless steel; *2*, inner pipe upstream of the expansion; *3*, two-phase bubbly flow downstream of the expansion; *4*, thermal insulation; and *5*, RTDs

компонент тензора рейнольдсовых напряжений (Second Moment Closure – SMC). Эта модель является более сложной в вычислительном плане, чем известные и широко применяемые в численных расчетах k–ε-модели, но она обеспечивает более точный расчет турбулентных характеристик. Турбулентность несущей фазы рассчитывается с применением модели переноса рейнольдсовых напряжений [8] с учетом двухфазности течения.

Результаты измерений и расчетов и их сопоставительный анализ

Измеренные и рассчитанные радиальные распределения для средних осевых скоростей жидкости и пузырьков газа показаны на рис. 2 для двух расстояний вниз по потоку от сечения внезапного расширения трубы. Открытыми символами представлены экспериментальные данные для однофазного потока жидкости, а сплошными символами – характеристики жидкой фазы в двухфазном потоке. Сплошными линиями показаны расчетные данные для жидкой фазы, а пунктирными кривыми – результаты расчетов для монодисперсных пузырьков воздуха. Скорость жидкости для пузырьковых потоков (*2*, *4*) выше, чем скорость течения однофазной жидкости (*1*, *3*). Рассчитанные скорости воздушных пузырьков (*5*) выше, чем значения скоростей жидкости в присутствии пузырьков воздуха из-за восходящего направления двухфазного потока. Осевые скорости жидкости имеют отрицательные значения вблизи отрывной области ($x/H = 4$ и 8). Профиль скорости жидкости в двухфазном потоке характеризуется наличием области с отрицательными значениями средней осевой скорости в пристеночной области трубы.

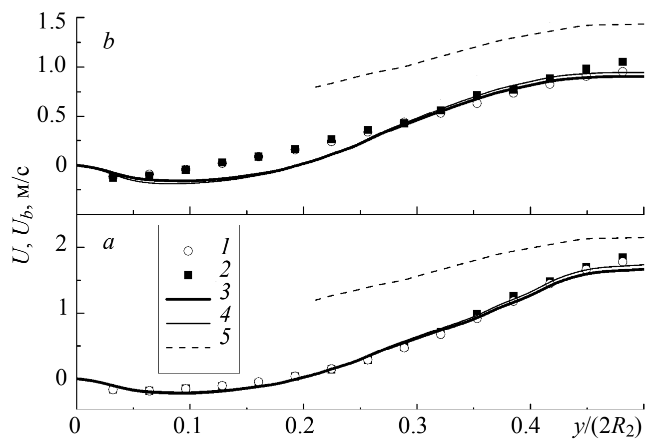


Рис. 2. Распределения осредненной аксиальной скорости фаз по сечению трубы на расстоянии $x/H = 4$ (*a*) и 8 (*b*). $\mathrm{Re}_H = 2.09 \cdot 10^4$, $d = 1.7$ мм, $\beta = 3.5$ %. Точки и линии – измерения и расчет авторов. *1*, *3* – $\beta = 0$ (однофазный поток жидкости), *2*, *4* – жидкость в двухфазном течении при $\beta = 3.5$ %, *5* – воздушные пузырьки при $\beta = 3.5$ %.

Fig. 2. Distributions of the axial velocity of the fluid and gas bubbles averaged along the pipe cross-section at a distance of $x/H =$ (*a*) 4 and (*b*) 8. $\mathrm{Re}_H = 2.09 \cdot 10^4$, $d = 1.7$ mm, and $\beta = 3.5\%$. The dotted and solid lines indicate the authors' measurements and calculations, respectively. *1*, *3* – $\beta = 0$ (a single-phase fluid flow); *2*, *4* – a two-phase fluid flow at $\beta = 3.5\%$; and *5* – gas bubbles at $\beta = 3.5\%$.

На рис. 3 показаны распределения локального теплопереноса в пузырьковом потоке за внезапным расширением трубы при вариации числа Рейнольдса потока $\mathrm{Re}_H = U_{m1}H/\nu = 1.02\cdot10^4$, $2.09\cdot10^4$ и $3.15\cdot10^4$. Здесь H – высота уступа, U_{m1} – осредненная скорость жидкости на входе и ν – кинематическая вязкость. Точки и линии – данные измерений и результаты численного моделирования настоящей работы, пунктир – расчет для однофазного течения ($\beta = 0$) при прочих идентичных условиях. Отметим, что имеется удовлетворительное согласие между данными экспериментальных измерений и численных расчетов как для области отрыва потока (различие не превышает 10–15 %), так и в зоне его восстановления. Максимум теплоотдачи в экспериментах и расчетах приходится на расстояние $x/H = 7$–10 для исследованного диапазона чисел Рейнольдса и концентраций воздушных пузырьков. Отметим, что положение точки максимума теплоотдачи примерно совпадает с точкой присоединения потока [9]. Для измеренных и рассчитанных распределений числа Нуссельта по длине трубы характерным является возрастание интенсивности теплообмена примерно до точки присоединения потока, далее происходит его резкое снижение в области релаксации течения. В целом, распределения числа Нуссельта по длине трубы имеют качественно подобный вид, как для случаев однофазного воздушного [9].

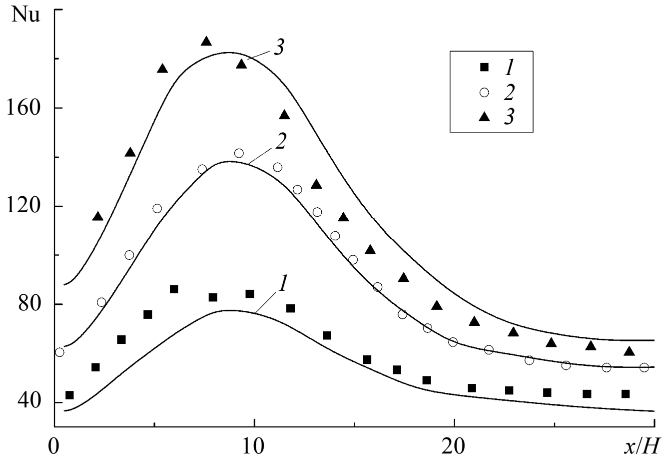


Рис. 3. Влияние числа Рейнольдса потока на изменение числа Нуссельта в пузырьковом потоке за внезапным расширением трубы. Точки и линии – измерения и расчет авторов соответственно. $\beta = 3.5$ %, $d_1 = 1.7$ мм. *1* – $\mathrm{Re}_H\cdot10^4 = 1.02$, *2* – 2.09, *3* – 3.15.
Fig. 3. Impact of the Reynolds number on the variation in the Nusselt number in a bubbly flow downstream of the sudden pipe expansion. The dotted and solid lines indicate the authors' measurements and calculations, respectively. $\beta = 3.5$, $d = 1.7$ mm. $\mathrm{Re}_H\cdot10^{-4}$ = (*1*) 1.02, (*2*) 2.09, and (*3*) 3.15.

Заключение

Представлены результаты экспериментального исследования и численного моделирования структуры течения и теплообмена пузырькового восходящего течения за внезапным расширением трубы. Для измерения гидродинамики пузырькового течения был использован метод PIV/PLIF, измерения теплообмена выпол-

нены с применением метода инфракрасной термографии. В математической модели используется система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса в осесимметричном приближении, записанная с учетом обратного влияния пузырьков на осредненные и пульсационные характеристики течения. Турбулентность несущей фазы рассчитывается с применением модели переноса рейнольдсовых напряжений. Исследование выполнено при изменении числа Рейнольдса потока в диапазоне $\mathrm{Re}_H = (1.02–3.15)\cdot 10^4$ и объемного расходного газосодержания $\beta = 0–10$ %. Показано, что добавление воздушных пузырьков вызывает значительное возрастание интенсивности теплообмена (до 3 раз), причем эти эффекты возрастают с ростом концентрации пузырьков. Распределения числа Нуссельта по длине трубы имеют качественно подобный вид, как для случаев однофазного потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rinne A., Loth R.* Development of local two-phase flow parameters for vertical bubbly flow in a pipe with sudden expansion // Exp. Therm. Fluid Sci. 1996. V. 13. Iss. 1. P. 152–166. DOI: 10.1016/0894-1777(96)00039-8.
2. *Aloui F., Doubliez L., Legarand J., Souhar M.* Bubbly flow in an axisymmetric sudden expansion: pressure drop, void fraction, wall shear stress, bubble velocities and sizes // Exp. Therm. Fluid Sci. 1999. V. 19. Iss. 1. P. 118–130. DOI: 10.1016/S0894-1777(98)10017-1.
3. *Voutsinas A., Shakouchi T., Tsujimoto K., Ando T.* Investigation of bubble size effect on vertical upward bubbly two-phase pipe flow consisted with an abrupt expansion // J. Fluid Sci. Techn. 2009. V. 4. Iss. 2. P. 442–453. https://doi.org/10.1299/jfst.4.442.
4. *Krepper E., Beyer M., Frank T., Lucas D., Prasser H.-M.* CFD modelling of polydispersed bubbly two-phase flow around an obstacle // Nucl. Eng. Des. 2009. V. 239. Iss. 11. P. 2372–2381. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2009.06.015.
5. *Pakhomov M.A., Terekhov V.I.* Modeling of the flow patterns and heat transfer in a turbulent bubbly polydispersed flow downstream of a sudden pipe expansion // Int. J. Heat Mass Transfer. 2016. V. 101. P. 1251–1262. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.054.
6. *Lobanov P.D., Pakhomov M.A.* Experimental and numerical study of heat transfer enhancement in a turbulent bubbly flow in a pipe sudden expansion // J. Eng. Thermophys. 2017. V. 26. Iss. 3. P. 377–390. DOI: 10.1134/S1810232817030080.
7. *Зайчик Л.И., Скибин А.П., Соловьев С.Л.* Моделирование распределения пузырьков в турбулентной жидкости на основе диффузионно-инерционной модели // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42. № 1. С. 111–117; *Zaichik L.I., Skibin A.P., Solov'ev S.L.* Simulation of the distribution of bubbles in a turbulent liquid using a diffusion-inertia model // High Temp. 2004. V. 42. Iss. 1. P. 111–118. DOI: 10.1023/B:HITE.0000020098.97475.9c.
8. *Fadai-Ghotbi A., Manceau R., Boree J.* Revisiting URANS computations of the backward-facing step flow using second moment closures. Influence of the numerics // Flow, Turbulence and Combust. 2008. V. 81. Iss. 3. P. 395–410. DOI: 10.1007/s10494-008-9140-8.
9. *Eaton J.K., Johnston J.P.* Review of research on subsonic turbulent flow reattachment // AIAA J. 1981. V. 19. Iss. 9. P. 1093–1100. DOI: 10.2514/3.60048.

Статья поступила 27.11.2018

Lobanov P.D., Pakhomov M.A. EXPERIMENTAL AND NUMERICAL STUDY OF THE HYDRODYNAMICS AND HEAT TRANSFER IN A BUBBLY FLOW DOWNSTREAM OF THE AXISYMMETRIC SUDDEN EXPANSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 87–93

DOI 10.17223/19988621/59/9

Keywords: bubbly flow, sudden expansion, pipe, measurement, modeling, turbulence, heat transfer.

The results of experimental and numerical simulations of the flow and heat transfer in the polydispersed bubbly flows in a pipe with sudden expansion are presented. Mathematical model is based on the use of the Eulerian approach considering the effect of the bubbles on the mean characteristics and turbulence of the carrier phase. The turbulence of the carrier fluid phase is predicted using the model of Reynolds stress transport. The structure of the mean and fluctuating two-phase bubbly flow at small volumetric gas flow rate ratio, $\beta \leq 10\%$, is qualitatively similar to that of a single-phase fluid flow. The small bubbles are observed in almost the entire pipe section, whereas the large ones mostly move through the flow core and shear mixing layer. Addition of the air bubbles results in a significant increase in the heat transfer rate (up to 300%) in the flow relaxation region for the moderate Reynolds numbers. This effect enhances with an increase in the gas volumetric flow rate ratio. The largest heat transfer enhancement is observed in the flow relaxation zone downstream of the reattachment point.

LOBANOV Pavel Dmitrievich (Candidate of Technical Sciences, Laboratory of Problems of Heat and Mass Transfer, Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: lobanov@itp.nsc.ru

PAKHOMOV Maksim Aleksandrovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Laboratory of Thermal and Gas Dynamics, Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: pakhomov@ngs.ru

REFERENCES

1. Rinne A., Loth R. (1996) Development of local two-phase flow parameters for vertical bubbly flow in a pipe with sudden expansion. *Experimental Thermal and Fluid Science.* 13(1). pp. 152–166. DOI: 10.1016/0894-1777(96)00039-8.
2. Aloui F., Doubliez L., Legarand J., Souhar M. (1999) Bubbly flow in an axisymmetric sudden expansion: pressure drop, void fraction, wall shear stress, bubble velocities and sizes. *Experimental Thermal and Fluid Science.* 19(1). pp. 118–130. DOI: 10.1016/S0894-1777(98)10017-1.
3. Voutsinas A., Shakouchi T., Tsujimoto K., Ando T. (2009) Investigation of bubble size effect on vertical upward bubbly two-phase pipe flow consisted with an abrupt expansion. *Journal of Fluid Science and Technology.* 4(2). pp. 442–453. DOI: 10.1299/jfst.4.442.
4. Krepper E., Beyer M., Frank T., Lucas D., Prasser H.-M. (2009) CFD modelling of polydispersed bubbly two-phase flow around an obstacle. *Nuclear Engineering and Design.* 239(11). pp. 2372–2381. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2009.06.015.
5. Pakhomov M.A., Terekhov V.I. (2016) Modeling of the flow patterns and heat transfer in a turbulent bubbly polydispersed flow downstream of a sudden pipe expansion. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 101. pp. 1251–1262. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer. 2016.05.054.
6. Lobanov P.D., Pakhomov M.A. (2017) Experimental and numerical study of heat transfer enhancement in a turbulent bubbly flow in a pipe sudden expansion. *Journal of Engineering Thermophysics.* 26(3). pp. 377–390. DOI: 10.1134/S1810232817030080.
7. Zaichik L.I., Skibin A.P., Solov'ev S.L. (2004) Simulation of the distribution of bubbles in a turbulent liquid using a diffusion-inertia model. *High Temperature.* 42(1). pp. 111–118. DOI: 10.1023/B:HITE.0000020098.97475.9c.
8. Fadai-Ghotbi A., Manceau R., Boree J. (2008) Revisiting URANS computations of the backward-facing step flow using second moment closures. Influence of the numerics. *Flow, Turbulence and Combustion.* 81(3) pp. 395–410. DOI: 10.1007/s10494-008-9140-8.
9. Eaton J.K., Johnston J.P. (1981) Review of research on subsonic turbulent flow reattachment. *AIAA Journal.* 19(9). pp. 1093–1100. DOI: 10.2514/3.60048.

Received: November 27, 2018

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Математика и механика № 59

УДК 536.46+536.24
DOI 10.17223/19988621/59/10

В.А. Порязов, А.Ю. Крайнов

РАСЧЕТ РЕЖИМОВ ЗАЖИГАНИЯ И ВЫХОДА НА СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ГОРЕНИЯ МЕТАЛЛИЗИРОВАННОГО ТВЕРДОГО РАКЕТНОГО ТОПЛИВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ[1]

Представлена физико-математическая модель и результаты расчета зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива под действием внешнего теплового потока. На поверхности топлива ставятся граничные условия сохранения потоков энергии и массы компонентов, под поверхностью твердого топлива записываются уравнения переноса тепла и разложения конденсированной фазы, над поверхностью твердого топлива записывается двухскоростная, двухтемпературная модель реагирующего течения продуктов его разложения и газификации над поверхностью твердого топлива. Исследовано влияние мощности и времени воздействия теплового потока, массовой доли, дисперсности частиц металла в составе твердого топлива на характеристики зажигания.

Ключевые слова: *металлизированное твердое топливо*, *математическая модель*, *зажигание*, *переходные процессы.*

Изучению физико-химических процессов, протекающих при зажигании и горении высокоэнергетических материалов, посвящено много теоретических и экспериментальных работ [1–7]. Это объясняется высокой практической значимостью результатов подобных исследований. Одной из основных задач до настоящего времени остается определение условий гарантированного зажигания, т.е. устойчивости переходного процесса, когда стадия зажигания сменяется стационарным самоподдерживающимся горением вещества без подвода дополнительной энергии от внешнего источника. Реализация таких режимов возможна при различных способах зажигания. Широко распространены конвективные [2] (высокотемпературные газы), радиационные [3–6] (импульс излучения) и кондуктивные [7] (разогретые пластины, частицы) способы передачи энергии поверхностному слою твердого топлива. Большой вклад в развитие теории зажигания конденсированных веществ внесли работы профессора ТГУ В.Н. Вилюнова [1, 4] и лаборатории горения конденсированных веществ Института химической кинетики и горения СО РАН под руководством В.Е. Зарко [2, 3]. Подходы, заложенные В.Н. Вилюновым в области решения задач зажигания конденсированных веществ, получили развитие в работах Р.С. Буркиной [5] и А.Г. Князевой [6]. Большая работа по изучению зажигания конденсированных веществ локальными источниками ограниченной энергоемкости проводится сотрудниками Томского политехнического университета [7]. Все современные смесевые твердые топлива в своем составе содержат добавки порошков металлов, которые добавляются для повышения теплоты сгорания топлива. Актуальным является вопрос о влиянии добавок порошков

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-38-00533 мол_а.

