МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2019 **№ 47**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук», Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Doctor. of Sc.,
Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Departmen Tomsk State University
Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof. of the Programming Department Tomsk State University
Anatoly Nazarov– Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University
Konstantin Samouylov– Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)
Eugene Semenkin – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)
Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University
Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gurami Tsitsiashvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)
Editorial address:
Institute of Applied Mathematics and Computer Science,
unit of Applied Mathematics
National Research Tomsk State University
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050
Telephone / fax: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Нежельская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ
Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ
Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ
Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры программирования ТГУ
Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ
Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)
Семенкин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)
Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ
Фархадов Маис Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Цициашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Институт прикладной математики и компьютерных наук,
отделение прикладной математики
Телефон / факс: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.
University VII
Paris, France
Vladimir Dombrovskii
Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia
Alexander Dudin
Doctor of Sc., Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Gilbert Saporta
PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France
Raimund Ubar
Doctor of Sc., Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia
Reindert Nobel
Doctor of Sc., Associate Prof.
Vrije University of Amsterdam
Netherlands

Enco Orsingher
PhD, Prof.
University of Rome
Italy
Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Nina Yevtushenko
Doctor of Sc., Prof.
Ivannikov V.P. ISP RAS
Moscow, Russia
Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Кавалли
д-р философии, проф.
Университет VII,
Париж, Франция
Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Жильберт Сапорта
д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии,
Кюри, Париж, Франция
Раймонд Убар
д-р, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония
Рейндерт Нобель
д-р, доцент
Свободный университет,
Амстердам, Нидерланды

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет,
Италия
Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт,
Турин, Италия

Нина Евтушенко
д-р техн. наук, проф.
ИСП РАН им. Иванникова В.П.,
Москва, Россия
Ервант Зориан
д-р философии, гл. науч. сотр.
фирмы «Синопсис», США

JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031
The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.
The topics of the journal are the following:
- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:
http://journals.tsu.ru/informatics/
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке
Статьи публикуются на русском и английском языках.
Тематика публикаций журнала:
- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).
Правила оформления статей приведены на сайте:
http://journals.tsu.ru/informatics/
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Домбровский В.В., Пашинская Т.Ю.
Синтез прогнозирующих стратегий управления динамическими системами с коррелированными параметрами и мультипликативными и аддитивными шумами при ограничениях 4

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Горцев А.М., Нежельская Л.А.
Оптимальная оценка состояний обобщённого асинхронного потока событий с произвольным числом состояний 12
Dimitrov M.Tz.
Heavy traffic analysis of a queue with batch MMAP 24
Дмитриев Ю.Г., Зенкова Ж.Н., Зенков А.Г.
Статистические свойства оценок метода измерения ценовой чувствительности PSM 30
Dobronets B.S., Popova O.A.
Computational aspects of probabilistic extensions 41
Ким К.С., Смагин В.И.
Экстраполяция в дискретных системах с мультипликативными возмущениями при неполной информации 49
Корелин И.А., Поршнев С.В.
Исследование влияния случайных вариаций интенсивности входного потока на макроскопические показатели нестационарной СМО 57
Мигов Д.А., Винс Д.В.
Параллельная реализация и имитационное моделирование оценки надёжности сети методом Монте-Карло 66
Полин Е.П., Моисеева С.П., Рожкова С.В.
Асимптотический анализ неоднородной системы массового обслуживания M|M|∞ в марковской случайной среде 75
Шумилов Б.М.
Мультивейвлеты нечетной степени, ортогональные многочленам 84

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Перышкова Е.Н., Курносов М.Г.
Учет конкурентного разделения каналов связи при формировании подсистем в вычислительных кластерах на базе многопроцессорных узлов 93
Поттосина С.А.
Применение задачи о кратчайшем покрытии при тестировании программного продукта 102

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Лапутенко А.В., Винарский Е.М.
Синтез тестов для цифровых систем на высоком и низком уровнях абстракции 110

Сведения об авторах 118

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Yu.
Model predictive control for discrete-time systems with serially correlated parameters and multiplicative and additive noises under constraints 4

DATA PROCESSING

Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.
Optimal estimate of the states of a generalized asynchronous event flow with an arbitrary number of states 12
Dimitrov M.Tz.
Heavy traffic analysis of a queue with batch MMAP 24
Dmitriev U.G., Zenkova Z.N., Zenkov A.G.
Statistical properties of price sensitivity meter results 30
Dobronets B.S., Popova O.A.
Computational aspects of probabilistic extensions 41
Kim K.S., Smagin V.I.
Extrapolation in discrete systems with multiplicative perturbations at incomplete information 49
Korelin I.A., Porshnev S.V.
The study of influence of random variations of input rate to macroscopic indicators of a non-stationary queuing system 57
Migov D.A., Weins D.V.
Parallel implementation and simulation of network reliability calculation by Monte Carlo method 66
Polin E.P., Moiseeva S.P., Rozhkova S.V.
Asimptotic analysis of heterogeneous queuing system M|M|∞ in a Markov random environment 75
Shumilov B.M.
Multiwavelets of odd degree, orthogonal to polynomials informatics and programming 84

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Peryshkova E.N., Kurnosov M.G.
Modeling network contention effects on process allocation in computer systems discrete function and automatons 93
Pottosina S.A.
Application of the shortest cover problem in testing a software product 102

DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

Laputenko A.V., Vinarskii E.M.
Deriving tests for digital circuits at lower and higher abstraction levels 110

Brief information about the authors 118

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/47/1

В.В. Домбровский, Т.Ю. Пашинская

СИНТЕЗ ПРОГНОЗИРУЮЩИХ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ И АДДИТИВНЫМИ ШУМАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Рассматривается задача управления с прогнозирующей моделью по обобщенному критерию для дискретных систем с сериально коррелированными параметрами и мультипликативными и аддитивными шумами. Относительно параметров предполагаются известными только первые и вторые условные моменты распределений. Изменяя весовые матрицы в обобщенном критерии, можно получать различные критерии управления: a) квадратичный критерий, b) критерий mean-variance. В работе синтезированы стратегии управления при наличии явных ограничений на управляющие воздействия.
Ключевые слова: управление с прогнозированием; мультипликативные шумы; сериально коррелированные параметры; ограничения.

Моделями со случайными параметрами и / или мультипликативными шумами описывается широкий класс реальных систем. Эффективным подходом к синтезу стратегий управления такими системами при ограничениях на состояния и / или управления является метод управления с прогнозирующей моделью (управление с прогнозированием, прогнозирующее управление) [1]. Управлению с прогнозированием системами со случайными параметрами и / или мультипликативными шумами посвящены работы [2–12].

В работах [2–6] рассматриваются системы с мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений, в присутствии так называемых «мягких» ограничений, т.е. вероятностных ограничений [2–4] или ограничений на математические ожидания состояний и управлений [5–6]. В работе [7] рассматриваются системы с мультипликативными шумами и случайными независимыми одинаково распределенными параметрами.