металла в состав твердого топлива на характеристики зажигания и горения. Анализ современного состояния исследований в области зажигания конденсированных высокоэнергетических веществ показывает, что это направление является актуальной научной задачей, требующей дальнейшего развития. В частности, большинство моделей зажигания конденсированных высокоэнергетических веществ не учитывает вклад двухфазных продуктов разложения металлизированного твердого топлива с учетом химического реагирования и межфазного взаимодействия (обмен энергией, массой и импульсом между фазами – газом и частицами) над поверхностью твердого топлива на характеристики зажигания и горения.

Постановка задачи

Рассматриваются одномерные нестационарные процессы при зажигании и горении металлизированного твердого топлива. Предполагается, что в твердом топливе при нагреве идут химические реакции, полупродуктами которых является газ. Газообразные продукты разложения высвобождаются на последней стадии реакции по достижении глубины превращения 0.99. Предполагается первый порядок реакции и зависимость ее скорости от температуры по закону Аррениуса. Теплофизические характеристики твердой фазы (плотность, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности) не зависят от температуры и определяются компонентным составом твердого топлива путем осреднения аналогично [8]. Предполагается, что газовой фазе протекает экзотермическая химическая реакция первого порядка по закону Аррениуса, конвекция и диффузия реагентов. Величина давления над поверхностью горящего твердого топлива не зависит от координаты. Учитывается расширение газа при его нагреве, параметры состояния газа подчиняются уравнению состояния идеального газа. Предполагается, что частицы алюминия в составе твердого топлива представляют собой шарики, равномерно распределенные в объеме топлива, их размер равен размеру частиц алюминия, вылетающих в газовую фазу с поверхности горения. Процессы агломерации порошка алюминия на поверхности горения не рассматриваются. Воспламенение частиц алюминия происходит при достижении частицей заданной температуры, горение частиц алюминия описывается согласно экспериментальным данным. Теплообмен между частицами и газом происходит по закону Ньютона, движение частиц определяется действием сил трения со стороны газа. Из-за малой объемной концентрации частиц в газе влиянием движения частиц на движение газа пренебрегается, не учитывается взаимодействие частиц друг с другом в газовой фазе. Модель строится на основе модели нестационарного горения металлизированного твердого топлива, представленной в работе [9].

Математическая модель зажигания и горения металлизированного твердого топлива в системе координат, связанной с поверхностью твердого вещества, запишется следующим образом:

Для твердого топлива, при $-\infty < x < x_s$:

$$c_1\rho_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}+u\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)=\lambda_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+Q_1k_1\rho_1(1-\eta)\exp\left(-\frac{E_1}{RT_1}\right); \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+u\frac{\partial \eta}{\partial x}=k_1(1-\eta)\exp\left(-\frac{E_1}{RT_1}\right). \qquad (2)$$

Для газовой фазы, при $x_s < x < \infty$:

$$c_2\rho_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial t}+V\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2(T_2)\frac{\partial\ T_2}{\partial x}\right)+Q_2k_2\rho_2Y\exp\left(-\frac{E_2}{RT_2}\right)+4\pi\alpha r_3^2n(T_3-T_2)\ ; \quad (3)$$

$$c_3\rho_3\left(\frac{\partial T_3}{\partial t}+w\frac{\partial T_3}{\partial x}\right)=-4\pi\alpha r_k^2n\left(T_3-T_2\right)+\frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O}GQ_{Al}\ ; \quad (4)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t}+v\frac{\partial Y}{\partial x}=D\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}-k_2Y\exp\left(-\frac{E_2}{RT_2}\right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v}{\partial x}=-G\ ; \quad (6)$$

$$\frac{\partial\rho_3}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_3 w)}{\partial x}=G\,; \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial x}=-\tau_{\mathrm{fr}}\ ; \quad (8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial(nw)}{\partial x}=0\ ; \quad (9)$$

$$p=\frac{R}{\mu}\rho_2T\ . \quad (10)$$

Граничные условия:

$$\lambda_1\frac{\partial T_1\left(x_s,t\right)}{\partial x}=\lambda_2\frac{\partial T_2\left(x_s,t\right)}{\partial x}+q(t)\,,\ T_1\left(x_s,t\right)=T_2\left(x_s,t\right),$$

$$T_3\left(x_s,t\right)=T_1\left(x_s,t\right),\ n(x_s,t)=\frac{\rho_3(x_s,t)}{{}^4\!/_3\,\pi r_{\mathrm{Al},0}^3\rho_k}\,,\ \alpha_{\mathrm{Al}}\rho_1u=\rho_3w(x_s,t)\,, \quad (11)$$

$$(1-\alpha_{\mathrm{Al}})\rho_1u=\rho_2\left(x_s,t\right)v\left(x_s,t\right),\ \rho_2(x_s,t)=p\mu/RT_2(x_s,t)\,,$$

$$(1-\alpha_{\mathrm{Al}})\rho_1u=(\rho_2vY)\big|_{(x_s,t)}-D\rho_2\left(x_s,t\right)\frac{\partial Y\left(x_s,t\right)}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial T_1\left(-\infty,t\right)}{\partial x}=0\,,\ \frac{\partial T_2\left(\infty,t\right)}{\partial x}=0\,,\ \frac{\partial Y\left(\infty,t\right)}{\partial x}=0\,.$$

Начальные условия:

Для $-\infty < x < x_s$:

$$T_1\left(x,0\right)=T_0\,,\ \eta\left(x,0\right)=0\,.$$

Для $x_s < x < \infty$:

$$T_2\left(x,0\right)=T_0\,,\ T_3\left(x,0\right)=T_0\,,\ Y\left(x,0\right)=0\,,$$

$$V\left(x,0\right)=0\,,\ W\left(x,0\right)=0\,,\ n\left(x,0\right)=0\,, \quad (12)$$

$$p\left(0\right)=p_0\,,\ \rho_2\left(x,0\right)=p_n\mu/RT_{ig}\ ,\ \rho_3\left(x,0\right)=0\,.$$

В системе (1) – (10): (1) – уравнение переноса тепла в твердом топливе; (2) – уравнение глубины разложения твердого топлива; (3), (4) – уравнения энергии для газовой фазы и частиц алюминия; (5) – уравнение выгорания окислителя в газовой фазе; (6) – уравнение сохранения массы газовой фазы; (7) – уравнение сохранения массы частиц; (8) – уравнение движения частиц; (9) – уравнение числа частиц в единице объема, (10) – уравнение состояния идеального газа.

Принятые обозначения: t – время; x – координата; x_s – координата положения поверхности горения; ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_{Al}, ρ_k – плотность твердого топлива, газа, приведенная плотность частиц (масса частиц в единице объема), алюминия, вещества частицы; T_1, T_2, T_3 – температура в твердом топливе, газовой фазы, частиц в газовой фазе; T_0 – начальная температура в твердом топливе, в газовой фазе над поверхностью твердого топлива; η – глубина превращения твердого топлива; u – линейная скорость горения твердого топлива; v, w – скорость газа и частиц; n – число частиц в единице объема; r_3, r_{Al} – радиус частицы, радиус не сгоревшего алюминия в частице; c_1, c_2, c_3 – удельная теплоемкость твердого топлива, газа при постоянном давлении, частиц; λ – коэффициент теплопроводности; Q_2 – тепловой эффект реакции в газовой фазе; Q_{Al} – эффективная теплота сгорания алюминия; k – предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса; E – энергия активации химической реакции; R – универсальная газовая постоянная; α_{Al} – массовая доля алюминия в составе топлива смесевого твердого топлива; p – давление; p_0, p_k – начальное и конечное давление при его изменении над поверхностью горения; t_q – момент времени отключения теплового потока к поверхности топлива; Y – концентрация окислителя в газовой фазе; D – коэффициент диффузии; μ, μ_{Al}, μ_O – средняя молярная масса газовой фазы, молекул алюминия и кислорода; G – скорость изменения массы частиц при их горении; τ_{fr} – сила трения при движении частиц в газе; α – коэффициент теплоотдачи. Индексы: 1 – конденсированная фаза (металлизированное твердое топливо), 2 – газовая фаза, 3 – частицы.

Выражения, применяемые для вычисления силы взаимодействия частиц с газом, коэффициентов сопротивления и теплоотдачи, скорости изменения массы частиц алюминия, а также уравнения, определяющие текущие значения размеров частиц и алюминия в частице описаны в работе [9].

Изменение мощности теплового потока моделируется линейным во времени изменением от величины q_0 в заданный момент времени t_q до величины $q = 0$ в заданный момент времени.

Методика решения системы уравнений

Система уравнений (1) – (10), с краевыми (11) и начальными (12) условиями, выражениями для вычисления правых частей (13) – (18) описывает процесс зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива.

В период зажигания предполагается, что скорость движения границы фаз (поверхности горения) $u = 0$ до момента достижения глубины превращения к-фазы на поверхности топлива значения равного $\eta = 0.99$.

До момента достижения глубины превращения к-фазы на поверхности топлива значения $\eta = 0.99$ тепло, приходящее от теплового источника воспламенения на поверхность топлива, распределяется между твердым топливом и газовой фазой. В твердом топливе перенос тепла от поверхности осуществляется только за счет кондуктивного механизма теплопереноса. В газовой фазе перенос тепла от поверхности твердого топлива осуществляется за счет кондуктивного и конвективного механизмов теплопереноса. Конвекция возникает из-за теплового расширения газа, находящегося в изобарических условиях.

После достижения глубины превращения к-фазы на поверхности топлива значения $\eta = 0.99$ начинается движение границы раздела фаз (поверхности топлива). При этом в газовую фазу над поверхностью топлива начинается приход продуктов газификации твердого топлива и частиц алюминия. В газовой фазе постепенно развиваются реакции в газовой фазе, разогрев частиц алюминия до температуры воспламенения и их последующее горение.

Линейная скорость горения, u, которая в системе координат, связанной с поверхностью горения, одновременно является скоростью движения металлизированного твердого топлива, определялась из уравнения (2) при значении температуры на n-м временном слое. За линейную скорость горения принималась скорость движения изолинии глубины превращения твердого топлива $\eta = 0.99$, по достижении которой твердое топливо полностью газифицируется. Величина u определяется итерационным путем, путем подборе значения u, при котором глубина превращения твердого топлива $\eta = 0.99$ достигается на границе раздела твердое топливо – газ.

Далее на $(n+1)$-м временном слое с использованием граничных условий (11) вычисляются: температура твердого топлива и газа из уравнений (1) и (3); выгорание окислителя в газовой фазе из уравнения (4); плотность газа из уравнения (10) при заданном давлении над поверхностью горения; скорость газа из (6); температура частиц из (4); скорость движения частиц из (8); количество частиц в единице объема из (9); распределенная плотность частиц из (7). Счет шага по времени повторяется заданное количество раз. Расчеты проводились до установления стационарного распределения параметров в твердом топливе и в газодисперсной среде над поверхностью горения. Для устойчивости численного решения шаг по времени вычисляется из условия $\Delta t < \Delta x / \max[v_i]$, где Δt, Δx – величины шагов по времени и пространству; v_i — величина скорости в точках разностной сетки.

Расчеты проводились для значений теплофизических и формально-кинетических параметров, характерных для пороха Н [10]:

$$\lambda_1 = 0.25\ \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}),\ \lambda_{2,0} = 0.066\ \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}),\ Q_1 = 556800\ \text{Дж/кг},$$

$$Q_2 = 2435300\ \text{Дж/кг},\ Q_{Al} = 36.51\cdot 10^6\ \text{Дж/кг},\ E_1 = 80000\ \text{Дж/моль},$$

$$E_2 = 186107\ \text{Дж/моль},\ k_1 = 2\cdot 10^9\ \text{с}^{-1},\ k_2 = 3.92\cdot 10^{10}\ \text{с}^{-1},\ k_{\text{Al}} = 2.22\cdot 10^{-5}\ \text{м}^{1.5}/\text{с},$$

$$a = 0.5,\ c_1 = 1465\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}),\ c_2 = 1466\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}),\ c_3 = 760\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}),$$

$$\rho_1 = 1600\ \text{кг}/\text{м}^3,\ \rho_k = 2600\ \text{кг}/\text{м}^3,\ \rho_{Al} = 2600\ \text{кг}/\text{м}^3,\ R = 8.31\ \text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К}),$$

$$T_0 = 293\ \text{К},\ T_{ig} = 1300\ \text{К}.$$

Коэффициент диффузии вычисляется через число Льюиса: $D_2 = Le\lambda_2/(c_2\rho_2)$, число Льюиса принято $Le = 1$. Температура воспламенения частиц алюминия принята равной 1300 К.

Результаты расчетов

На рис. 1 представлено изменение скорости горения пороха Н с добавлением порошка алюминия $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$ и $r_{\text{Al},0} = 3$ мкм во времени.

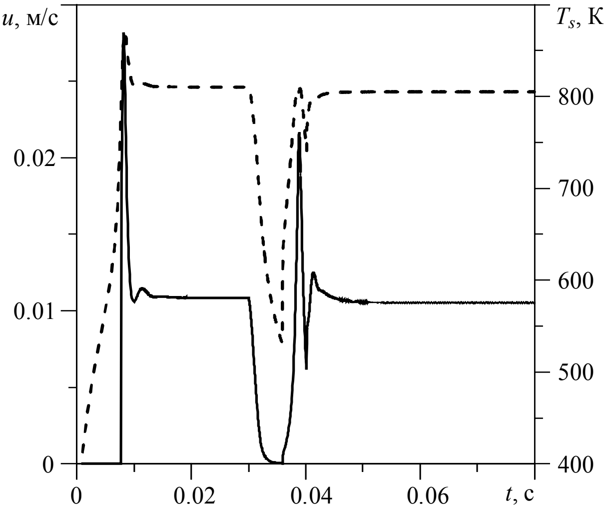


Рис. 1. Зависимость скорости горения и температуры поверхности пороха Н от времени. $r_{\text{Al},0} = 3$ мкм, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$, $P = 10$ МПа, $q = 3 \cdot 10^6$ Вт/м^2, $t_q = 0.03$ с

Fig. 1. Combustion rate and surface temperature of the powder N as a function of time: $r_{\text{Al},0} = 3$ μm, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$, $P = 10$ MPa, $q = 3 \cdot 10^6$ W/m^2, and $t_q = 0.03$ s

Видно, что под действием теплового потока $q = 3 \cdot 10^6$ Вт/м^2 при $t_q = 0.03$ с, твердое топливо проходит стадии:

- «инертного прогрева» и начала газификации твердого топлива (рис. 2);

- выхода на стационарный режим горения под действием внешенго теплового потока, при этом процессы в газовой фазе сопровождаются тепловым взрывом продуктов газификации твердого топлива, прогревом частиц алюминия до температуры их воспламенения и их последующим горением (рис. 3);

- «индукционного периода», который длится с момента отключения тепловго потока до выхода на стационарный режим горения за счет теплового потока из газа к поверхности твердого топлива и стационарный режим горения при заданном давлении (рис. 4).

Практический интерес представляет исследование вопроса о влиянии мощности теплового потока на временные характеристики процесса зажигания и выхода на стационарный режим горения. На рис. 5 представлена зависимость скорости горения пороха Н с добавлением порошка алюминия с массовой долей алюминия в составе топлива $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$ и радиусом частиц $r_{\text{Al},0} = 3$ мкм от времени при различных значениях мощности теплового потока. Видно, что с ростом мощности теплового потока период инертного прогрева сокращается, а скорость горения под воздействием внешнего теплового потока уменьшается. При этом «индукционный период» существенно не меняется.

При этом, как видно из рис. 6, при уменьшении α_{Al} до величины меньше 9 % для заданных величины и времени воздействия теплового потока выхода на стационарный режим горения после отключения не происходит. Это показывает, что добавки порошкообразных металлов в состав твердого топлива вносят существенный вклад в характеристики зажигания и горения.

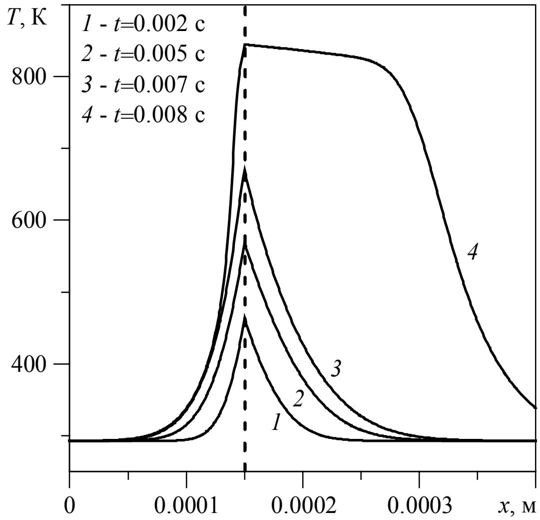


Рис. 2. Распределение температуры металлизированного твердого топлива и газа на этапе инертного прогрева в различные моменты времени.
$r_{\mathrm{Al},0} = 3$ мкм, $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.09$, $P = 10$ МПа, $q = 3\cdot10^6$ Вт/м^2, $t_q = 0.03$ с

Fig. 2. Distribution of the temperature of a metallized solid propellant and gas at the inert heating stage at various time instants:
$r_{\mathrm{Al},0} = 3$ μm, $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.09$, $P = 10$ MPa, $q = 3\cdot10^6$ W/m^2, and $t_q = 0.03$ s

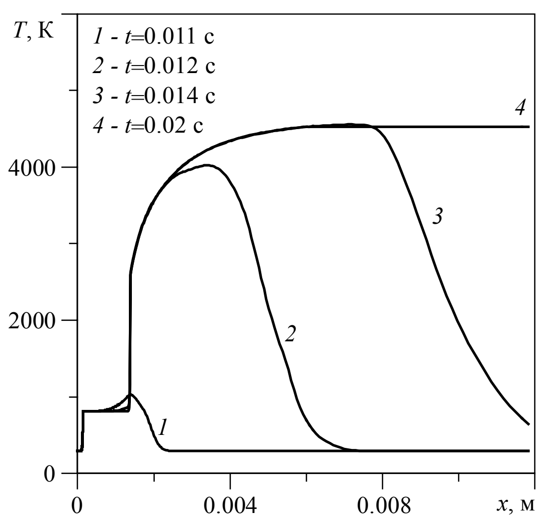


Рис. 3. Распределение температуры металлизированного твердого топлива и газа в процессе развития теплового взрыва в газовой фазе в различные моменты времени.
$r_{\mathrm{Al},0} = 3$ мкм, $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.09$, $P = 10$ МПа, $q = 3\cdot10^6$ Вт/м^2, $t_q = 0.03$ с

Fig. 3. Distribution of the temperature of a metallized solid propellant and gas at thermal explosion development in a gas phase at various time instants:
$r_{\mathrm{Al},0} = 3$ μm, $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.09$, $P = 10$ MPa, $q = 3\cdot10^6$ W/m^2, and $t_q = 0.03$ s

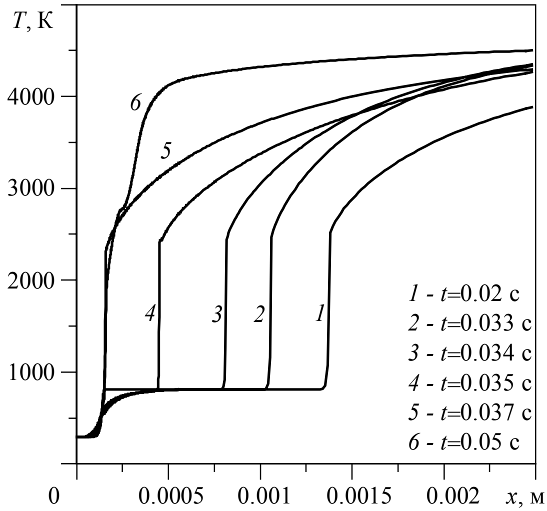


Рис. 4. Распределение температуры металлизированного твердого топлива и газа при отключении воздействия теплового потока и выходе на стационарный режим горения. $r_{\mathrm{Al},0} = 3$ мкм, $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.09$, $P = 10$ МПа, $q = 3\cdot10^6$ Вт/м^2, $t_q = 0.03$ с

Fig. 4. Distribution of the temperature of a metallized solid propellant and gas when reaching a steady-state combustion after ceased heat flux: $r_{\mathrm{Al},0} = 3$ μm, $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.09$, $P = 10$ MPa, $q = 3\cdot10^6$ W/m^2, and $t_q = 0.03$ s

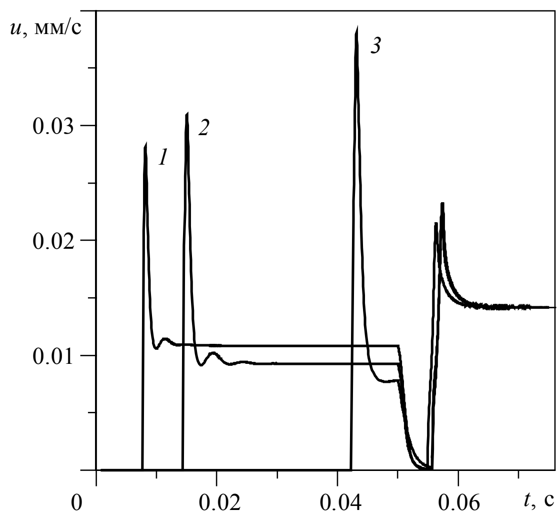


Рис. 5. Зависимость скорости горения пороха Н от времени. $r_{\mathrm{Al},0} = 3$ мкм, $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.09$, $P = 10$ МПа, 1 – $q = 3\cdot10^6$ Вт/м^2, 2 – $q = 2\cdot10^6$ Вт/м^2, 3 – $q = 1\cdot10^6$ Вт/м^2

Fig. 5. Combustion rate of the powder N as a function of time at $r_{\mathrm{Al},0} = 3$ μm, $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.09$, $P = 10$ MPa, $q =$ (*1*) $3\cdot10^6$, (*2*) $2\cdot10^6$, and (*3*) $1\cdot10^6$ W/m^2

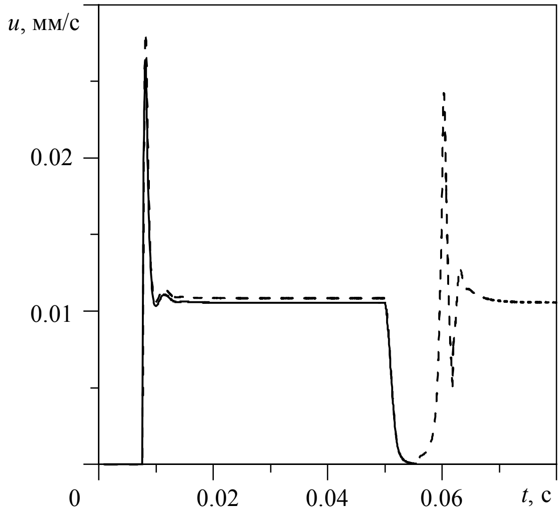


Рис. 6. Зависимость скорости горения пороха Н от времени. $r_{\mathrm{Al},0} = 3$ мкм, $P = 10$ МПа .
$\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.09$ – пунктирная линия, $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.07$ – сплошная линия
(выход на стационарный режим горения не происходит)

Fig. 6. Combustion rate of the powder N as a function of time at $r_{\mathrm{Al},0} = 3$ μm , $P = 10$ MPa .
The dashed line indicates $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.09$, the solid line, $\alpha_{\mathrm{Al}} = 0.07$
(the steady-state combustion does not occur)

Также было замечено, что минимальное время воздействия теплового потока, необходимое для последующего выхода на стационарный режим горения, для каждой величины мощности теплового потока различное. С увеличением мощности теплового потока сокращается минимальное время необходимого воздействия тепового потока, требуемое для развития фронта химических реакций в газовой фазе, за исключением нескольких случаев, когда его мощность слишком велика. В некоторых режимах, при слишком долгом и мощном воздействии теплового потока выход на стационарный режим невозможен по причине большого удаления фронта химической реакции в газе от поверхности топлива за счет интенсивного оттока продуктов газификации твердого топлива. В этом случае тепловой взрыв и формирование фронта химической реакции происходит на значительном удалении от поверхности горения и вклад кондуктивного механизма теплообмена мал по сравнению с конвективным. При этом, при относительно низких значениях теплового потока, ситуация с формированием фронта химических реакций в газе носит аналогичный характер. Добавки порошка алюминия обеспечивают гарантированный выход на стационарный режим горения после отключения теплового потока, если в газовой фазе над поверхностью твердого топлива сформировался фронт химической реакции, обеспечивающий прогрев частиц алюминия до температуры воспламенения.

Аналогичные зависимости были получены при расчетах устойчивости горения при резком сбросе давления в работе [11]. Это подтверждает важность разработки моделей горения, учитывающих вклад процессов в газовой фазе, при изучении горении металлизированных твердых ракетных топлив.

Заключение

В работе представлены разработанная математическая модель, методика и результаты расчета задачи зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива. Проведен расчетно-теоретический анализ влияния добавок порошка алюминия на характеристики зажигания металлизированных твердых топлив. Исследовано влияние мощности и времени теплового потока, массовой доли, дисперсности частиц металла в составе твердого топлива на характеристики зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива. Показано, что дисперсность порошка алюминия имеет существенное влияние на характеристики зажигания металлизированных твердых топлив.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вилюнов В.Н.* Теория зажигания конденсированных веществ. Новосибирск: Наука, 1984. 190 с.
2. *Зарко В.Е., Михеев В.Ф., Сухннин А.И., Хлевной С.С.* Зажигание пороха горячим газом // Физика горения и взрыва. 1971. Т. 7. № 1. С. 64–67.
3. *Гусаченко Л.К., Зарко В.Е., Рычков А.Д.* Зажигание и гашение гомогенных энергетических материалов световым импульсом // Физика горения и взрыва. 2012. Т. 48. № 1. С. 80–88.
4. *Князева А.Г., Буркина Р.С., Вилюнов В.Н.* Особенности очагового теплового воспламенения при различных начальных распределениях температуры // Физика горения и взрыва. 1988. № 3. С. 45–47.
5. *Буркина Р.С., Домуховский А.М.* Влияние структурных изменений приповерхностного слоя конденсированного вещества на его зажигание мощным импульсом излучения // Физика горения и взрыва. 2012. Т. 48. № 5. С. 122–129.
6. *Князева А.Г.* Приближенные оценки характеристик зажигания топлива лучистым потоком через преграду с различными свойствами // Физика горения и взрыва. 1996. Т. 32. № 1. С. 26–41.
7. *Глушков Д.О., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А.* Об устойчивости зажигания смесевого твёрдого топлива локальным источником ограниченной энергоёмкости // Физика горения и взрыва. 2014. Т. 50. № 6. С. 54–60.
8. *Липанов А.М., Болкисев А.А.* О расчете температурного поля в заряде твердого топлива с учетом гетерогенности его теплофизических свойств // Химическая физика и мезоскопия. 2013. Т. 14. № 3. С. 364–370.
9. *Krainov A.Y., Poryazov V.A., Krainov D.A.* Unsteady combustion modeling of metallized composite solid propellant // International Review on Modelling and Simulations. 2018. V. 11. No. 5. DOI: 10.15866/iremos.v11i5.15020.
10. *Булгаков В.К., Липанов А.М.* Теория эрозионного горения твердых ракетных топлив. М.: Наука, 2001. 138 с.
11. *Порязов В.А., Крайнов А.Ю.* Математическая модель и расчет нестационарной скорости горения металлизированных твердых ракетных топлив // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 50. С. 99–111.

Статья поступила 14.11.2018 г.

Poryazov V.A., Krainov A.Yu. CALCULATION OF THE IGNITION STAGES AND STEADY-STATE COMBUSTION OF A METALLIZED SOLID PROPELLANT UNDER LASER RADIATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 94–104

DOI 10.17223/19988621/59/10

Keywords: metallized solid propellant, mathematical model, ignition, transient phenomena.

The paper presents a physical and mathematical model as well as the results of the calculation of ignition and steady-state combustion of a metallized solid propellant under the action of heat flux. The approach is based on the coupled mathematical model which takes into account the physical and chemical processes in the solid propellant and in the gas phase over the propellant surface. The mass and energy flow conservation equations specify the boundary conditions on the surface of the solid propellant. The equations of heat transfer and decomposition of condensed phase are used below the surface of the propellant. The gas phase over the propellant surface is described by two-velocity and two-temperature model of the reacting flow of propellant decomposition products and their gasification.

The effect of the heat flux capacity, mass fraction and dispersion of the aluminum particles in the composition of solid propellant on the ignition characteristics and development of the steady-state combustion is studied.

PORYAZOV Vasiliy Andreevich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

KRAINOV Aleksey Yur'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Vilyunov V.N. (1984) *Teoriya zazhiganiya kondensirovannykh veshchestv* [Theory of ignition of condensed materials]. Moscow: Nauka.
2. Zarko V.E., Mikheev V.F., Sukhinin A.I., Khlevnoi S.S. (1973) Hot-gas ignition of powders. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 7(1). pp. 55–57. DOI: 10.1007/BF00748915.
3. Gusachenko L.K., Zarko V.E., Rychkov A.D. (2012) Ignition and extinction of homogeneous energetic materials by a light pulse. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 48(1). pp. 73–80. DOI: 10.1134/S0010508212010108.
4. Knyazeva A.G., Burkina R.S., Vilyunov V.N. (1988) Characteristics of local thermal ignition with various initial temperature distributions. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 24(3). pp. 303–305. DOI: 10.1007/BF00750611.
5. Burkina R.S., Domukhovskii A.M. (2012) Effect of structural changes of the surface layer of a condensed material ignited by a powerful radiation pulse. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 48(5). pp. 602–608. DOI: 10.1134/S0010508212050115.
6. Knyazeva A.G. (1996) Approximate estimates of the characteristics of propellant ignition using radiant flux through shields with various properties. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 32(1). pp. 22–35. DOI: 10.1007/BF01992187.
7. Glushkov D.O., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. (2014) Stability of composite solid propellant ignition by a local source of limited energy capacity. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 50(6). pp. 670–675. DOI: 10.1134/S0010508214060082.
8. Lipanov A.M., Bolkisev A.A. (2013) O raschete temperaturnogo polya v zaryade smesevogo tverdogo topliva s uchetom geterogennosti ego teplofizicheskikh svoystv [On calculation of a temperature field in a composite propellant charge considering heterogeneity of its thermophysical properties]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya*. 14(3). pp. 364–370.
9. Krainov A.Yu., Poryazov V.A., Krainov D.A. (2018) Unsteady combustion modeling of metallized composite solid propellant. *International Review on Modelling and Simulations*. 11(5). DOI: 10.15866/iremos.v11i5.15020.
10. Bulgakov V.K., Lipanov A.M. (2001) *Teoriya erozionnogo goreniya tverdykh raketnykh topliv* [Theory of erosive combustion of solid rocket propellants]. Moscow: Nauka.
11. Poryazov V.A., Krainov A.Yu. (2017) Matematicheskaya model' i raschet nestatsionarnoy skorosti goreniya metallizirovannykh tverdykh raketnykh topliv [Mathematical model and calculation of the unsteady combustion rate of the metallized solid rocket propellants]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 99–111. DOI: 10.17223/19988621/50/9.

Received: November 14, 2018

УДК 533.15; 533.16; 533.72
DOI 10.17223/19988621/59/11

В.Я. Рудяк, Е.В. Лежнев, Д.Н. Любимов

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ И НАНОГАЗОВЗВЕСЕЙ[1]

Целью работы является разработка стохастического алгоритма молекулярного моделирования динамики разреженных газов, их смесей и наногазовзвесей. Выполнено моделирование коэффициента бинарной диффузии смеси благородных газов, коэффициента вязкости одноатомных и многоатомных газов, изучена диффузия наночастиц различного размера в азоте. Данные моделирования сопоставлены с известными экспериментальными. Показано, что даже при небольшом числе частиц удается достичь точности, сопоставимой с точностью измерений. Эта точность растет с увеличением числа молекул и независимых фазовых траекторий, используемых для усреднения.