Прогнозирующее управление системами с зависимыми параметрами рассматривается в работах [8–12]. Метод управления с прогнозированием, основанный на генерации сценариев для систем со случайными параметрами, предложен в работах [8–10]. В [11] решена задача синтеза прогнозирующего управления для класса нелинейных систем, параметры которых изменяются в соответствии с эволюцией марковской цепи. В работе [12] рассматривается задача прогнозирующего управления системами с сериально коррелированными параметрами при условии, что известны только первые и вторые условные моменты распределения параметров.

В данной исследуется задача прогнозирующего управления для дискретных систем со случайными сериально коррелированными параметрами, возмущенных аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений. Относительно параметров предполагаются известными только первые и вторые условные моменты распределений. Синтезированы стратегии управления с учетом явных ограничений на управляющие переменные по обобщенному критерию, представляющему собой линейную комбинацию ожидаемых значений квадратичных форм по состоянию и управлению; квадратичной формы ожидаемых значений состояний системы; линейной части − ожидаемого значения состояния системы. Изменяя весовые матрицы в обобщенном критерии,

можно получать различные критерии управления: a) квадратичный критерий, b) критерий mean-variance.

1. Постановка задачи

Пусть объект управления описывается уравнением

$$x(k+1)=\left(A_0(k+1)+\sum_{i=1}^{n}A_i(k+1)v_i(k+1)\right)x(k)+ \tag{1}$$

$$+\left(B_0[\eta(k+1),k+1]+\sum_{i=1}^{n}B_i[\eta(k+1),k+1]v_i(k+1)\right)u(k)+D[\eta(k+1),k+1]w(k+1),$$

где $x(k)\in\mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u(k)\in\mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $\eta(k)\in\mathbb{R}^{q}$ – последовательность случайных векторов; $A_i(k)\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, $B_i[\eta(k),k]\in\mathbb{R}^{n_x\times n_u}$, $(i=\overline{0,n})$, $D[\eta(k),k]\in\mathbb{R}^{n_x\times n_w}$; элементы матриц $B_i[\eta(k), k]$ (i = 0, 1, …, n), $D[\eta(k), k]$ зависят от $\eta(k)$ линейно.

Аддитивные и мультипликативные шумы $\{v(k)\in\mathbb{R}^{n};\ k = 0, 1, \ldots\}$, $\{w(k)\in\mathbb{R}^{n_w};\ k = 0, 1, \ldots\}$ – векторы белых шумов с нулевыми средними и единичными матрицами ковариаций, причем $M\{w(k)v^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, $M\{\eta(k)v^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, $M\{\eta(k)w^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$ для всех k, s.

Пусть $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_k)_{k\geq 1}$ – поток σ-алгебр, где каждая из σ-алгебр $\mathfrak{F}_k$ порождается последовательностью $\{\eta(s)$: s = 0, 1, 2, …, $k\}$ и интерпретируется как доступная информация до момента времени k включительно.

Для процесса $\eta(k)$ предполагаются известными условные моменты распределений

$$M\left\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\right\}=\overline{\eta}(k+i),$$

$$M\left\{\eta(k+i)\eta^{T}(k+j)/\mathfrak{F}_k\right\}=\Theta_{ij}(k),\ (k=0,1,2,...),\ (i,j=0,1,2,...,d).$$

В дальнейшем будем использовать обозначения: для любой матрицы $\psi[\eta(k), k]$, зависящей от $\eta(k)$, $\overline{\psi}(k)=M\left\{\psi[\eta(k),k]/\mathfrak{F}_k\right\}$, не указывая зависимость матриц от $\eta(k)$.

На управляющие воздействия накладываются ограничения

$$u_{\min}(k)\leq S(k)u(k)\leq u_{\max}(k), \tag{2}$$

где $S(k)\in\mathbb{R}^{p\times n_u}$; $u_{\min}(k),\ u_{\max}(k)\in\mathbb{R}^{p}$.

Для управления системой (1) при ограничениях (2) синтезируем закон управления по следующему правилу. На каждом шаге k минимизируем критерий со скользящим горизонтом управления

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}M\{x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}- \tag{3}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}M\{x^{\mathrm{T}}(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}R_2(k+i)M\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}R_3(k+i)M\left\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}+\sum_{i=0}^{m-1}M\left\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\},$$

по последовательности прогнозирующих управлений $u(k/k)$, …, $u(k+m-1/k)$, зависящих от состояния системы $x(k)$ и доступной информации до момента времени k включительно $\mathfrak{F}_k$, где $R_1(k+i)\geq 0$, $R_2(k+i)\geq 0$, $R(k+i)>0$ – симметричные весовые матрицы соответствующей размерности, $R_3(k+i)$ – весовой вектор соответствующей размерности, m – горизонт прогноза.

В качестве управления в момент времени k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояний $\mathfrak{F}_k$ и $x(k)$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

Изменяя весовые матрицы $R_1(k+i)$, $R_2(k+i)$ и $R_3(k+i)$ в (3), можно получить различные критерии управления.

Задача 1. Полагая $R_2(k+i)=0,\ (i=\overline{1,m}),$ имеем задачу прогнозирующего управления по квадратичному критерию

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}M\left\{x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}- \tag{4}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}R_3(k+i)M\left\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}+\sum_{i=0}^{m-1}M\left\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}.$$

Критерий (4) представляет собой линейную комбинацию квадратичной и линейной частей. При $R_3(k+i)=0$ имеем классический квадратичный критерий.

Задача 2. Пусть скалярный выход системы (1)

$$y(k) = L(k)x(k),$$

где $L(k)$ – вектор-строка соответствующей размерности.

Полагая

$$R_1(k+i)=R_2(k+i)=\mu(k+i)L^T(k+i)L(k+i),$$

$$R_3(k+i)=\lambda(k+i)L(k+i),(i=\overline{1,m}),$$

где $\mu(k+i)\geq 0$, $\lambda(k+i)\geq 0$ – скалярные величины, имеем задачу управления по критерию mean-variance:

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}\mu(k+i)M\left\{x^{\mathrm{T}}(k+i)L^{\mathrm{T}}(k+i)L(k+i)x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\lambda(k+i)L(k+i)M\left\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}+\sum_{i=0}^{m-1}M\left\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\},$$

который может быть представлен в виде:

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}\mu(k+i)M\left\{\left(y(k+i)-M\left\{y(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}\right)^2/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\lambda(k+i)M\left\{y(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}+$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}M\left\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}. \tag{5}$$

Параметры $\mu(k+i)$, $\lambda(k+i)$ характеризуют склонность к риску (risk-aversion) и определяют соотношение между ожидаемым выходом системы и вариацией в момент времени $k+i$.