Ключевые слова: *процессы переноса, диффузия, разреженный газ, стохастическое моделирование, наногазовзвеси, наножидкости, молекулярное моделирование.*

Молекулярное моделирование процессов переноса является важным методом наряду с экспериментом получения информации о коэффициентах переноса. В разреженных газах это принципиально возможно на основе кинетической теории. Однако вычисление коэффициентов переноса разреженных газов в процессе решения уравнения Больцмана является совсем нетривиальной задачей (необходимость решения ряда линейных интегральных уравнений, расчета так называемых Ω-интегралов и т.п.). В ряде случаев в частности для многоатомных газов, решить ее с необходимой точностью технически чрезвычайно сложно. По этой причине разработка прямого молекулярного моделирования чрезвычайно актуальна. В принципе таким методом является хорошо известный метод молекулярной динамики. Однако для разреженного газа он фактически не применим из-за необходимости использования для моделирования огромного числа частиц. Действительно, в этом случае расчетная ячейка должна иметь характерный размер, существенно превышающий длину свободного пробега молекул. Ситуация еще больше усложняется при моделировании смесей газов, наногазовзвесей, являющихся некоторым частным случаем наножидкостей. Интерес к последним чрезвычайно быстро растет в связи с различными возможными и уже существующими приложениями (см., например, [1]). Кроме того, необходимо понимать, что метод молекулярной динамики из-за наличия в рассматриваемых системах (газах) динамического хаоса не дают истинных фазовых траекторий [2–5]. Локальная неустойчивость фазовых траекторий возникает из-за неточности задания начальных данных для динамических переменных молекул системы, ошибок округления и т.п. Стоит отметить также, что динамический хаос имеет место и в системе твердых сфер, где для описания ее динамики вообще не приходится решать уравнения

[1] Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 17-01-00040 и 17-58-45023).

Ньютона [4, 6, 7]. Тем не менее, как известно (см., например, [4, 8–10] и цитируемую там литературу), метод молекулярной динамики дает прекрасные результаты при изучении самых разных физических, химических и биологических систем. Это обусловлено тем, что актуальные результаты при использовании метода молекулярной динамики получаются усреднением по большому числу независимых фазовых траекторий. В связи с этим естественной представляется идея разработки имитационного метода моделирования процессов переноса, в котором фазовые траектории определяются не точно, но последующее усреднение по большому их числу позволяет получать разумные результаты.

В наших работах [11–13] был развит стохастический алгоритм моделирования коэффициентов переноса однокомпонентного разреженного газа. Было установлено, что, используя сравнительно небольшое число молекул, можно моделировать коэффициенты переноса с точностью получения экспериментальных данных. Однако тестирование алгоритма в указанных работах выполнялось на вычислении коэффициентов переноса благородных газов. Насколько он окажется пригодным для моделирования коэффициентов переноса многоатомных газов не ясно. Еще бóльшие проблемы возникают при изучении процессов переноса в наногазовзвесях. В этом случае для описания взаимодействия молекул несущего газа с наночастицами необходимо использовать специальный достаточно сложный потенциал [14, 15]. Целью данной работы является обобщение алгоритма, предложенного в работах [11–13] для моделирования процессов переноса в многоатомных газах и наногазовзвесях. В частности, изучается диффузия в бинарной смеси разреженных газов и наногазовзвесях, а также вязкость многоатомных разреженных газов.

1. Алгоритм моделирования

Основы алгоритма систематически описаны в работах [12, 13]. Частицы смеси моделируемых газов (молекулы) или наногазовзвесей (молекулы и наночастицы) помещаются в ячейку моделирования, которая представляет собой прямоугольный параллелепипед (куб). Для моделирования системы молекул в объеме используются периодические граничные условия, то есть, если какая-либо частица выходит через грань моделируемого объема с импульсом $\mathbf{p}_i$, то через его противолежащую грань входит такая же частица с таким же импульсом. В результате наряду с эволюцией частиц в основной ячейке учитывается и их эволюция во всех окружающих ее копиях.

В начальный момент времени частицы распределяются равномерно по объему моделирования (по ячейке) в соответствии с заданными массовыми плотностями ρ_1, ρ_2 и массовой долей x_i. Кроме того, даны массы молекул m_1, m_2, температура среды T и объем V. Кроме того, задаются характерные размеры частиц. Это их диаметры d_1, d_2, если используется потенциал твердых сфер, или соответствующий параметр реального потенциала (см. ниже). В наногазовзвеси задается радиус (диаметр) наночастицы. Скорости молекул $\mathbf{v}_i$ в ячейке моделирования разыгрываются согласно распределению Максвелла при заданной температуре T

$$f_{\mathrm{M}}(\mathbf{v}_i) = \left(\frac{m}{2pkT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m|\mathbf{v}_i|^2}{2kT}\right), \qquad (1)$$

где m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана. При этом, поскольку моделируется равновесное состояние, то суммарный импульс молекул системы должен быть равен нулю, а энергия соответствовать температуре. Равенство суммарного импульса нулю для каждой компоненты достигается следующим образом: генерируются скорости $(N-\sqrt{N})$ молекул, и подсчитывается их суммарный импульс. Затем полученный импульс с противоположным знаком распределяется между $(\sqrt{N}-1)$ оставшимися молекулами, после этого подсчитывается суммарный импульс этих молекул, и он с обратным знаком присваивается оставшейся молекуле. Таким образом, удается достичь того, что суммарный импульс системы равен нулю и нет молекул с очень большими скоростями. Однако приготовленная таким образом система в общем случае равновесной все еще не является. Чтобы достичь равновесия, производится предварительный расчет, в результате которого распределение молекул по скоростям становится максвелловским (1).

Молекулы газа взаимодействуют друг с другом посредством заданного парного потенциала. Это может быть потенциал твердых сфер, непрерывный потенциал Леннард-Джонса или другой, в зависимости от того, какая смесь моделируется. В данной работе межмолекулярное взаимодействие описывалось потенциалом Леннард-Джонса

$$U(r)=\begin{cases}4\varepsilon\left[\left(\dfrac{\sigma}{r}\right)^{12}-\left(\dfrac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]-U_{\text{c}} & \text{для } r\le r_{\text{c}}\\ 0 \quad \text{для } r>r_{\text{c}}\end{cases}. \tag{2}$$

Здесь ε – максимальное значение энергии притяжения, σ – эффективный радиус молекулы, r_{c} – радиус обрезания.

Поскольку в данной работе рассматриваются смеси газов, то помимо взаимодействия их молекул, которые описываются параметрами потенциала (2) σ_{ii}, ε_{ii} ($i = 1, 2$), необходимо определить параметры перекрестного взаимодействия молекул сорта i с молекулами сорта j: σ_{ij}, ε_{ij}. Эти параметры определялись с помощью простейших комбинационных соотношений: $\sigma_{ij} = (\sigma_{ii}+\sigma_{jj})/2$, $\varepsilon_{ij}=\sqrt{\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}}$.

В разреженном газе молекулы считаются материальными точками, так что их соударение происходит в одной точке. Вследствие этого коэффициенты переноса такого газа определяются лишь эволюцией молекул в пространстве скоростей. Таким образом, фактически можно рассматривать пространственно однородную систему и исследовать только динамику изменения скоростей молекул. Тем не менее координаты частиц $(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N)$ нужны для корректной обработки столкновений, поэтому достаточно, чтобы в начальный момент времени частицы были распределены по пространству равномерно и в дальнейшем их положение меняться не будет.

Имитация динамики рассматриваемой смеси начинается с составления списка. В начальный момент времени t все частицы в некотором произвольном порядке вносятся в список. Это соответствует списку и в фазовом пространстве. Меняя порядок частиц в списке, мы будем получать различные фазовые траектории. Затем выбирается интервал времени $t_1 = d_{\min}/v_{\max}$, где $v_{\max}$ – максимальная по модулю скорость молекул системы в данный момент времени, $d_{\min} = \min(d_1,d_2)$. Формирование списка для момента $(t + t_1)$ начинается с рассмотрения молекулы 1. На момент времени t частицы имеют скорости $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_N)$. Обработка ведется по списку, начиная с частицы 1. Для того чтобы понять столкнулась ли за время τ_1 частица 1 с какой-либо другой, генерируется случайное число u, равномерно распределенное на интервале (0; 1). Если оно окажется меньше средней вероятности столкновения, тогда столкновение произойдет. Пусть, для определенности, рассматривается частица первого сорта (для второго формулы аналогичны). В этом случае вероятность столкновения

$$P_\tau = \frac{\tau_1}{\tau_1^t} = 4\tau_1\rho_1\sigma_1{}^2\sqrt{\frac{\pi RT}{m}} + 2\tau_1\rho_2\sigma_{12}{}^2\sqrt{\frac{2\pi RT}{x_1 m_2}} = P_1 + P_{12},$$

где τ_1^t – время свободного пробега частиц первого сорта. Итак, если $u < P_\tau$, то столкновение произойдет и для частицы 1 случайно из N–1 оставшихся частиц выбирается частица j, с которой это столкновение будет реализовано. Причем, если $u < P_1$, выбирается частица 1-го сорта, а если $P_1 \le u < P_1 + P_{12}$, то – второго сорта. После указанного соударения скорости частиц изменяются в соответствие с законами сохранения

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_{1j}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e},\ \mathbf{v}_j' = \mathbf{v}_j + (\mathbf{v}_{j1}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e},$$

где $\mathbf{v}_{ji} = (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)$ – вектор относительной скорости, а $\mathbf{e}$ – единичный вектор направления от центра молекулы j к центру молекулы 1.

В случае, если генерируемое число оказалось больше средней вероятности столкновения, частица 1 в промежутке времени τ_1 не стакивается и ее скорость остается равной $\mathbf{v}_1$. Если же она столкнулась, то в исходном списке изменяются скорости частиц 1 и j. Аналогично последовательно обрабатываются все оставшиеся частицы. В результате в конце формируется новый список скоростей частиц $(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', ..., \mathbf{v}_N')$, при этом часть частиц из этого списка могла за это время не столкнуться, например частица k. Тогда ее скорость остается прежней, то есть $\mathbf{v}_k' \equiv \mathbf{v}_k$.

После формирования списка на момент времени $(t + \tau_1)$ выбирается следующий интервал времени $\tau_2 = d_{\min}/v_{\max}$, где $v_{\max}$– максимальная по модулю скорость частиц системы в момент времени $(t + \tau_1)$, и процедура повторяется. Описанная процедура повторяется до тех пор, пока не закончится заданное время расчета t_s, которое равно: $t_s = \tau_1+\tau_2+\tau_3+\ldots+\tau_N$. Результатом расчета является полный набор скоростей всех частиц моделируемой системы в последовательные моменты времени. Используя эту информацию, можно рассчитать практически все наблюдаемые характеристики газа, включая коэффициенты переноса.

2. Расчет коэффициента диффузии

Коэффициенты переноса в общем случае определяются флуктуационно-диссипационными теоремами, которые связывают их значения с корреляторами соответствующих динамических переменных. В литературе эти формулы принято называть формулами Грина – Кубо [4, 16–18]. В частности, коэффициент бинарной диффузии определяется соотношением [19]

$$D = \frac{1-x_1}{x_1}L_{11} + \frac{x_1}{1-x_1}L_{22} - L_{12} - L_{21}, \tag{3}$$

где коэффициенты L_{ij} определяются как

$$L_{ij} = \frac{1}{3N}\int_0^{\tau_p}\chi_{ij}(t)dt,\ \chi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N_i}\left[v_k^i(0) - v(0)\right]\sum_{l=1}^{N_j}\left[v_l^j(t) - v(t)\right]. \tag{4}$$

Здесь $v(t)=\frac{x_1}{N_1}\sum_{k=1}^{N_1}v_k^1(t)+\frac{(1-x_1)}{N_2}\sum_{l=1}^{N_2}v_l^2(t)$, а τ_p – так называемое платовое значение времени расчета, то есть за которое коэффициент переноса (в данном случае диффузии) достигает постоянного значения [20]. Подынтегральное выражение определяет корреляционные функций скоростей молекул, интегралы по времени от которых и дают значение коэффициента диффузии.

С использованием полученных данных моделирования скоростей всех молекул в последовательные моменты времени последовательно вычисляются сначала корреляционные функции, а затем и коэффициенты диффузии. Поскольку в данном случае рассматривается разреженный газ, то все корреляционные функции должны затухать экспоненциально быстро с характерным временем порядка времени свободного пробега молекулы [4]. Расчеты подтверждают это. На рис. 1 в качестве примера приведена эволюция автокорреляционной функции χ_{11} для смеси Kr–Ar. Здесь время $t' = t/\tau$, где τ – время свободного пробега молекул сорта 1 (криптона). Автокорреляционная функция скорости молекул действительно затухает экспоненциально. Это, в частности, означает, что соответствующий коэффициент диффузии быстро выходит на платовое значение. На рис. 2 приведена эволюция коэффициента диффузии (3) для указанной смеси газов при равных молярных долях. Выход на платовое значение происходит за 5–10 времен свободного пробега.

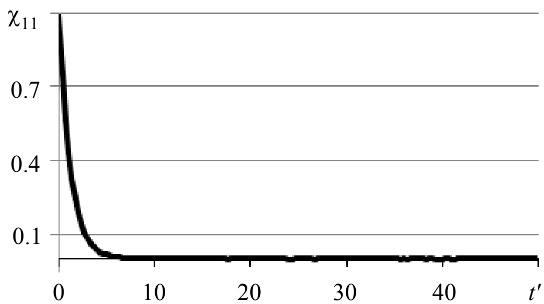


Рис. 1. Эволюция автокорреляционной функции
Fig. 1. Time evolution of the autocorrelation function

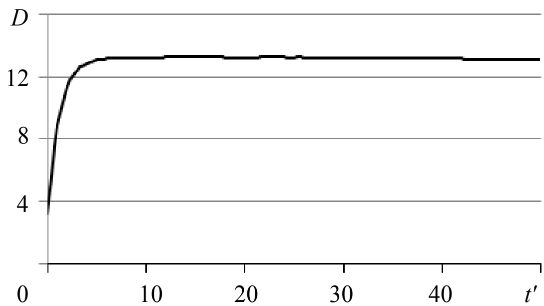


Рис. 2. Эволюция коэффициента диффузии
Fig. 2. Time evolution of the diffusion coefficient

Точность моделирование оценивалась сопоставлением с экспериментальными данными. Были рассчитаны коэффициенты диффузии для смесей разреженных газов Kr–Ar, Xe–Ar, Xe–Kr, при атмосферном давлении и температуре 295 K. Для сопоставления использовались известные экспериментальные данные коэффициентов диффузии смесей D_e [21]. Параметры потенциала взяты из монографии [22], для аргона $\sigma = 0.311$ нм, $\varepsilon/k = 116$ K, для криптона $\sigma = 0.351$ нм, $\varepsilon/k = 190$ K и для ксенона $\sigma = 0.386$ нм, $\varepsilon/k = 190$ K.

Расчет каждой фазовой траектории выполнялся в течение 50 времен свободного пробега. Коэффициент диффузии D вычислялся усреднением по 1000 независимым фазовым траекториям. В расчетах использовалось около 3500 молекул. Полученные результаты для указанных смесей представлены в табл. 1. Здесь приведены данные при равных массовых долях. В последней строке указана относительная ошибка моделирования. При указанных параметрах (числе использованных молекул и фазовых траекторий) ошибка моделирования составляла около 3 %. Стоит отметить, что точность измерения коэффициента диффузии также обычно лежит в пределах 1–3 %. Так что точность моделирования даже с использованием этого сравнительно небольшого числа молекул оказывается вполне приемлемой.

Таблица 1

Сопоставление данных моделирования коэффициента диффузии *D* с экспериментальными данными D_e [14]

T	Kr–Ar	Xe–Ar	Xe–Kr
D_e, см^2/с	13.58	11.1	7.43
D, см^2/с	13.22	11.42	7.19
Δ, %	2.63	2.88	3.28

Вместе с тем точность моделирования с помощью представляемого алгоритма растет с увеличением числа используемых молекул и/или числа используемых для усреднения фазовых траекторий. Ниже это показано на примере моделирования коэффициента диффузии смеси Kr–Ar. Число использованных молекул (N) варьировалось от 850 до 6800, а число траекторий (L) – от 125 до 1000. Полученные данные сведены в табл. 2, рассчитывалась точность (Δ) вычисления коэффиицента диффузии. При этом при варьировании числа молекул (левые столбцы табл. 2) усреднение во всех случаях проводилось по тысяче траекторий, а при варьировании числа траекторий, во всех случаях использовалось 3200 молекул. Приведенные данные свидетельствуют о том, что точность моделирования растет с увеличением числа молекул или моделируемых фазовых траекторий. Полученные относительные ошибки (вторая строка) хорошо описываются зависимостями: $\Delta_N \sim 1/\sqrt{N}$ (коэффициент корреляции равен 0.97) и $\Delta_L \sim 1/\sqrt{L}$ (коэффициент корреляции равен 0.98).