Замечание 1. В критерии (5) по сравнению с классическим критерием mean-variance добавлены слагаемые, содержащие квадратичные формы от управлений. В общем случае наличие этих слагаемых гарантирует существование решения задачи управления (см. замечание 3).

2. Синтез стратегий управления с прогнозированием

Рассмотрим задачу минимизации критерия (3) по последовательности прогнозирующих управлений $u(k+i/k)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, при ограничениях (2) на траекториях системы (1).

Теорема. Оптимальная стратегия прогнозирующего управления системой (1), минимизирующая критерий (3) со скользящим горизонтом m при ограничениях (2), на каждом шаге k определяется уравнением

$$u(k)=\begin{bmatrix} I_{n_u} & 0_{n_u} & \cdots & 0_{n_u}\end{bmatrix}U(k),$$

где I_{n_u} – единичная матрица размерности n_u, 0_{n_u} – квадратная нулевая матрица размерности n_u, $U(k) = [u^{\mathrm{T}}(k/k), \ldots, u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)]^{\mathrm{T}}$ – вектор прогнозирующих управлений, который определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида:

$$Y(k+m/k)=\left[2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)-F(k)\right]U(k)+U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k) \tag{6}$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k)\le \overline{S}(k)U(k)\le U_{\max}(k), \tag{7}$$

где

$$\overline{S}(k)=\mathrm{diag}(S(k),...,S(k+m-1)),$$

$$U_{\min}(k)=[u_{\min}^{\mathrm{T}}(k),...,u_{\min}^{\mathrm{T}}(k+m-1)]^{\mathrm{T}},\ U_{\max}(k)=[u_{\max}^{\mathrm{T}}(k),...,u_{\max}^{\mathrm{T}}(k+m-1)]^{\mathrm{T}},$$

$H(k)$, $G(k)$, $F(k)$ – блочные матрицы вида

$$H(k)=\begin{bmatrix} H_{11}(k) & H_{12}(k) & \cdots & H_{1m}(k) \\ H_{21}(k) & H_{22}(k) & \cdots & H_{2m}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{m1}(k) & H_{m2}(k) & \cdots & H_{mm}(k) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$G(k)=\begin{bmatrix} G_1(k) & G_2(k) & \cdots & G_m(k) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$F(k)=\begin{bmatrix} F_1(k) & F_2(k) & \cdots & F_m(k) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

блоки которых равны

$$H_{tt}(k)=R(k+t-1)+\overline{L}_{22}(m-t)-\overline{N}_{22}(m-t), \tag{11}$$

$$H_{tf}(k)=M\left\{B_0^{\mathrm{T}}[\eta(k+t),k+t]\prod_{j=t+1}^{f-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)\left[L_{12}(m-f)-\overline{N}_{12}(m-f)\right]/\mathfrak{F}_k\right\},\ \ f>t, \tag{12}$$

$$H_{tf}(k)=\left(H_{ft}(k)\right)^{\mathrm{T}},\ \ f<t, \tag{13}$$

$$G_t(k)=\prod_{j=1}^{t-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)\left[\overline{L}_{12}(m-t)-\overline{N}_{12}(m-t)\right], \tag{14}$$

$$F_t(k)=\overline{K}_2(m-t), \tag{15}$$

$$\prod_{j=t+1}^{t}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)=1,$$

где

$$Q_1(t)=R_1(k+m-t)+L_{11}(t-1),Q_1(0)=R_1(k+m), \tag{16}$$

$$L_{11}(t)=\sum_{i=0}^{n}A_i^{\mathrm{T}}(k+m-t)Q_1(t)A_i(k+m-t), \tag{17}$$

$$L_{12}(t)=\sum_{i=0}^{n}A_i^{\mathrm{T}}(k+m-t)Q_1(t)B_i[\eta(k+m-t),k+m-t], \tag{18}$$

$$\overline{L}_{12}(t)=M\{L_{12}(t)/\mathfrak{F}_k\}, \tag{19}$$

$$\overline{L}_{22}(t)=\sum_{i=0}^{n}M\left\{B_i^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-t),k+m-t]Q_1(t)B_i[\eta(k+m-t),k+m-t]/\mathfrak{F}_k\right\}, \tag{20}$$

$$Q_2(t)=R_2(k+m-t)+N_{11}(t-1),Q_2(0)=R_2(k+m), \tag{21}$$

$$N_{11}(t)=A_0^{\mathrm{T}}(k+m-t)Q_2(t)A_0(k+m-t), \tag{22}$$

$$\overline{N}_{12}(t)=A_0^{\mathrm{T}}(k+m-t)Q_2(t)M\left\{B_0[\eta(k+m-t),k+m-t]/\mathfrak{F}_k\right\}, \tag{23}$$

$$\overline{N}_{22}(t)=M\left\{B_0^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-t),k+m-t]\}/\mathfrak{F}_k\right\}Q_2(t)M\left\{B_0[\eta(k+m-t),k+m-t]/\mathfrak{F}_k\right\}, \tag{24}$$

$$Q_3(t) = R_3(k+m-t) + K_1(t-1), Q_3(0) = R_3(k+m), \tag{25}$$

$$K_1(t) = Q_3(t)A_0(k+m-t), \tag{26}$$

$$\overline{K}_2(t) = Q_3(t)M\left\{B_0[\eta(k+m-t), k+m-t]/\mathfrak{F}_k\right\}. \tag{27}$$

Оптимальный вектор прогнозирующих управлений без учета ограничений равен

$$U(k) = -H^{-1}(k)\left[G^{\mathrm{T}}(k)x(k) - \frac{1}{2}F^{\mathrm{T}}(k)\right]. \tag{28}$$

При этом оптимальное значение критерия (3) имеет вид:

$$\begin{gathered} J^{opt}(k+m/k) = x^{\mathrm{T}}(k)[L_{11}(m-1) - N_{11}(m-1) + G(k)H^{-1}(k)G^{\mathrm{T}}(k)]x(k) - \\ -K_1(m-1)x(k) - x^T(k)G(k)H^{-1}(k)F^{\mathrm{T}}(k) + \frac{1}{4}F(k)H^{-1}(k)F^{\mathrm{T}}(k) + \\ +\sum_{t=1}^{m} tr\left\{Q_1(m-t)\overline{W}(m-t)\right\}, \end{gathered} \tag{29}$$

где

$$\overline{W}(t) = M\left\{D[\eta(k+m-t), k+m-t]D^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-t),\ k+m-t]/\mathfrak{F}_k\right\}. \tag{30}$$

Замечание 2. В силу линейной зависимости матриц $B_i[\eta(k), k]$ (i = 0, 1, …, n), $D[\eta(k), k]$ от случайных параметров, условные математические ожидания в выражениях (11)–(15), (30) можно вычислить без затруднений.