Таблица 2

Точность вычисления коэффициента диффузии при различном числе молекул (*N*) и траекторий (*L*) для смеси Kr-Ar

N	6800	3400	1700	850
Δ_N, %	1.88	2.63	3.97	4.97

L	1000	500	250	125
Δ_L, %	2.63	3.82	4.42	5.76

3. Моделирование коэффициента вязкости

Одной из проблем кинетической теории газов является моделирование процессов переноса многоатомных газов. Здесь используются самые разные подходы, включая использование различных полуклассических или квантовых методов (см., например, [22–25]). Тем не менее даже в простейшем случае однокомпонентного газа вычисление коэффициентов переноса разреженного многоатомного газа является проблемой, до конца не решенной до сих пор. Поэтому хотелось понять, насколько описанный выше алгоритм применим для моделирования коэффициентов переноса и многоатомных газов. В настоящем разделе приводятся данные моделирования коэффициента вязкости как одноатомных (Ar, Kr, Ne, Xe), так и многоатомных газов (CH_4, CO, CO_2, O_2).

Вычисление коэффициента вязкости, как и при использовании метода молекулярной динамики, основывается на флуктуационно-диссипационной теореме, которая для коэффициента вязкости имеет вид [4, 16, 18]

$$\eta = \frac{1}{VkT}\int\limits_0^{\tau_p} \left\langle \sigma_{xy}(0)\sigma_{xy}(t)\right\rangle dt \,. \tag{5}$$

Входящие сюда компоненты полного тензора потока импульса для разреженного газа вычисляются так:

$$\sigma_{xy}(t) = \frac{1}{3l}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{N} m\left[v_x^i(j\Delta t)v_y^i(j\Delta t)\right]. \tag{6}$$

Использовались следующие параметры потенциала (2): $\sigma = 0.3822$ нм, $\varepsilon/k = 137$ К для CH_4; $\sigma = 0.359$ нм, $\varepsilon/k = 110$ К для CO; $\sigma = 0.4484$ нм, $\varepsilon/k = 189$ К для CO_2; $\sigma = 0.3433$ нм, $\varepsilon/k = 113$ К для O_2; $\sigma = 0.311$ нм, $\varepsilon/k = 116$ К для Ar; $\sigma = 0.351$ нм, $\varepsilon/k = 190$ К для Kr; $\sigma = 0.178$ нм, $\varepsilon/k = 35.7$ К для Ne и $\sigma = 0.386$ нм, $\varepsilon/k = 190$ К для Xe [22]. Во всех случаях в расчетах использовалось 3200 молекул, а усреднение полученных данных выполнялось по 1000 независимым фазовым траекториям. Расчеты коэффициентов переноса проводились при температуре 273 К и атмосферном давлении. Полученные значения коэффициента вязкости представлены в табл. 3 (вторая строка). Здесь же приведены и соответствующие экспериментальные значения η_e, взятые из справочника [26].

Таблица 3

Сравнение смоделированных η и экспериментальных η_e коэффициентов вязкости

	CH_4	CO	CO_2	O_2	Ar	Kr	Ne	Xe
$\eta\cdot10^6$ (Па·с)	10.48	15.95	13.0	18.91	22.25	25.87	32.28	23.78
$\eta_e\cdot10^6$ (Па·с)	10.37	16.6	13.8	19.3	22.7	25.5	31.7	23.3
Δ, %	1.06	3.94	5.84	2.02	1.97	1.46	1.84	2.05

Сопоставление данных моделирования с экспериментальными показывает, что точность моделирования оказывается для благородных газов в пределах точности получения экспериментальных данных (около 2 %). Что же касается многоатомных газов, то здесь ситуация сложнее. Хорошие данные получены для метана, молекулы которого сферически симметричны и применение потенциала Леннард-Джонса вполне оправдано. Для несферических молекул, конечно, следует применять более адекватные потенциалы. Хотя и здесь точность моделирования коэффициента вязкости оказывается не плохой. Кроме того, ее можно еще и несколько повысить, используя большее число молекул.

4. Моделирование коэффициента диффузии наногазовзвеси

Алгоритм моделирования разреженных наногазовзвесей фактически ничем не отличается от алгоритма моделирования смеси разреженных газов. Поскольку рассматривается газовзвесь при нормальных условиях, то длина свободного пробега молекул несущего газа много больше размера дисперсных наночастиц. Поэтому для описания такой наногазовзвеси можно использовать кинетическую теорию Больцмана [14, 15]. Это, в частности, означает, что при моделировании наночастицы, как и молекулы, считаются материальными точками, а коэффициенты переноса будут зависеть только от скоростей.

Данный раздел посвящен моделированию коэффициента диффузии наночастиц в газе. Поскольку не ставилась задача изучения зависимости коэффициента диффузии от концентрации наночастиц, то для моделирования можно было изучать эволюцию в газе изолированной наночастицы. Для моделирования молекулы газа и наночастица помещаются в кубическую ячейку моделирования. Как и в случае моделирования смеси газов, используются периодические граничные условия. В начальный момент времени молекулы газа распределяются равномерно по объему моделирования в соответствии с заданной плотностью ρ_1. Наночастица радиуса R помещается в центре ячейки. Массы молекул и наночастицы равны соответственно m_1, m_2, температура среды T и объем V. Скорости молекул и наночастицы в ячейке моделирования разыгрываются согласно распределению Максвелла (1) при заданной температуре T. При этом, поскольку моделируется равновесное состояние, то суммарный импульс молекул и наночастицы системы должен быть равно нулю, а энергия соответствовать температуре. Равенство суммарного импульса нулю для каждой компоненты достигается специальным образом, описанным выше.

Взаимодействие молекул между собой описывается потенциалом Леннард-Джонса (2), а взаимодействие наночастицы с молекулами несущего газа – потенциалом Краснолуцкого – Рудяка [14, 15]

$$U(r) = U_9(r) - U_3(r),$$

$$U_i(r) = C_i\left\{\left[(r-R)^{-i} - (r+R)^{-i}\right] - a_i\left[(r-R)^{-(i-1)} - (r+R)^{-(i-1)}\right]\right\}. \qquad (7)$$

Здесь $a_9 = 9/(8r)$, $a_3 = 3/(2r)$, $C_9 = 4\pi\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}^{12}/(45V_m)$, $C_3 = 4\pi\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}^{6}/(3V_m)$, V_m – эффективный объем молекулы (атома) дисперсной частицы.

Согласно алгоритму, описанному в разделе 1, производится моделирование динамики рассматриваемой наногазовзвеси. Результатом расчета является полный набор скоростей всех молекул и наночастицы моделируемой системы в последовательные моменты времени. Используя эту информацию, можно рассчитать практически все наблюдаемые характеристики газа, включая коэффициент диффузии. В последнем случае применяются флуктуационно-диссипационные соотношения (3), (4).

Поскольку одна из целей настоящей работы состояла в изучении возможностей предлагаемого имитационного алгоритма для моделирования диффузии наночастиц в газе, то для этой цели была изучена диффузия наночастиц Cu_2O в азоте. Ранее диффузия именно таких частиц при атмосферном давлении и температуре 294.15 К была систематически изучена экспериментально и с помощью кинетической теории [27]. Использовались следующие параметры потенциала: для N_2 $\sigma = 0.3798$ нм, $\varepsilon = 71.4$ К, для Cu_2O $\sigma = 0.4124$ нм, $\varepsilon = 2909$ К. Диаметр частицы Cu_2O варьировался от $R_c = 2.55$ до 8.94 нм. Число молекул в расчетах в зависимости от размера наночастицы варьировалось от 450 до 20000. Коэффициент диффузии вычислялся усреднением по 1000 независимых фазовых траекторий.

Результаты сопоставления данных моделирования с экспериментальными приведены в таблице 4. Здесь первый столбец – диаметр наночастицы, второй – результат моделирования D, третий столбец – данные [27] D_e, четвертый – относительная погрешность. Во всех случаях точность моделирования оказывается достаточно высокой и практически не зависит от размера наночастиц.

Таблица 4

Вычисления коэффициента диффузии наночастицы

R_c, нм	D, м^2/с$\cdot 10^{-7}$	D_e, м^2/с$\cdot 10^{-7}$	Δ, %
2.55	5.156	5.063	1.84
2.94	4.046	4.102	1.37
3.33	3.386	3.418	0.95
3.87	2.732	2.678	2.01
4.51	2.158	2.118	1.87
4.79	1.968	1.932	1.88
5.35	1.632	1.601	1.95
5.84	1.427	1.397	2.12
6.332	1.236	1.215	1.71
7.54	9.196	9.044	1.68
8.94	6.625	6.694	1.03

Заключение

Представленный в данной работе имитационный алгоритм молекулярного моделирования был применен для моделирования различных коэффициентов переноса как смесей благородных газов, так и для наногазовзвесей и газов с многоатомными молекулами. При моделирование коэффициента диффузии смесей разреженных благородных газов точность около 3 % удается достигнуть, используя всего 3400 молекул. С увеличением числа молекул точность моделирования повышается, и для достижения точности порядка 2 % необходимо взять примерно вдвое больше молекул.

Приятным фактом является и то, что алгоритм пригоден для моделирования коэффициентов переноса многоатомных газов. Конечно, использование потенциала Леннард-Джонса здесь в ряде случаев не приведет к успеху, необходимы более реалистические потенциалы. Важно, однако, что алгоритм принципиально пригоден и в этом случае. В принципе его можно использовать и для газов, где необходимо учитывать динамику и внутренних степеней свободы. В этом случае фазовое пространство системы будет включать помимо скоростей еще и соответствующие внутренние переменные. И здесь в процессе соударения необходимо будет учитывать переходы между различными внутренними состояниями.

Наконец, впервые предложен метод моделирования коэффициентов переноса наногазовзвеси. Его работоспособность продемонстрирована здесь на примере моделирования диффузии наночастицы. Изучению вязкости наногазовзвесей будет посвящена специальная работа.

Важным обстоятельством является то, что во всех случаях точность моделирования возрастает с увеличением и числа используемых частиц, и числа фазовых траекторий, по которым ведется усреднение результатов. Относительная ошибка оказывается порядка $\Delta \sim 1/\sqrt{NL}$. Это, в частности, означает, что для достижения заданной точности число молекул можно «разменивать» на число траекторий. Это особенно важно, например, при моделировании наногазовзвесей с достаточнго большими наночастицами, поскольку в этом случае необходимо использовать десятки или даже сотни тысяч молекул.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рудяк В.Я.*, *Минаков А.В.* Современные проблемы микро- и нанофлюидики. Новосибирск: Наука, 2016. 296 с.
2. *Норман Г.Э.*, *Стегайлов В.В.* Стохастические свойства молекулярно-динамической леннард-джонсовской системы в равновесном и неравновесном состояниях // ЖЭТФ. 2001. Т.119. С. 1011–1020.
3. *Norman G.E.*, *Stegailov V.V.* Stochastic and dynamic properties of molecular dynamics systems: simple liquids, plasma and electrolytes, polymers // Comp. Physics Comm. 2002. V. 147. P. 678–683.
4. *Рудяк В.Я.* Статистическая аэрогидромеханика гомогенных и гетерогенных сред. Т. 2. Гидромеханика. Новосибирск: НГАСУ, 2005. 468 с.
5. *Норман Г.Э.*, *Стегайлов В.В.* Стохастическая теория метода классической молекулярной динамики // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 6. С. 3–44.
6. *Рудяк В.Я.*, *Иванов Д.А.* Компьютерное моделирование динамики конечного числа взаимодействующих частиц // Доклады АН ВШ России. 2003. № 1. С. 30–38.
7. *Рудяк В.Я.*, *Иванов Д.А.* Динамические и стохастические свойства открытой системы конечного числа упруго взаимодействующих частиц // Труды НГАСУ. 2004. Т. 7. № 3(30). С. 47–58.
8. *Хеерман Д.В.* Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике. М.: Наука, 1990. 314 с.
9. *Бриллиантов Н.В.*, *Ревокатов О.П.* Молекулярная динамика неупорядоченных сред. М.: МГУ, 1996. 158 с.
10. *Rapaport D.C.* The art of molecular dynamics simulation. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 548 c.
11. *Rudyak V.Ya.*, *Lezhnev E.V.* Stochastic method for modeling of the rarefied gas transport coefficients // J. Physics: Conference Series. 2016. V. 738. P. 012086. DOI: 10.1088/1742-6596/738/1/012086.
12. *Рудяк В.Я.*, *Лежнев Е.В.* Стохастический метод моделирования коэффициентов переноса разреженного газа // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 3. С. 113–122.
13. *Rudyak V.Ya.*, *Lezhnev E.V.* Stochastic algorithm for simulating gas transport coefficients // Journal of Computational Physics. 2018. V. 355. P. 95–103. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.11.001.
14. *Рудяк В.Я.*, *Краснолуцкий С.Л.* Кинетическое описание диффузии наночастиц в разреженном газе // Доклады Академии наук. 2001. Т. 381. № 5. С. 623–625.
15. *Рудяк В.Я.*, *Краснолуцкий С.Л.* Диффузия наночастиц в разреженном газе // ЖТФ. 2002. Т. 72. № 7. С. 13–20.
16. *Зубарев Д.Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
17. *Kubo R.*, *Yokota M.*, *Nakajima S.* Statistical-mechanical theory of irreversible processes. II. Reaction on thermal disturbances // J. Phys. Soc. Japan. 1957. V. 12. No. 11. P. 1203–1226.
18. *Green H.S.* Theories of transport in fluids // J. Math. Phys. 1961. V. 2. No. 2. P. 344–348.
19. *Krishna R.*, *Wesselingh J.A.* The Maxwell-Stefan approach to mass transfer // Chemical Engineering Science. 1997. V. 52. No. 6. P. 861–911.
20. *Рудяк В.Я.*, *Белкин А.А.*, *Егоров В.В.*, *Иванов Д.А.* Моделирование процессов переноса на основе метода молекулярной динамики. Коэффициент самодиффузии // ТВТ. 2008. Т. 46. № 1. С. 35–44.

21. *Van Heijningen R.J.J., Harpe J.P., Beenakker J.J.M.* Determination of the diffusion coefficients of binary mixtures of the noble gases as a function of temperature and concentration // Physica. 1968. V. 38. P. 1–34.
22. *Hirschfelder J.O., Curtiss Ch.F., Bird R.B.* Molecular theory of gases and liquids. New York: John Wiley and Sons Inc., London: Chapman and Hall Lim. 1954. 902 p.
23. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 512 p.
24. *Валландер С.В., Нагнибеда Е.А., Рыдалевская М.А.* Некоторые вопросы кинетической теории химически реагирующей смеси газов. Л.: ЛГУ, 1977. 280 с.
25. *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 332 с.
26. *Григорьев И.С., Мейлихова Е.З.* Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1234 с.
27. *Рудяк В.Я., Краснолуцкий С.Л., Насибулин А.Г., Кауппинен Е.И.* О методах измерения коэффициента диффузии и размеров частиц в разреженном газе // Доклады Академии наук. 2002. Т. 386. № 5. С. 624–628.

Статья поступила 11.10. 2018 г.

Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V., Lyubimov D.N. SIMULATION MODELING OF THE TRANSPORT COEFFICIENTS FOR RAREFIED GASES AND GAS NANOSUSPENSIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 105–117

DOI 10.17223/19988621/59/11

Keywords: transport processes, diffusion, rarefied gas, stochastic simulation, gas nanosuspensions, nanofluids, molecular modeling.

Simulation of transport coefficients is very important from a practical point of view. The only method for simulation of the transport coefficients of dense gases and liquids is the molecular dynamics method. However, this method is not applicable for a rarefied gas due to the need to use a great number of molecules. This paper proposes an alternative simulation method of the molecular modeling of rarefied gas transport coefficients. In this approach, the phase trajectories of considered systems are simulated stochastically. The actual values of the transport coefficients are obtained using the corresponding Green – Kubo relations by averaging over a large number of phase trajectories. To test the developed algorithm, a set of problems was solved. The binary diffusion coefficients for noble gases (Kr–Ar, Xe–Ar, Xe–Kr), the viscosity coefficients for monatomic and polyatomic gases (Ar, Kr, Ne, Xe, CH_4, CO, CO_2, O_2), and the diffusion coefficient for nanoparticles in rarefied gases were simulated and analyzed. It was shown that the algorithm accuracy of the order of 1–2% could be achieved when using a relatively small number of molecules. The dependence of the accuracy on the number of molecules, statistics (the number of phase trajectories), and calculation time were analyzed.

Financial support. This work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (17-01-00040 and 17-58-45023).