Замечание 3. (Существование и единственность решения). При условии $R_1(k+i) \geq R_2(k+i)$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered} M\{x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i)/x(k), \mathfrak{F}_k\} \geq \\ \geq M\{x^{\mathrm{T}}(k+i)/x(k), \mathfrak{F}_k\}R_2(k+i)M\{x(k+i)/x(k), \mathfrak{F}_k\}. \end{gathered} \tag{31}$$

Таким образом, при выполнении (31) и с учетом того, что $R(k+i) > 0$, критерий (3) является выпуклым. Поскольку критерий (6) получен посредством преобразования критерия (3), сохраняющего условия выпуклости, условия $R_1(k+i) \geq R_2(k+i)$ и $R(k+i) > 0$ гарантируют, что решение задачи квадратичного программирования с критерием (6) существует и единственно, если ограничения (7) совместны.

Доказательство. Рассмотрим следующие выражения:

$$\begin{gathered} J^{(1)}(k+m/k) = M\{\sum_{i=1}^{m} x^{\mathrm{T}}(k+i/k)R_1(k+i)x(k+i/k) - R_3(k+i)x(k+i/k) + \\ +u^T(k+i-1)R(k+i-1)u(k+i-1)/x(k), \mathfrak{F}_k\}, \end{gathered} \tag{32}$$

$$J^{(2)}(k+m/k) = \sum_{i=1}^{m} M\left\{x^{\mathrm{T}}(k+i/k)/x(k), \mathfrak{F}_k\right\}R_2(k+i)M\left\{x(k+i/k)/x(k), \mathfrak{F}_k\right\}. \tag{33}$$

Очевидно, что

$$J(k+m/k) = J^{(1)}(k+m/k) - J^{(2)}(k+m/k). \tag{34}$$

Рассмотрим $J^{(1)}(k+m/k)$. Полагая $v_0(k) = 1$ (k = 0, 1, …), можно представить (1) в виде:

$$\begin{gathered} x(k+1) = \sum_{i=0}^{n} A_i(k+1)v_i(k+1)x(k) + \\ +\sum_{i=0}^{n} B_i[\eta(k+1), k+1]v_i(k+1)u(k) + D[\eta(k+1), k+1]w(k+1). \end{gathered} \tag{35}$$

Выражая последовательно все $x(k+i/k)$ через $x(k)$ с использованием уравнения системы (35) и подставляя результат в (32), получим:

$$J^{(1)}(k+m/k)=x^{\mathrm{T}}(k)L_{11}(m-1)x(k)+$$
$$+2x^{\mathrm{T}}(k)\sum_{t=1}^{m}\prod_{j=1}^{t-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)\overline{L}_{12}(m-t)u(k+t-1/k)+ \tag{36}$$
$$+\sum_{t=1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)\left[\overline{L}_{22}(m-t)+R(k+t-1)\right]u(k+t-1/k)+$$
$$+2\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{f=t+1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)M\{B_0^{\mathrm{T}}[\eta(k+t),k+t]\prod_{j=t+1}^{f-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)L_{12}(m-f)/\mathfrak{F}_k\}u(k+f-1/k)+$$
$$+\sum_{t=1}^{m}tr\left\{Q_1(m-t)\overline{W}(m-t)\right\}-K_1(m-1)x(k)-\sum_{t=1}^{m}\overline{K}_2(m-t)u(k+t-1/k),$$

где $Q_1(t)$, $L_{11}(t)$, $L_{12}(t)$, $\overline{L}_{12}(t)$, $\overline{L}_{22}(t)$ определяются уравнениями (16)–(20) и

$$\prod_{j=t+1}^{t}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)=1,$$

$K_1(t)$, $\overline{K}_2(t)$ определяются уравнениями (26)–(27), $\overline{W}(t)$ имеет вид (30).

Рассмотрим выражение (33) для $J^{(2)}(k+m/k)$. Выражая последовательно все $M\{x(k+s)/x(k),\mathfrak{F}_k\}$ через $x(k)$ с использованием уравнения системы (1), получим:

$$M\{x(k+s)/x(k),\mathfrak{F}_k\}=\prod_{j=1}^{s}A_0(k+s-j+1)x(k)+$$
$$+\sum_{t=1}^{s}\prod_{j=1}^{s-t}A_0(k+s-j+1)M\{B_0[\eta(k+t),k+t]/\mathfrak{F}_k\}u(k+t-1/k). \tag{37}$$

Подставляя (37) в (33) и преобразовав выражение, получим

$$J^{(2)}(k+m/k)=x^{\mathrm{T}}(k)N_{11}(m-1)x(k)+ \tag{38}$$
$$+2x^{T}(k)\sum_{t=1}^{m}\prod_{j=1}^{t-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)\overline{N}_{12}(m-t)u(k+t-1/k)+\sum_{t=1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)\overline{N}_{22}(m-t)u(k+t-1/k)+$$
$$+2\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{f=t+1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)M\{B_0^{\mathrm{T}}[\eta(k+t),k+t]/\mathfrak{F}_k\}\prod_{j=t+1}^{f-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)\overline{N}_{12}(m-f)u(k+f-1/k),$$

где $N_{11}(t)$, $\overline{N}_{12}(t)$, $\overline{N}_{22}(t)$ определяются уравнениями (22)–(24).

С учетом (36), (38) и (34) критерий (3) можно записать в матричном виде:

$$J(k+m/k)=x^{\mathrm{T}}(k)[L_{11}(m-1)-N_{11}(m-1)]x(k)-K_1(m-1)x(k)+ \tag{39}$$
$$+\left[2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)-F(k)\right]U(k)+U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k)+\sum_{t=1}^{m}tr\left\{Q_1(m-t)\overline{W}(m-t)\right\},$$

где матрицы $H(k)$, $G(k)$, $F(k)$ имеют вид (8)–(15), матрицы $L_{11}(t)$, $N_{11}(t)$, $K_1(t)$, $\overline{W}(t)$ определяются уравнениями (17), (22), (26), (30) соответственно.

Нетрудно показать, что оптимальный вектор прогнозирующего управления без учета ограничений имеет вид (28), оптимальное значение критерия (6) при этом определяется в виде (29).

Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (39) при ограничениях (2), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (6) при ограничениях (7). Теорема доказана.