RUDYAK Valeriy Yakovlevich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: valery.rudyak@mail.ru

LEZHNEV Evgeniy Vasil'evich (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: lionlev@yandex.ru

LYUBIMOV Danil Nikolaevich (Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: d_lyubimov@mail.ru

REFERENCES

1. Rudyak V.Ya., Minakov A.V. (2016) *Sovremennye problemy mikro- i nanoflyuidiki* [Modern problems of micro- and nanofluidics]. Novosibirsk: Nauka.
2. Norman G.E., Stegailov V.V. (2001) The stochastic properties of a molecular-dynamical lennard-jones system in equilibrium and nonequilibrium states. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 92(5). pp. 879–886. DOI: 10.1134/1.1378182.
3. Norman G.E., Stegailov V.V. (2002) Stochastic and dynamic properties of molecular dynamics systems: simple liquids, plasma and electrolytes, polymers. *Computer Physics Communications*. 147. pp. 678–683. DOI: 10.1016/S0010-4655(02)00376-4.
4. Rudyak V.Ya. (2005) *Statisticheskaya aerogidromekhanika gomogennykh i geterogennykh sred. Gidromekhanika* [Statistical aerohydrodynamics of homogeneous and heterogeneous media. Hydrodynamics]. Vol. 1. Novosibirsk: NGASU.
5. Norman G.E., Stegailov V.V. (2013) Stochastic theory of the classical molecular dynamics method. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 5(4). pp. 305–333. DOI: 10.1134/S2070048213040108.
6. Rudyak V.Ya., Ivanov D.A. (2003) Komp'yuternoe modelirovanie dinamiki konechnogo chisla vzaimodeystvuyushchikh chastits [Computer modeling of the dynamics of a finite number of interacting particles]. *Doklady Akademii Nauk Visshey Shkoly – Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*. 1. pp. 30–38.
7. Rudyak V.Ya., Ivanov D.A. (2004) Dinamicheskie i stokhasticheskie svoystva otkrytoy sistemy konechnogo chisla uprugo vzaimodeystvuyushchikh chastits [Dynamical and stochastic properties of the open system of a finite number of interacting particles]. *Trudy NGASU*. 7(3). pp. 47–58.
8. Heerman D.W. (1986) *Computer Simulations Methods in Theoretical Physics*. Springer.
9. Brilliantov N.V., Revokatov O.P. (1996) *Molekulyarnaya dinamika neuporyadochennykh sred* [Molecular dynamics of disordered media]. Moscow: MGU.
10. Rapaport D.C. (2005) *The Art of Molecular Dynamics Simulation*. Cambridge: Cambridge University Press.
11. Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. (2016) Stochastic method for modeling of the rarefied gas transport coefficients. *Journal of Physics: Conference Series*. 738. p. 012086. DOI: 10.1088/1742-6596/738/1/012086.
12. Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. (2017) Stokhasticheskiy metod modelirovaniya koeffitsientov perenosa razrezhennogo gaza [Stochastic simulation of rarefied gas transport coefficients]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 29(3). pp. 113–122.
13. Rudyak V.Ya., Lezhnev E.V. (2018) Stochastic algorithm for simulating gas transport coefficients. *Journal of Computational Physics*. 355. pp. 95–103. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.11.001.
14. Rudyak V.Ya., Krasnolutskiy S.L. (2001) Kinetic description of nanoparticle diffusion in rarefied gas. *Doklady Physics*. 46(12). pp. 897–899. DOI: 10.1134/1.1433539.
15. Rudyak V.Ya., Krasnolutsky S.L. (2002) Diffusion of nanoparticles in a rarefied gas. *Technical Physics*. 47(7). pp. 807–813. DOI: 10.1134/1.1495039.
16. Zubarev D. (1974) *Nonequilibrium Statistical Thermodynamics*. New York: Consultants Bureau.
17. Kubo R., Yokota M., Nakajima S. (1957) Statistical-mechanical theory of irreversible processes. II. Reaction on thermal disturbances. *Journal of the Physical Society of Japan*. 12(11). pp. 1203–1211. DOI: 10.1143/JPSJ.12.1203.
18. Green H.S. (1961) Theories of Transport in Fluids. *Journal of Mathematical Physics*. 2(3). pp. 344–348. DOI: 10.1063/1.1703720.
19. Krishna R., Wesselingh J.A. (1997) The Maxwell-Stefan approach to mass transfer. *Chemical Engineering Science*. 52(6). pp. 861–911. DOI: 10.1016/S0009-2509(96)00458-7.
20. Rudyak V.Ya., Belkin A.A., Ivanov D.A., Egorov V.V. (2008) The simulation of transport processes using the method of molecular dynamics. Self-diffusion coefficient. *High Temperature*. 46(1). pp. 30–39. DOI: 10.1134/s10740-008-1006-1.

21. Van Heijningen R.J.J., Harpe J.P., Beenakker J.J.M. (1968) Determination of the diffusion coefficients of binary mixtures of the noble gases as a function of temperature and concentration. *Physica*. 38(1). pp. 1–34. DOI: 10.1016/0031-8914(68)90059-1.
22. Hirschfelder J.O., Curtiss Ch.F., Bird. R.B. (1954) *Molecular Theory of Gases and Liquids*. New York: John Wiley and Sons Inc.
23. Ferziger J.H., Kaper H.G. (1972) *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*. Amsterdam-London: North-Holland Publishing Company.
24. Vallander S.V., Nagnibeda E.A., Rydalevskaya M.A. (1977) *Nekotorye voprosy kineticheskoy teorii khimicheski reagiruyushchey smesi gazov* [Some questions of the kinetic theory of chemical reacting gas mixure]. Leningrad: LGU.
25. Zhdanov V.M., Alievskiy M.Ya. (1989) *Protsessy perenosa i relaksatsii v molekulyarnykh gazakh* [Transport processes and relaxation in molecular gases]. Moscow: Nauka.
26. Grigor'ev I.S., Meylikhova E.Z. (1991) *Fizicheskie velichiny. Spravochnik* [Physical values. Handbook]. Moscow: Energoatomizdat.
27. Rudyak V.Ya., Krasnolutskii S.L., Nasibulin A.G., Kauppinen E.I. (2002) Methods of measuring the diffusion coefficient and sizes of nanoparticles in a rarefied gas. *Doklady Physics*. 47(10). pp. 758–761. DOI: 10.1134/1.1519325.

Received: October 11, 2018

УДК 533.6
DOI 10.17223/19988621/59/12

Н.П. Скибина, Н.В. Савкина, В.В. Фарапонов, Е.А. Маслов

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА В ИМПУЛЬСНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТАНОВКЕ И ПРОВЕРКА СОГЛАСОВАННОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Представлено комплексное экспериментально-теоретическое исследование высокоскоростного обтекания тела, закрепленного в рабочей части импульсной аэродинамической установки. Подробно описаны этапы решения задачи сверхзвукового обтекания модели при скоростях набегающего потока Маха M = 2–6. Движение рабочего газа описано осредненными уравнениями Навье – Стокса в декартовой системе координат. Для моделирования турбулентности использована модель сдвиговых напряжений Ментера. Сравнение кадров визуализации, полученных в ходе экспериментов, с полями распределения газодинамических величин показало качественное согласование результатов математического и физического моделирования. Также приведено количественное сравнение расчетных и экспериментальных значений скоростей потока в числах Маха и значений коэффициентов силы лобового сопротивления.

Ключевые слова: *математическое моделирование, газодинамика, аэродинамическая установка, сверхзвуковые течения.*

Подготовка и проведение измерений в высокоскоростных потоках – трудоемкий процесс. Измерительные устройства могут оказывать нежелательное влияние на характер течения, приводить к возникновению высоких градиентов давлений и искажениям картины обтекания. При этом часто возникает необходимость в получении информации о параметрах потока там, где размещение регистрирующего прибора затруднительно или невозможно – например, в узких каналах, вблизи срывов потока или в зонах развитой турбулентности. Также для получения качественных результатов необходимо проведение серии экспериментов и соответствующей статистической обработки, что приводит к значительным временным, финансовым и энергетическим затратам.

Преимущество численного расчета заключается в том, что его результатом является поле распределения интересующих газодинамических величин (p, ρ, T) и параметров потока (V, M, Re), есть возможность отследить развитие процесса в динамике и получить необходимые данные для любой точки или области. Критерием точности и основным источником входных данных (например, граничных и начальных условий) является эксперимент. Комплексное использование экспериментальных и теоретических подходов к решению позволяет получить более глубокое представление и детальное описание исследуемого процесса.

В рамках проведенной работы осуществлялось численное решение задачи сверхзвукового обтекания тела, закрепленного в рабочей части аэродинамической установки [1]. Здесь важно отметить, что в процессе физического моделирования с использованием аэродинамических установок теория подобия гарантирует создание течения с сохранением эффектов вязкости и сжимаемости, но температурные параметры кардинально отличаются от тех, которые наблюдаются при проведении натурных испытаний в нормальных атмосферных условиях.

Для регистрации термо- и газодинамических параметров в потоке, сохраняющем неизменные характеристики в течение 1.5 с, необходимо использование приборов с соответствующей инерционностью, тарировка и правильное их размещение. В данном случае обращение к математическому моделированию, основанному на уже полученных экспериментальных данных, позволяет определить параметры потока на выходе из сопла, в рабочей части или же вблизи обтекаемого тела.

На базе физико-технического факультета Томского государственного университета функционирует импульсная аэродинамическая установка, которая используется для проведения аэродинамических и аэрофизических исследований при сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростях. Создаваемый поток обладает хорошими метрологическими характеристиками, а цикл работы установки составляет 2.5–3 с.

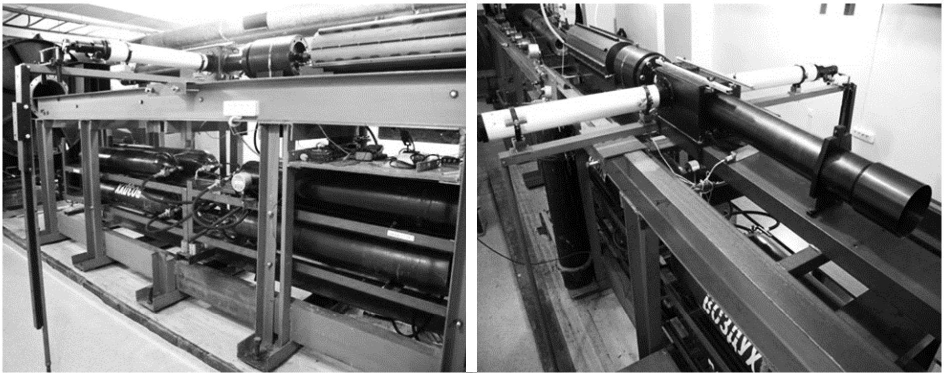


Рис. 1. Внешний вид импульсной аэродинамической установки
Fig. 1. Design of the pulsed aerodynamic facility

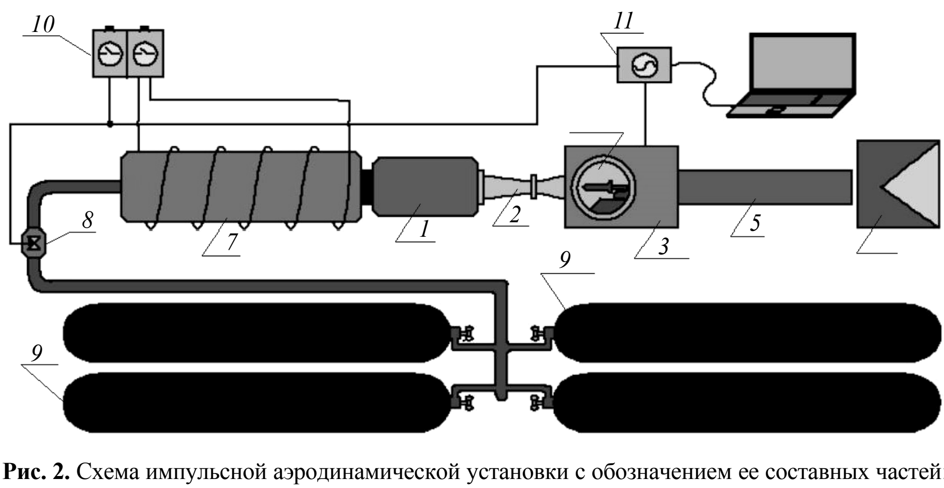


Рис. 2. Схема импульсной аэродинамической установки с обозначением ее составных частей: *1* – форкамера; *2* – сопло; *3* – рабочая часть; *4* – модель; *5* – диффузор; *6* – рассекатель; *7* – нагреватель; *8* – электромагнитный клапан; *9* – баллоны с воздухом; *10* – питание; *11* – АЦП
Fig. 2. Schematic diagram of the pulsed aerodynamic facility and its components: *1*, prechamber; *2*, nozzle; *3*, test section; *4*, model; *5*, diffuser; *6*, divider; *7*, heater; *8*, solenoid valve; *9*, air tanks; *10*, power supply; and *11*, ADC

Внешний вид аэродинамической установки представлен на рис. 1, ниже, на рис. 2 приведена ее схема с обозначением основных функциональных частей. Основными достоинствами данной установки являются: простая конструкция, широкий диапазон режимов работы, низкие расходы электроэнергии и сжатого газа.

На первом этапе решения задачи была построена CAD-модель, полностью дублирующая внутреннюю геометрию основных частей импульсной аэродинамической установки, которым соответствуют номера 1 – 5 на схеме.

На рис. 3 приведена внутренняя геометрия форкамеры с указанием размеров. В форкамере осуществляется стабилизация давления в потоке рабочего газа, который затем поступает в сопло, где сначала разгоняется до заданной скорости, а на выравнивающем участке течение становится параллельным оси сопла.

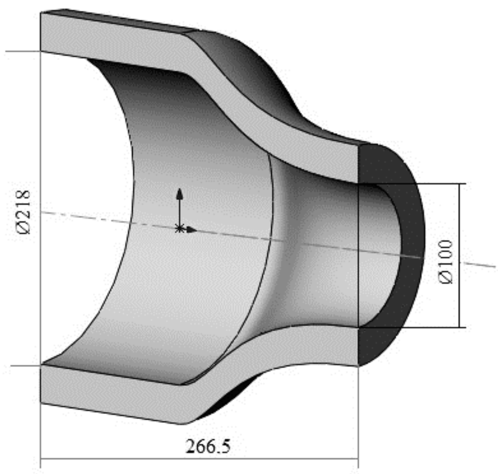


Рис. 3. Внутренняя геометрия форкамеры с указанием размеров (мм)
Fig. 3. Internal geometry of prechamber with indicated sizes (mm)

На рис. 4 приведен общий вид осесимметричных сопел, которые используются для создания сверхзвукового потока необходимой скорости. В [1] приведены основные геометрические размеры для каждого сопла установки – полная длина, диаметр критического сечения и длина сверхзвукового участка. Диаметры входного и выходного сечений для всех сопел имеют одинаковое значение D = 100 мм.

Далее сопло стыкуется с рабочей частью установки – прямоугольной камерой с внутренними размерами 360×226×200 мм, которая служит для размещения испытуемых моделей и измерительного оборудования. Стенки рабочей камеры выполнены из стали толщиной 10 мм, а верхняя крышка сделана съемной для обеспечения доступа внутрь. Передняя и задняя стенки рабочей части перпендикулярны к оси потока и диффузора. В боковых стенках имеются оптические окна с диаметром поля зрения 100 мм для визуализации течения внутри рабочей части. Модель удерживается в потоке при помощи державок, которые прикрепляются к пазам в основании рабочей части.

Математическое моделирование обтекания тела в рабочей части импульсной аэродинамической установки с учетом протекающих газодинамических процессов представляет объемную задачу. В настоящий момент моделирование реализовано для двухмерного осесимметричного случая.