Заключение

В данной работе предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по обобщенному критерию для дискретных систем с сериально коррелированными параметрами, мульти-

пликативными и аддитивными шумами. Относительно случайных параметров достаточно знать только условные первые и вторые моменты распределений. Изменяя весовые матрицы в обобщенном критерии, можно получать различные критерии управления: a) квадратичный критерий, b) критерий mean-variance. Синтезированы стратегии управления с учетом явных ограничений на управляющие воздействия. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии включает решение последовательности задач квадратичного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mayne D.Q. Model predictive control: Recent developments and future promise // Automatica. 2014. V. 50, No. 12. P. 2967–2986.
2. Cannon M., Kouvaritakis B., Wu X. Model predictive control for systems with stochastic multiplicative uncertainty and probabilistic constrains // Automatica. 2009. V. 45, No. 1. P. 167–172.
3. Farina M., Scattolini R. Model predictive control of linear systems with multiplicative unbounded uncertainty and chance constraints // Automatica. 2016. V. 70. P. 258–265.
4. Farina M., Giulioni L., Scattolini R. Stochastic linear Model Predictive Control with chance constraints : a review // Journal of Process Control. 2016. V. 44. P. 53–67.
5. Farina M., Scattolini R. Model predictive control of linear systems with multiplicative unbounded uncertainty and average constraints // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48, No. 23. P. 266–271.
6. Primbs J.A., Sung C.H. Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. V. 54, No. 2. P. 221–230.
7. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативным шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2005. V. 4. P. 84–97.
8. Bemporad A., Di Cairano S. Model-Predictive Control of Discrete Hybrid Stochastic Automata // IEEE Transactions on Automatic Control. 2011. V. 56, No. 6. P. 1307–1321.
9. Calafiore G.C., Fagiano L. Stochastic model predictive control of LPV systems via scenario optimization // Automatica. 2013. V. 49. P. 1861–1866.
10. Patrinos P., Soparasakis P., Sarimveis H., Bemporad A. Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems // Automatica. 2014. V. 50, No. 10. P. 2504–2514.
11. Dombrovskii V., Obyedko T., Samorodova M. Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions // Automatica. 2018. V. 87. P. 61–68.
12. Dombrovskii V., Obyedko T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica. 2015. V. 54, No. 4. P. 325–331.

Поступила в редакцию 29 июня 2018 г.

Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Yu. (2019) MODEL PREDICTIVE CONTROL FOR DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH SERIALLY CORRELATED PARAMETERS AND MULTIPLICATIVE AND ADDITIVE NOISES UNDER CONSTRAINTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 4–11

DOI: 10.17223/19988605/47/1

Let the control object is described by the equation:

$$x(k+1)=\left(A_0(k+1)+\sum_{i=1}^{n}A_i(k+1)v_i(k+1)\right)x(k)+ \tag{1}$$

$$+\left(B_0[\eta(k+1),k+1]+\sum_{i=1}^{n}B_i[\eta(k+1),k+1]v_i(k+1)\right)u(k)+D[\eta(k+1),k+1]w(k+1),$$

where $x(k)\in\mathbb{R}^{n_x}$ is the vector of state; $u(k)\in\mathbb{R}^{n_u}$ is the vector of control; $\eta(k)\in\mathbb{R}^{q}$ is the stochastic vector; $A_i(k)\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, $B_i[\eta(k),k]\in\mathbb{R}^{n_x\times n_u}, (i=\overline{0,n})$, $D[\eta(k),k]\in\mathbb{R}^{n_x\times n_w}$. All of the elements of $B_i[\eta(k), k]$ (i = 0, 1, …, n), $D[\eta(k), k]$ are assumed to be linear functions of $\eta(k)$; $\{v(k)\in\mathbb{R}^{n}$; k = 0, 1, …}, $\{w(k)\in\mathbb{R}^{n_w}$; k = 0, 1, …} are white noise vectors with zero mean and unique covariance matrix, $E\{w(k)v^{\mathrm{T}}(s)\}=0$, $E\{\eta(k)v^{\mathrm{T}}(s)\}=0$, $E\{\eta(k)w^{\mathrm{T}}(s)\}=0$ for all k, s.

Let $\mathbb{F}=(\mathfrak{F}_k)_{k\geq 1}$ be the complete filtration with σ-field $\mathfrak{F}_k$ generated by the $\{\eta(s)$: s = 0, 1, 2, …, $k\}$ that models the flow of information to time k.

We allow the parameters $\eta(k)$ to be serially correlated. Let us assume that we know the first- and second-order conditional moments for the stochastic vector $\eta(k)$ about $\mathfrak{F}_k$:

$$E\left\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\right\}=\bar{\eta}(k+i),\qquad E\left\{\eta(k+i)\eta^{\mathrm{T}}(k+j)/\mathfrak{F}_k\right\}=\Theta_{ij}(k),(k=0,1,2,...),(i,j=0,1,2,...,d).$$

We impose the following inequality constraints on the control inputs (element-wise inequality):

$$u_{\min}(k)\le S(k)u(k)\le u_{\max}(k);S(k)\in\mathbb{R}^{p\times n_u};u_{\min}(k),u_{\max}(k)\in\mathbb{R}^{p}. \tag{2}$$

For control of system (1), we synthesize the strategies with a predictive control model. At each step k we minimize the following criterion with a receding horizon

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}E\{x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}-\sum_{i=1}^{m}E\{x^{\mathrm{T}}(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}R_2(k+i)E\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}- \tag{3}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}R_3(k+i)E\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}+\sum_{i=0}^{m-1}E\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\},$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive controls $u(k/k)$, …, $u(k+m-1/k)$ dependent on the system state $x(k)$ and information up to time k $\mathfrak{F}_k$, under constraints (2); where $R_1(k+i)\ge 0, R_2(k+i)\ge 0, R(k+i)>0$ are given symmetric weight matrices of corresponding dimensions; $R_3(k+i)$ is a given vector of corresponding dimension; m is the prediction horizon.

Different cost functions can be obtained from criterion (3) after setting the coefficients $R_1(k+i)$, $R_2(k+i)$, and $R_3(k+i)$ to some appropriate values.

Problem 1. Taking $R_2(k+i)=0,$ we have the MPC problem with quadratic criterion.

Problem 2. Let system (1) have a scalar output $y(k)=L(k)x(k)$, where $L(k)$ is a vector of appropriate dimension. Taking

$$R_1(k+i)=R_2(k+i)=\mu(k+i)L^T(k+i)L(k+i),\ \ R_3(k+i)=\lambda(k+i)L(k+i),(i=\overline{1,m}),$$

where $\mu(k+i)\ge 0$, $\lambda(k+i)\ge 0$ are scalar values, we have a mean-variance optimization problem.

Keywords: model predictive control; serially correlated parameters; multiplicative noises; constrains..