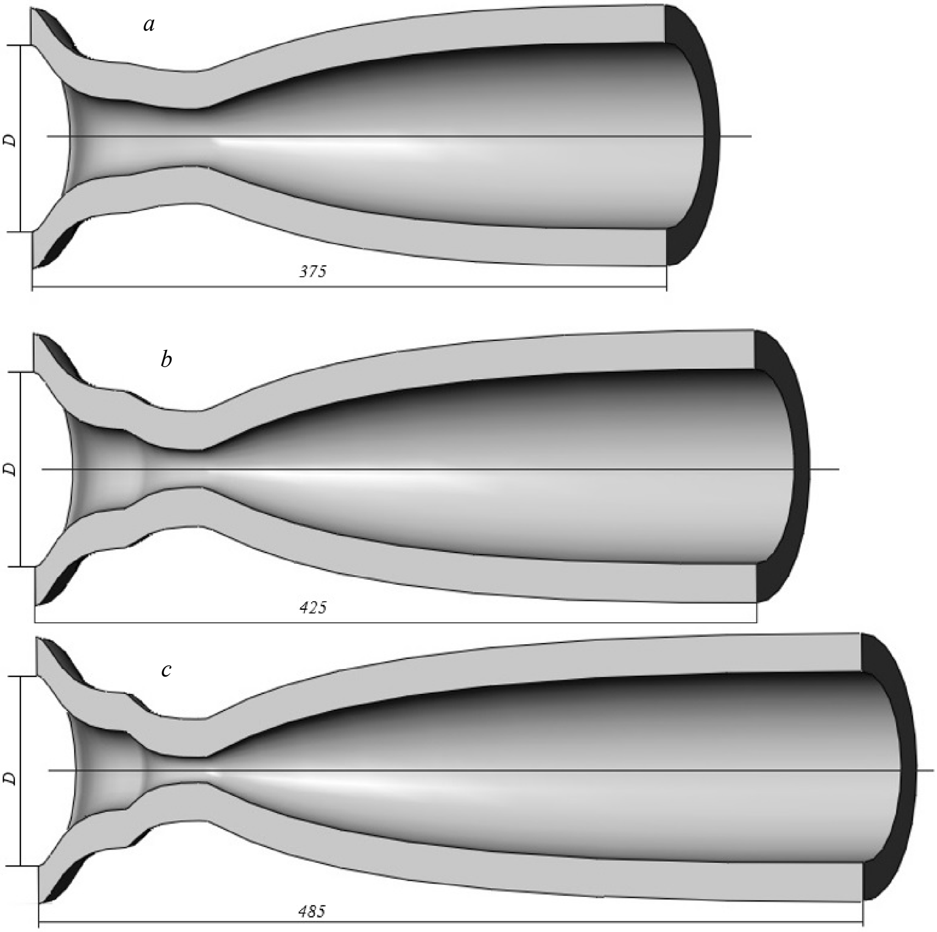


Рис. 4. Сопла аэродинамической установки: *a* – М = 4, *b* – М = 5, *c* – М = 6
Fig. 4. Aerodynamic nozzles: M = (*a*) 4, (*b*) 5, and (*c*) 6

Контроль точности и адекватности получаемых результатов осуществлялся путем сравнения с имеющимися экспериментальными данными – значения статического давления в форкамере и на поверхности модели [2], по величине коэффициента силы лобового сопротивления [3] и числу Маха. Качественная составляющая основана на сопоставлении полей распределения газодинамических параметров с кадрами съемки процесса высокоскоростной видеокамерой.

Математическое моделирование высокоскоростного обтекания проводилось для модели в форме конуса с углом полураствора 15°. На рис. 5, *a* приведен общий вид модели, на рис. 5, *b* – модель, закрепленная на державке в рабочей части. Выбор геометрии обусловлен тем, что ранее для данной модели проводились серии экспериментов с использованием импульсной аэродинамической установки [2, 3]. В ходе весовых испытаний осуществлялось измерение коэффициента силы лобового сопротивления, в дренажных испытаниях – величины статического давления в точках на поверхности тела, приведенных на рис. 6.

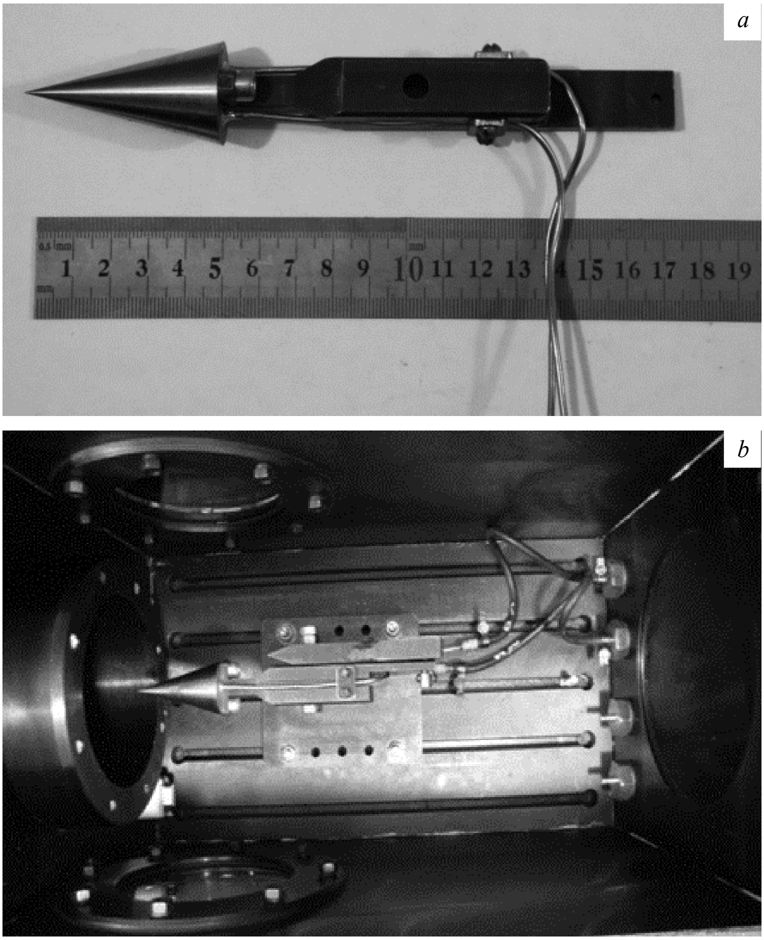


Рис. 5. Общий вид модели в виде конуса (*a*);
модель, закрепленная в рабочей части установки (*b*)
Fig. 5. Configuration of the cone model (*a*)
and the model fixed in the test section of facility (*b*)

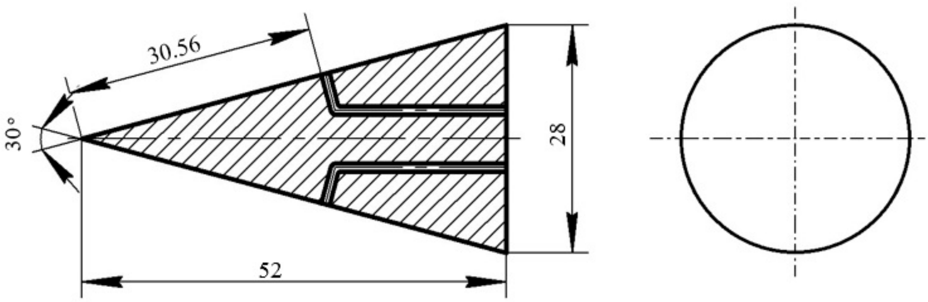


Рис. 6. Геометрия модели в форме конуса
Fig. 6. Geometry of the cone model

Так как каждое сопло установки имеет свои геометрические размеры, было построено соответствующее число расчетных областей, отличающихся только профилем и длиной сопла – размеры фокамеры, рабочей части и модели не изменялись. Типичный вид расчетной области для решения задачи приведен на рис. 7 – представлено сопло M = 2.

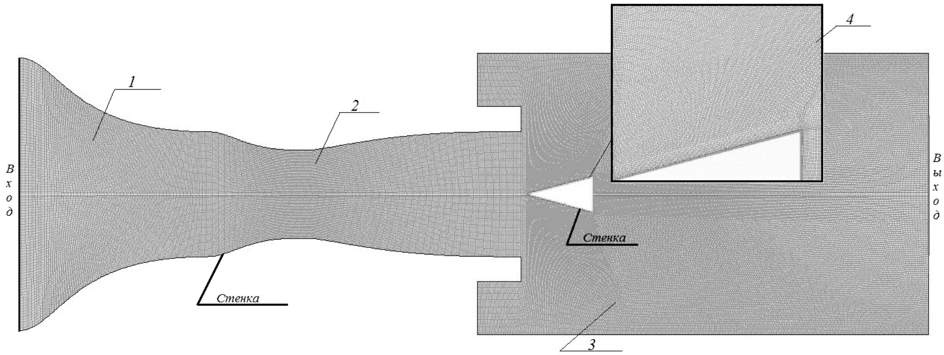


Рис. 7. Типичная геометрия и сеточная модель с указанием границ расчетной области для решения задачи: *1* – форкамера, *2* – сопло (M = 2), *3* – рабочая часть, *4* – модель
Fig. 7. Typical geometry and grid model with indicated boundaries of the computational domain for problem solving: *1*, prechamber; *2*, nozzle (M = 2); *3*, test section; and *4*, model

На следующем этапе создается сеточная модель путем разбиения рабочей области на расчетные элементы. Конечно-разностные элементы имеют форму четырехугольников, сетка структурирована, сгущается по мере приближения к областям, где необходимо подробное разрешение течения [4]. По результатам проверки сеточной сходимости выбрано оптимальное число расчетных элементов, которое изменяется пропорционально размерам расчетной области (от 290 000 для задачи с соплом M = 2 до 2 400 000 для расчета сопла M = 6). Для решения задачи использован конечно-разностный метод, заложенный в вычислительном комплексе ANSYS Fluent.

Математическая постановка задачи представляет собой систему осредненных по Рейнольдсу двумерных нестационарных уравнений Навье – Стокса в декартовых координатах [5]. Для замыкания системы осредненных уравнений Навье – Стокса использовалась SST-модель турбулентности [6, 7].

Для задания граничного условия [8] на входе (рис.7) используются следующие экспериментальные данные:

1. Статическое давление в форкамере.
2. Полное давление в форкамере.
3. Полная температура в форкамере.
4. Направление вектора скорости потока.

На выходе реализуются мягкие граничные условия [5], для стенок установки и поверхности тела использовано условие прилипания [7].

Для расчета использован решатель по плотности, хорошо зарекомендовавший себя для решения задач с высокими скоростями и распространением ударных волн. Схема конвективного потока – Roe-FDS (схема разностного расщепления). Численный метод решения – явный, первого и второго порядка точности против потока.

Результатом решения системы осредненных уравнений Навье – Стокса являются поля распределения газодинамических параметров – давления, плотности, скорости, температуры и т.д. Так как задача решалась в нестационарной постановке, можно отследить процесс движения рабочего газа внутри установки, то есть весь цикл работы в динамике. На рис. 8, *a* и 8, *b* в качестве примера представлены результаты численного решения типичной задачи обтекания тела в рабочей части установки – поля распределения скоростей потока в числах Маха для сопел M = 4 и M = 5 соответственно.

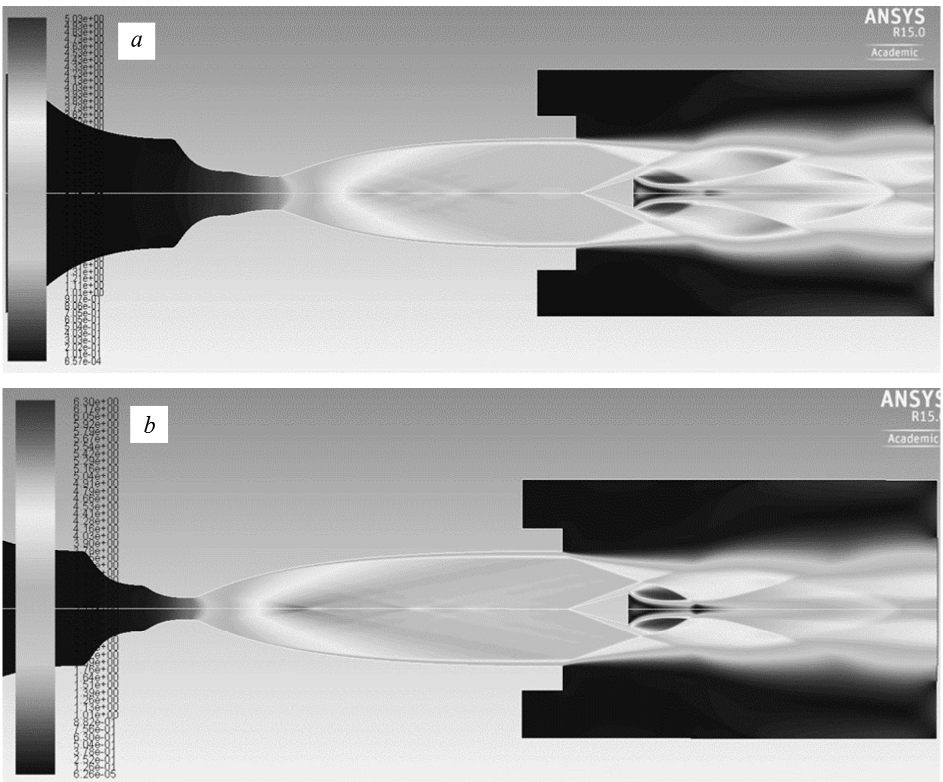
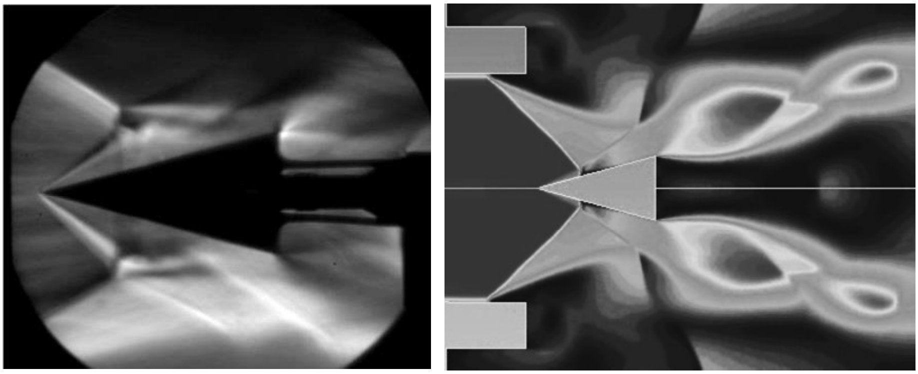


Рис. 8. Поле распределения скоростей в числах Маха: *a* – M = 4, *b* – M = 5
Fig. 8. Velocity field distribution in terms of the Mach numbers: M = (*a*) 4 and (*b*) 5

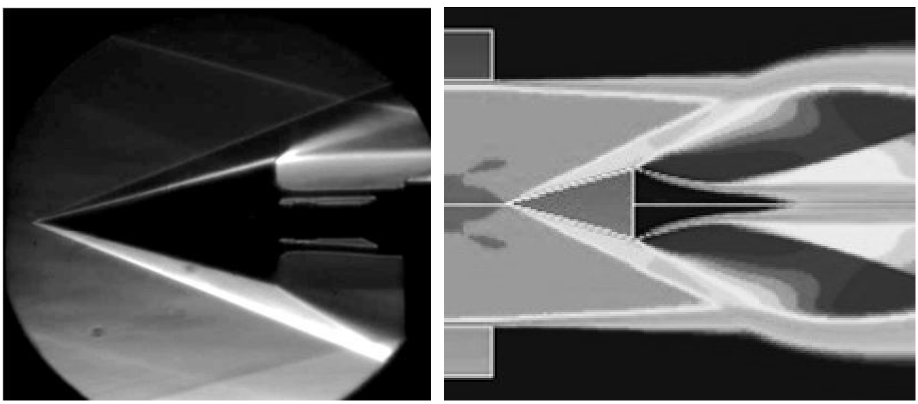
Видно, что единственное различие расчетных областей – геометрические размеры сопел, а именно их длина и диаметр критического сечения. С ростом скорости набегающего потока уменьшается угол между ударной волной и поверхностью тела, что полностью соответствует физике исследуемого процесса и демонстрирует качественное согласование численного расчета.

На рис. 9 приведено сравнение кадров визуализации эксперимента с расчетными полями распределения в соответствующие моменты времени [2].

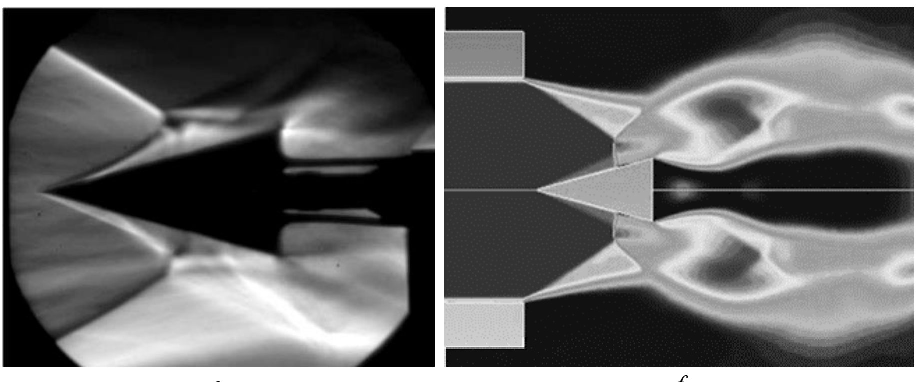
Рис. 9, *a* и 9, *b* соответствуют началу цикла работы установки – видно, как равномерный поток, выходящий из сопла, встречается с моделью и начинается формирование ударной волны, при этом процессы вблизи тела неустановившиеся. На рис. 9, *c* и 9, *d* представлена зона стационарного течения – ромб Маха, в котором все параметры потока имеют постоянные значения. Рис. 9, *e* и 9, *f* – окончание работы установки: прекращается подача воздуха, понижается давление, и ударная волна сходит с тела, а зона стационарного течения смещается в сторону сопла.



a *b*



c *d*



e *f*

Рис. 9. Сравнение кадров визуализации обтекания конуса с результатами расчета (M = 3)

Fig. 9. Comparison between visualization of the flow around the cone and calculated results (M = 3)

Помимо качественного сравнения результатов численного расчета и эксперимента осуществлялся анализ количественных характеристик: величины статического давления в фиксированной точке на поверхности тела, числа Маха в рабочей части и значения аэродинамического коэффициента силы лобового сопротивления.