DOMBROVSKII Vladimir Valentinovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

PASHINSKAYA Tatiana Yurievna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

REFERENCES

1. Mayne, D.Q. (2014) Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*. 50(12). pp. 2967–2986. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.128
2. Cannon, M., Kouvaritakis, B. & Wu, X. (2009) Model predictive control for systems with stochastic multiplicative uncertainty and probabilistic constrains. *Automatica*. 45(1). pp. 167–172. DOI: 10.1016/j.automatica.2008.06.017
3. Farina, M. & Scattolini, R. (2016) Model predictive control of linear systems with multiplicative unbounded uncertainty and chance constraints. *Automatica*. 70. pp. 258–265. DOI: 10.1016/j.automatica.2016.04.008
4. Farina, M., Giulioni, L. & Scattolini, R. (2016) Stochastic linear Model Predictive Control with chance constraints – A review. *Journal of Process Control*. 44. pp. 53–67. DOI: 10.1016/j.jprocont.2016.03.005
5. Farina, M. & Scattolini, R. (2015) Model predictive control of linear systems with multiplicative unbounded uncertainty and average constraints. *IFAC-PapersOnLine*. 48(23). pp. 266–271. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.294
6. Primbs, J.A. & Sung, C.H. (2009) Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise. *IEEE Trans. Automat. Control*. 54(2). pp. 221–230. DOI: 10.1109/ACC.2007.4282237
7. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2005) Predictive control of random-parameter systems with multiplicative noise. Application to investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 66(4). pp. 583–595. DOI: 10.1007/s10513-005-0102-5
8. Bemporad, A. & Di Cairano, S. (2011). Model-Predictive Control of Discrete Hybrid Stochastic Automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 56(6). pp. 1307–1321. DOI: 10.1109/TAC.2010.2084810
9. Calafiore, G.C. & Fagiano, L. (2013) Stochastic model predictive control of LPV systems via scenario optimization. *Automatica*. 49. pp. 1861–1866. DOI: 10.1016/j.automatica.2013.02.060
10. Patrinos, P., Soparasakis, P., Sarimveis, H. & Bemporad, A. (2014) Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems. *Automatica*. 50(10). pp. 2504–2514. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.08.031
11. Dombrovskii, V., Obyedko, T. & Samorodova, M. (2018) Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions. *Automatica*. 87. pp. 61–68. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.09.018
12. Dombrovskii, V. & Obyedko, T. (2015) Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization. *Automatica*. 54. pp. 325–331. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.02.021

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21
DOI: 10.17223/19988605/47/2

А.М. Горцев, Л.А. Нежельская

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО АСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Решена задача оптимальной оценки состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока событий (обобщенного MMPP-потока) на основе наблюдений за моментами наступления событий. Получен явный вид апостериорных вероятностей состояний потока для любого момента времени. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводится алгоритм расчета апостериорных вероятностей и алгоритм оценивания состояний потока в любой момент времени.
Ключевые слова: обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий; апостериорная вероятность; оптимальная оценка состояний.

Распространенными математическими моделями физических явлений и процессов являются потоки событий. В подавляющем большинстве работ по исследованию систем массового обслуживания (СМО) в качестве входящих потоков событий рассматривались пуассоновские потоки событий. Однако в связи с бурным развитием вычислительной техники, спутниковых, компьютерных, беспроводных и мобильных сетей связи модель простейшего потока перестала быть адекватной реальным информационным потокам событий. При этом теория построения математических моделей функционирования информационно-телекоммуникационных систем, существовавшая до середины 1980-х гг., во многом становится непригодной для анализа информационных процессов, протекающих в современных телекоммуникационных системах. Поэтому в это же время была предпринята успешная попытка создания адекватных математических моделей информационных потоков в телекоммуникационных системах так называемых дважды стохастических потоков.

Дважды стохастические потоки событий можно разделить на два класса: первый класс составляют потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [1]; второй – потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний. Впервые результаты исследований потоков второго класса опубликованы практически в одно и того же время, в 1979 г., в работах [2, 3]. В [2] указанные потоки получили название MC (Markov chain)-потоки; в [3] – MVP (Markov versatile processes)-потоки. В статьях [4, 5] описанные выше потоки называют также MAP (Markov Arrival Process)-потоками событий. С использованием моделей дважды стохастических потоков событий возможно исследование финансово-экономических процессов [6], биофизических процессов [7], процессов управления запасами [8] и др. Отметим, что MC-потоки событий (MAP-потоки) являются наиболее характерной и подходящей моделью потоков в реальных телекоммуникационных сетях, в частности в широкополосных сетях беспроводной связи вдоль протяженных транспортных магистралей [9–18]. Зарубежными и отечественными исследователями при описании подобных входящих потоков событий в СМО используются термины «дважды стохастические потоки событий», MAP-потоки, MC-потоки.

В статье [19] предложена классификация MAP-потоков на MAP-потоки первого порядка и MAP-потоки второго порядка в зависимости от возможных вариантов смены состояний интенсивно-

сти потока. Класс MAP-потоков первого порядка составляют потоки, у которых смену состояний интенсивности определяет одна случайная величина; вследствие этого смена состояний происходит в случайные моменты времени, в которые событие потока может наступить или не наступить: 1) синхронные потоки (потоки, у которых состояние интенсивности меняется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий) [20]; 2) собственно MAP-потоки как обобщение синхронных потоков [21]. Класс MAP-потоков второго порядка составляют потоки, у которых смена состояний интенсивности определяется двумя независимыми случайными величинами так, что смена состояний происходит в случайные моменты времени, в которые событие потока может наступить или не наступить: 1) модулированные MAP-потоки [22]; 2) обобщенные асинхронные потоки [23], являющиеся обобщением асинхронных потоков, или, что то же самое, MMPP-потоков (потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий) [24]; 3) обобщенные полусинхронные потоки [25] как обобщение полусинхронных потоков (потоки, у которых одна часть состояний интенсивности меняется в моменты наступления событий потока (свойство синхронных потоков), другая часть состояний интенсивности меняется в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий потока (свойство асинхронных потоков)).

В настоящей статье рассматривается MAP-поток событий второго порядка с произвольным числом состояний, являющийся обобщением асинхронного потока событий с произвольным числом состояний [26]. Решается задача об оптимальной оценке состояний обобщенного асинхронного потока событий (далее – обобщенный асинхронный поток либо просто поток). Находятся явные выражения для апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояний потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений; этот критерий обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения [27].

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный асинхронный поток, сопровождающий процесс (интенсивность) $\lambda(t)$ которого есть кусочно-постоянный случайный процесс с n состояниями: $\lambda(t)$ принимает значения из дискретного множества значений $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$, $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_n \geq 0$. Будем говорить, что имеет место i-е состояние процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, $n = 2,3,...$. Если имеет место i-е состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с параметром (интенсивностью) λ_i, $i = \overline{1,n}$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в i-м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α_i: $F_i(\tau) = 1 - e^{-\alpha_i \tau}$, $\tau \geq 0$, $i = \overline{1,n}$. Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым ($\lambda(t)$ – скрытый случайный процесс); наблюдаемыми являются моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ наступления событий потока. Рассматривается стационарный режим функционирования потока, поэтому переходными процессами на полуинтервале наблюдения $[t_0, t)$, где t_0 – начало наблюдения, t – окончание наблюдения, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. В этих предпосылках $\lambda(t)$ – сопровождающий стационарный кусочно-постоянный скрытый транзитивный марковский процесс с произвольным числом состояний n ($n = 2,3,...$).

Обобщтнный асинхронный поток является обобщением асинхронного потока. Обобщение состоит в следующем: в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е инициируется с вероятностью p_{ij} дополнительное событие, $i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$; переход происходит в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события пуассоновского потока с параметром λ_i,

при этом инициирование дополнительного события осуществляется в j-м состоянии (сначала осуществляется переход из i-го состояния в j-е (переход первичен), затем – инициирование дополнительного события в j-м состоянии), $i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$; переход и инициирование дополнительного события происходят мгновенно.

Матрицы инфинитезимальных характеристик [28] процесса $\lambda(t)$ примут вид:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1+\alpha_1) & (1-p_{12})\alpha_{12} & \dots & (1-p_{1n})\alpha_{1n} \\ (1-p_{21})\alpha_{21} & -(\lambda_2+\alpha_2) & \dots & (1-p_{2n})\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1-p_{n1})\alpha_{n1} & (1-p_{n2})\alpha_{n2} & \dots & -(\lambda_n+\alpha_n) \end{Vmatrix}, \ \mathbf{D}_1 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & p_{12}\alpha_{12} & \dots & p_{1n}\alpha_{1n} \\ p_{21}\alpha_{21} & \lambda_2 & \dots & p_{2n}\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}\alpha_{n1} & p_{n2}\alpha_{n2} & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

где $\alpha_i = -\alpha_{ii}$, $\alpha_{ii} = -\sum\limits_{j=1,\, j\neq i}^{n} \alpha_{ij}$, $i = \overline{1,n}$; $\alpha_{ij} > 0$, $0 \le p_{ij} \le 1$, $i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$.

Элементами матрицы $\mathbf{D}_1$ являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Положив в (1) $p_{ij} = 0$, $i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$, получаем матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ для асинхронного потока событий с произвольным числом состояний [26].

Наблюдения за потоком производятся на полуинтервале времени $[t_0, t)$. Требуется на основании моментов наступления событий, наблюденных от момента t_0 до момента t, оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент времени t. Обозначим $\hat{\lambda}(t)$ оценку состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени t. Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i \mid t) = w(\lambda_i \mid t_1,\dots,t_m,t) = P(\lambda(t) = \lambda_i \mid t_1,\dots,t_m,t)$, $i = \overline{1,n}$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество событий, наступивших в моменты $t_1,\dots,t_m$ на полуинтервале наблюдения $[t_0, t)$), при этом $\sum\limits_{i=1}^{n} w(\lambda_i \mid t) = 1$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) выносится по критерию максимума апостериорной вероятности [27], согласно которому $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, если $w(\lambda_i \mid t) \ge w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$.

2. Рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей состояний потока

Согласно методике [29], рассмотрим дискретные наблюдения за потоком через достаточно малые промежутки времени длительности Δt. Пусть наблюдения за потоком начинаются в момент времени $t = 0$, и время t изменяется дискретно с шагом Δt: $t^{(k)} = k\Delta t$, $k = 0,1,\dots$. Введем двумерный случайный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$, где $\lambda^{(k)} = \lambda(k\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t^{(k)} = k\Delta t$ ($\lambda^{(k)} = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$); $r_k = r_k(\Delta t) = r(k\Delta t) - r((k-1)\Delta t)$ – число событий потока, наступивших на полуинтервале времени $[(k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длительности Δt, $r_k = 0,1,\dots$, $k = \overline{0,m}$. Поскольку на полуинтервале $[-\Delta t, 0)$ наблюдение за потоком не производится, то r_0 можем положить произвольным, например $r_0 = 0$. Обозначим $\boldsymbol{\lambda}^{(\mathrm{m})} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(m)})$ – последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(k\Delta t)$ в момент времени $k\Delta t$, $k = \overline{0,m}$ ($\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$). Обозначим

$\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \ldots, r_m)$ – последовательность чисел наблюденных событий за время от 0 до $m\Delta t$ на полуинтервалах $[(k-1)\Delta t,\ k\Delta t)$ длительности Δt, $k = \overline{0,m}$.

Нетрудно показать, что компоненты двумерного случайного процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$, $k = \overline{0,m}$, являются взаимно независимыми марковскими компонентами. Тогда для марковского процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$, $k = \overline{0,m+1}$, имеет место рекуррентная формула для апостериорных вероятностей [26]:

$$w(\lambda_j \mid t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{n} w(\lambda_i \mid t)\, p(\lambda_j, r_{m+1} \mid \lambda_i, r_m) \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w(\lambda_i \mid t)\, p(\lambda_k, r_{m+1} \mid \lambda_i, r_m), \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $p(\lambda_j, r_{m+1} \mid \lambda_i, r_m)$ – вероятность перехода процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ на полуинтервале $[m\Delta t,\ (m+1)\Delta t) = [t,\ t+\Delta t)$ из состояния $(\lambda^{(m)} = \lambda_i, r_m)$, $i = \overline{1,n}$, $r_m = 0,1,\ldots$, в состояние $(\lambda^{(m+1)} = \lambda_j, r_{m+1})$, $j = \overline{1,n}$, $r_{m+1} = 0,1,\ldots$.

Исследуем переходную вероятность в (2) для рассматриваемого случая обобщенного асинхронного потока. Имеем

$$p(\lambda_j, r_{m+1} \mid \lambda_i, r_m) = p(\lambda_j \mid \lambda_i, r_m)\, p(r_{m+1} \mid \lambda_i, r_m, \lambda_j);\ i, j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Количество наблюденных событий на полуинтервале $[m\Delta t,\ (m+1)\Delta t)$ состоит из событий пуассоновского потока интенсивности $\lambda(m\Delta t) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, и дополнительных событий, инициируемых в моменты перехода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е ($i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$). В силу этого инициирование дополнительных событий связано с переходной вероятностью $p(\lambda_j \mid \lambda_i, r_m)$; наступление же событий пуассоновского потока связано с вероятностью $p(r_{m+1} \mid \lambda_i, r_m, \lambda_j)$, т.е. r_m, r_{m+1} – число событий пуассоновского потока, наблюденных на полуинтервалах $[(m-1)\Delta t,\ m\Delta t)$, $[m\Delta t,\ (m+1)\Delta t)$ соответственно. Отметим, что в силу малости величины Δt число событий $r_m = 0;1$ ($r_m = 2,3,\ldots$), имеет вероятность $o(\Delta t)$), аналогично для r_{m+1}. Количество переходов процесса $\lambda(t)$ на полуинтервале $[m\Delta t,\ (m+1)\Delta t)$ более одного также имеет вероятность $o(\Delta t)$.