Результаты численного расчета статического давления на поверхности тела в зависимости от скорости набегающего потока количественно и качественно согласуются с результатами физического моделирования с использованием аэродинамической установки [2].

Сравнение вычисленных значений коэффициента силы лобового сопротивления со значениями, полученными экспериментально, приведено на рис.10.

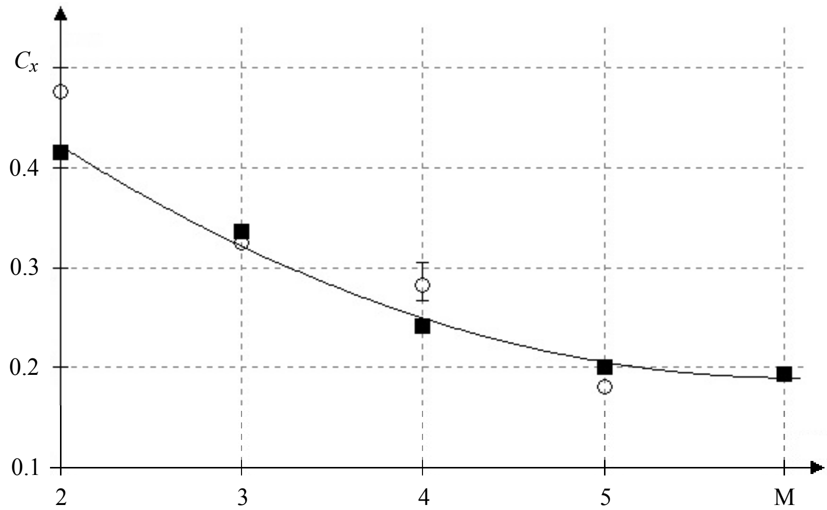


Рис. 10. Значения коэффициента силы лобового сопротивления C_x полученные в ходе численного расчета – ■, в ходе эксперимента [3] – ○
Fig. 10. The values of drag force coefficient C_x obtained numerically – ■ and experimentally in [3] – ○

Видно, что изменение вычисленной величины коэффициента силы лобового сопротивления согласуется с результатами экспериментов, также наблюдается уменьшение значения C_x с ростом скорости набегающего потока с дальнейшим выходом на стационарное значение – между значениями для M = 5 и M = 6 разница составляет менее 0.01.

В таблице приведены расчетные и экспериментальные значения чисел Маха, относительное рассогласование, составившее в среднем 2–3 %.

Сравнение расчетных и экспериментальных значений чисел Маха

Номинальное число Маха, M	Вычисленное значение числа Маха, M	Экспериментальное значение числа Маха, M	Относительное рассогласование, %
2	2.15	2.09	2.87
3	2.96	2.91	1.72
4	3.91	4.03	3.19
5	4.94	5.02	1.59
6	5.87	5.90	0.85

Выход из итерационного процесса осуществлялся при выполнении двух условий: получение стационарного значения коэффициента C_x на каждом следующем шаге по времени и достижение функционалом невязок величины порядка 10^{-4}.

В ходе исследования разработан комплексный подход для решения задач обтекания тел высокоскоростным потоком в импульсной аэродинамической установке, позволяющий получать информацию о распределении термогазодинамических параметров потока по всему рассматриваемому объему, рассчитывать значения аэродинамических коэффициентов и моделировать обтекание тел разной формы и сложности. Наличие отлаженной математической реализации в сочетании с экспериментальной базой дает возможность изучения газодинамических процессов, возникающих при движении на больших скоростях в условиях отличных от нормальных атмосферных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Звегинцев В.И.* Газодинамические установки кратковременного действия. Часть I. Установки для научных исследований. Новосибирск: Параллель, 2014. 551 с.
2. *Фарапонов В.В.*, *Маслов Е.А.*, *Чупашев А.В.*, *Мацкевич В.В.*, *Чижов С.Ю.* Экспериментальное исследование обтекания тел плоской и осесимметричной формы // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (ФППСМ-2016): сб. трудов IX Всероссийской научной конференции, г. Томск, 21–25 сентября 2016 г. Томск: Томский государственный университет, 2016. С. 144–145. ISBN 978-5-94621-334-9.
3. *Maslov E.A., Faraponov V.V., Zolotorev N.N., Chupashev A.A., Matskevich V.V., Chizhov S.Yu.* An experimental study of flow over flat and axisymmetric bodies // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences. 2017. 92, 01056. DOI: 10.1051/matecconf/20179201056.
4. *Скибина Н.П.*, *Савкина Н.В.*, *Фарапонов В.В.* Математическое моделирование газодинамических процессов в импульсной аэродинамической установке и численный расчет некоторых параметров обтекания тела, закрепленного в рабочей части // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (ФППСМ-2018): сб. трудов X Всероссийской научной конференции, г. Томск, 03–05 сентября 2018 г. Томск: Томский государственный университет, 2018. С. 83–85.
5. *Скибина Н.П.*, *Савкина Н.В. Фарапонов В.В.* Численное моделирование обтекания цилиндрического тела сверхзвуковым потоком // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (ФППСМ-2016): сб. трудов IX Всероссийской научной конференции, г. Томск, 21–25 сентября 2016 г. Томск: Томский государственный университет, 2016. С. 151–153.
6. *Снегирёв А.Ю.* Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 143 с.
7. *Исаев С.А.*, *Баранов П.А.*, *Судаков А.Г.*, *Усачов А.Е.* Расширение диапазона критических чисел Маха при управлении трансзвуковым обтеканием толстого (20 %) профиля MQ со щелевым отсосом в круговой вихревой ячейке // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. Вып. 10. С. 22–29.
8. *Зиганшин А.М.* Вычислительная гидродинамика. Постановка и решение задач в процессоре Fluent: Методическое пособие для учебной и научной работы студентов направления 270800 – «Строительство» (квалификация «бакалавр» и «магистр») и аспирантов специальности 05.23.03. Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит.ун-та, 2013. 79 с.

Статья поступила 19.04.2019 г.

Skibina N.P., Savkina N.V., Faraponov V.V., Maslov E.A. AN INTEGRATED APPROACH TO SOLVING THE PROBLEM OF HIGH-SPEED FLOW AROUND A BODY IN A PULSED AERODYNAMIC FACILITY, AND VALIDATION OF THE OBTAINED RESULTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 118–129

DOI 10.17223/19988621/59/12

Keywords: mathematical modeling, gas dynamics, aerodynamic facility, supersonic flows.

In this paper, an integrated solution to the problem of the supersonic flow of working gas around a body fixed in the test section of the pulsed aerodynamic facility is presented. The use of both experimental and theoretical approaches yields more complete and detailed description of the studied process.

The physical and mathematical modeling of the cone-shaped model with a semi-vertex angle of 15 degrees was carried out.

In the experiments, the static pressure values at two points on the body surface, the aerodynamic drag force coefficient, and the Mach number in the oncoming flow were obtained. A high-speed video camera was used to visualize the flow patterns. Mathematical description of the process was based on the system of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. The SST model was used to simulate the turbulence. The stated problem was solved by the finite element method.

According to the data of the work, a good qualitative agreement between numerical calculations and experimental results was obtained when comparing visualization of the flow patterns with distribution of the gas-dynamic characteristics. A quantitative comparison of the calculated and experimentally obtained values of the flow velocities in terms of the Mach numbers and the values of aerodynamic drag coefficient yields a discrepancy of 3% and 7%, respectively. The reliable mathematical realization in combination with experimental base makes it possible to study the gas-dynamic processes that occur at high-speed flows in conditions that are different from normal atmospheric conditions.

SKIBINA Nadezhda Petrovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: uss.skibina@gmail.com

SAVKINA Nadezhda Valer'evna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: savkina@ftf.tsu.ru

FARAPONOV Valeriy Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: fff@ftf.tsu.ru

MASLOV Evgeniy Anatol'evich (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: maslov_eugene@mail.ru

REFERENCES

1. Zvegintsev V.I. (2014) *Gazodinamicheskie ustanovki kratkovremennogo deystviya. Chast' I. Ustanovki dlya nauchnykh issledovaniy* [Short-duration gas-dymanic facilities. Part 1. Facilities for scientific research]. Novosibirsk: Parallel'.
2. Faraponov V.V., Maslov E.A., Chupashev A.V., Matskevich V.V., Chizhov S.Yu. (2016) Eksperimental'noe issledovanie obtekaniya tel ploskoy i osesimmetrichnoy formy [Experimental study of the flow around planar and axisymmetric bodies]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki: Sbornik trudov IX Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii – Fundamental and applied problems of the modern mechanics: the collected papers of the IX all-Russian scientific conference.* Tomsk: Tomsk State University. pp. 144–145.
3. Maslov E.A., Faraponov V.V., Zolotorev N.N., Chupashev A.A., Matskevich V.V., Chizhov S.Yu. (2017) An experimental study of flow over flat and axisymmetric bodies. *MATEC Web of Conferences.* 92 (01056). pp. 1–6. DOI: 10.1051/matecconf/20179201056.

4. Skibina N.P., Savkina N.V., Faraponov V.V. (2018) Matematicheskoe modelirovanie gazodinamicheskikh protsessov v impul'snoy aerodinamicheskoy ustanovke i chislennyy raschet nekotorykh parametrov obtekaniya tela, zakreplennogo v rabochey chasti [Mathematical modeling of gas-dynamic processes in a pulsed aerodynamic facility and numerical calculation of some parameters of the flow around the body fixed in the working part]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki: Sbornik trudov X vserossiyskoy nauchnoy konferentsii – Fundamental and applied problems of the modern mechanics: the collected papers of the X all-Russian scientific conference*. Tomsk: Tomsk State University. pp. 83–85.
5. Skibina N.P., Savkina N.V. Faraponov V.V. (2016) Chislennoe modelirovanie obtekaniya tsilindricheskogo tela sverkhzvukovym potokom [Numerical simulation of the supersonic flow around a cylindrical body]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki: Sbornik trudov IX vserossiyskoy nauchnoy konferentsii – Fundamental and applied problems of the modern mechanics: the collected papers of the IX all-Russian scientific conference*. Tomsk: Tomsk State University. pp. 151–153.
6. Snegirev A.Yu. (2009) *Vysokoproizvoditel'nye vychisleniya v tekhnicheskoy fizike. Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techeniy* [High-performance computing in technical physics. Numerical modeling of turbulent flows]. Saint-Petersburg: Polytechnic University Publ.
7. Isaev S.A., Baranov P.A., Sudakov A.G., Usachov A.E. (2014) Expansion of the range of critical Mach numbers during control of transonic flow past a thick (20% chord) MQ airfoil with slot suction in a circular vortex flow. *Technical Physics Letters*. 40(5). pp. 417–420. DOI: 10.1134/S1063785014050174.
8. Ziganshin A.M. (2013) *Vychislitel'naya gidrodinamika. Postanovka i reshenie zadach v protsessore Fluent* [Computational fluid dynamics. Formulation and solving of the problems in the Fluent processor]. Kazan: Kazan State University of Architecture and Engineering Publ.

Received: April 19, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АГАФОНЦЕВ Михаил Владимирович – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kim75mva@gmail.com
АЛБАГАЧИЕВ Али Юсупович – доктор технических наук, профессор, заведующий отделом ИМАШ РАН, г. Балашиха, Россия. E-mail: Albagachiev@Yandex.ru
АСАНБЕКОВ Урмат Кубатович– студент механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: urmat_1396@mail.ru
БОГОСЛОВСКИЙ Андрей Владимирович – кандидат химических наук, старший научный сотрудник ИХН СО РАН, г.Томск, Россия. E-mail: bav@ipc.tsc.ru
БОШЕНЯТОВ Борис Владимирович – доктор технических наук, главный научный сотрудник Института прикладной механики Российской академии наук, г. Москва, Россия. E-mail: bosbosh@mail.ru
ВОЛКОВ Юрий Степанович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: volkov@math.nsc.ru
ГАЛКИН Владислав Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент Томского политехнического университета, г.Томск, Россия. E-mail: vlg@tpu.ru
ГОЛОВЕШКИН Василий Адамович – доктор технических наук, профессор Российского технологического университета МИРЭА, ведущий научный сотрудник Института прикладной механики РАН, Москва, Россия. E-mail: nikshevolog@ya.ru
ЖИЛЬЦОВ Константин Николаевич – инженер-исследователь научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г.Томск, Россия. E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru
ЗОНОВ Матвей Никитович – студент механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: mnzonov@gmail.com
КАРПОВ Вячеслав Николаевич – начальник Отдела эксплуатации полигонной базы; Оренбургский филиал ФГБУ ВНИИПО МЧС России, г. Оренбург, Россия. E-mail: v75karpov@mail.ru
КАСЫМОВ Денис Петрович – кандидат физико-математических наук, заведующий учебной лабораторией Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: denkasymov@gmail.com
КОПЫЛОВ Николай Петрович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУ ВНИИПО МЧС России, г. Балашиха, Россия. E-mail: np.nanpb@mail.ru.
КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru
КУЗНЕЦОВ Александр Евгеньевич – кандидат технических наук, начальник Отдела специальных исследований, ФГБУ ВНИИПО МЧС России, г. Балашиха, Россия. E-mail: ae.kuznetsov@yandex.ru
ЛЕЖНЕВ Евгений Васильевич – кандидат технических наук, доцент, Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета, Новосибирск, Россия. E-mail: lionlev@yandex.ru
ЛОБАНОВ Павел Дмитриевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: lobanov@itp.nsc.ru
ЛЮБИМОВ Даниил Николаевич – студент Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета, г. Новосибирск, Россия. E-mail: d_lyubimov@mail.ru

МАЛЮТИНА Александра Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: nmd@math.tsu.ru

МАРТЫНОВ Павел – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: martypavel@bk.ru

МАСЛОВ Евгений Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и промышленной теплотехники ЭНИН НИ ТПУ, г. Томск, Россия. E-mail: maslov_eugene@mail.ru

ПАХОМОВ Максим Александрович – доктор физико-математических наук, профессор РАН, ведущий научный сотрудник Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, г. Новосибирск, Россия. E-mail: pakhomov@ngs.ru

ПЕРМИНОВ Владислав Валерьевич – аспирант биологического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ya.vladperminov2013@yandex.ru

ПОРЯЗОВ Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: poryazov@mail.ru

РЕЙНО Владимир Владимирович – старший научный сотрудник Института оптики атмосферы имени В.Е. Зуева СО РАН, г. Томск, Россия. E-mail: denkasymov@gmail.com

РУДЯК Валерий Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета, профессор Новосибирского государственного университета, г. Новосибирск, Россия. E-mail: valery.rudyak@mail.ru

САВКИНА Надежда Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры динамики полета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: savkina@ftf.tsu.ru

СКИБИНА Надежда Петровна – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: uss.skibina@gmail.com

СУШКИНА Елена Юрьевна – кандидат технических наук, начальник Отдела ученого секретаря – ученый секретарь ФГБУ ВНИИПО МЧС России, г. Балашиха, Россия. E-mail: sushkina@bk.ru

ТИМОШЕНКО Егор Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

ТУРСУНОВ Дилмурат Абдиллажанович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики Ошского государственного университета (Кыргызстан). E mail: tdaosh@gmail.com

ФАРАПОНОВ Валерий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры динамики полета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: fff@ftf.tsu.ru

ФЕДОТКИН Дмитрий Вячеславович – кандидат технических наук, заместитель начальника Отдела специальных исследований ФГБУ ВНИИПО МЧС России, г. Балашиха, Россия. E-mail: fdv982@mail.ru

ХАСАНОВ Ирек Равильевич – доктор технических наук, главный научный сотрудник ФГБУ ВНИИПО МЧС России, г. Балашиха, Россия. E-mail: irhas@rambler.ru

ХОЛИН Николай Николаевич – доктор технических наук, профессор Российского технологического университета МИРЭА, г. Москва, Россия. E-mail: mostu@bk.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. +7(3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 12.06.2019. Выпуск в свет 27.06.2019.
Формат 70 × 100 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10.64. Уч.-изд. л. 11.92. Тираж 250 экз. Заказ № 15. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 3841.
http://publish.tsu.ru E-mail: rio.tsu@mail.ru