Замечание 1. Ситуация: одновременное наступление события пуассоновского потока и переход процесса $\lambda(t)$ на интервале длительности Δt из i-го состояния в j-е (с инициированием дополнительного события либо без его инициирования) имеет вероятность $o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$.

Первый сомножитель в (3) запишется в виде $p(\lambda_j \mid \lambda_i, r_m) = p(\lambda_j \mid \lambda_i)$, так как на значение процесса $\lambda((m+1)\Delta t) = \lambda_j$ в момент времени $(m+1)\Delta t$ число наблюденных событий r_m на полуинтервале $[(m-1)\Delta t,\ m\Delta t)$ не влияет (процесс $\lambda(t)$ «живет своей жизнью»); значение же $\lambda(m\Delta t) = \lambda_i$ процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t = m\Delta t$ не зависит от предыстории в силу марковости процесса $\lambda(t)$. Наконец, подчеркнем, что дополнительное событие на полуинтервале $[m\Delta t,\ (m+1)\Delta t)$ наступает (либо не наступает) в j-м состоянии при переходе процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е ($i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$). Это обстоятельство нужно отразить в вероятности $p(\lambda_j \mid \lambda_i)$: $p(\lambda_j \mid \lambda_i) = p_d(\lambda_j \mid \lambda_i)$, $d = 0;1$, $i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$; $p(\lambda_i \mid \lambda_i) = p_0(\lambda_i \mid \lambda_i)$, $i = \overline{1,n}$. Если $d = 0$, то дополнительное событие на полуинтервале $[m\Delta t,\ (m+1)\Delta t)$ с вероятностью $(1 - p_{ij})$ не инициируется, $i, j = \overline{1,n}$; $p_{ii} = 0$, $i = \overline{1,n}$. Если $d = 1$, то дополнительное событие на полуинтервале $[m\Delta t,\ (m+1)\Delta t)$ инициируется с вероятностью p_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$.

Рассмотрим второй сомножитель в (3). Имеем, во-первых, $p(r_{m+1} \mid \lambda_i, r_m, \lambda_j) = p(r_{m+1} \mid \lambda_i, \lambda_j)$, так как число событий r_{m+1}, наблюденных на полуинтервале $[m\Delta t,\ (m+1)\Delta t)$, не зависит от числа со-

событий r_m, наблюденных на полуинтервале $[(m-1)\Delta t,\, m\Delta t)$, в силу того, что потоки событий во всех состояниях процесса $\lambda(t)$ пуассоновские. Во-вторых,

$$p(r_{m+1} \mid \lambda_i, \lambda_j) = \frac{p(\lambda_i, r_{m+1}, \lambda_j)}{p(\lambda_i, \lambda_j)} = \frac{p(\lambda_j \mid \lambda_i, r_{m+1})\, p(\lambda_i, r_{m+1})}{p(\lambda_j \mid \lambda_i)\, p(\lambda_i)}. \tag{4}$$

Так как на значение процесса $\lambda((m+1)\Delta t) = \lambda_j$ в момент времени $(m+1)\Delta t$ число наблюденных событий r_{m+1} на полуинтервале $[m\Delta t,\, (m+1)\Delta t)$, так же как и число наблюденных событий r_m на полуинтервале $[(m-1)\Delta t,\, m\Delta t)$, не влияет, то $p(\lambda_j \mid \lambda_i, r_{m+1}) = p(\lambda_j \mid \lambda_i)$. Тогда из равенства (4) вытекает $p(r_{m+1} \mid \lambda_i, \lambda_j) = p(r_{m+1} \mid \lambda_i)$. В силу этого (3) приобретает вид:

$$p(\lambda_j, r_{m+1} \mid \lambda_i, r_m) = p_d(\lambda_j \mid \lambda_i)\, p(r_{m+1} \mid \lambda_i),\ i, j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (2), находим рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей состояний в случае обобщённого асинхронного потока событий:

$$w(\lambda_j \mid t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{n} w(\lambda_i \mid t)\, p_d(\lambda_j \mid \lambda_i)\, p(r_{m+1} \mid \lambda_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} w(\lambda_i \mid t)\, p_d(\lambda_s \mid \lambda_i)\, p(r_{m+1} \mid \lambda_i), \tag{6}$$

$$d = 0;1,\ r_{m+1} = 0;1,\ j = \overline{1,n}.$$

3. Система дифференциальных уравнений и формулы пересчета для апостериорных вероятностей

Пусть временной полуинтервал $[t, t+\Delta t)$ расположен на временной оси между моментами наступления соседних событий обобщенного асинхронного потока, скажем, между моментами t_k и t_{k+1} (события в моменты времени t_k и t_{k+1} могут быть событиями пуассоновского потока либо дополнительными событиями, либо и теми и другими). Тогда на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ нет событий потока. Последнее означает, что в (6) $d = 0$, $r_{m+1} = 0$. Тогда учитывая (1), имеем

$$p_0(\lambda_j \mid \lambda_j) = p(\lambda_j \mid \lambda_j) = 1 + \alpha_{jj}\Delta t + o(\Delta t),\ j = \overline{1,n}; \tag{7}$$

$$p_0(\lambda_j \mid \lambda_i) = (1 - p_{ij})\alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t),\ i, j = \overline{1,n},\ i \neq j; \tag{8}$$

$$p(r_{m+1} = 0 \mid \lambda_i) = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t),\ i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Лемма 1. На интервале времени (t_k, t_{k+1}), $k = 0,1,\ldots$, т.е. между моментами наступления соседних событий обобщенного асинхронного потока, апостериорные вероятности $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$, удовлетворяют следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dw(\lambda_j \mid t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}[(1-p_{ij})\alpha_{ij} - \lambda_i \delta_{ij}]w(\lambda_i \mid t) + w(\lambda_j \mid t)\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i + \sum_{s=1}^{n} p_{is}\alpha_{is}]w(\lambda_i \mid t), \tag{10}$$

где $j = \overline{1,n}$, $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$; $p_{jj} = p_{ii} = 0$; δ_{ij} – символ Кронекера.

Доказательство. Обозначим в (6) $A_0^{(j)}$ – числитель, B_0 – знаменатель. Учитывая введенные обозначения, формулы (7)–(9) и проделывая необходимые преобразования, находим

$$A_0^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} w(\lambda_i \mid t)\, p_0(\lambda_j \mid \lambda_i)\, p(r_{m+1} = 0 \mid \lambda_i) = (1 - \lambda_j \Delta t)w(\lambda_j \mid t) + \Delta t \sum_{i=1}^{n}(1 - p_{ij})\alpha_{ij} w(\lambda_i \mid t) + o(\Delta t), \tag{11}$$

$$p_{jj} = 0,\ j = \overline{1,n};$$

$$B_0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} w(\lambda_i \mid t)\, p_0(\lambda_s \mid \lambda_i)\, p(r_{m+1} = 0 \mid \lambda_i) = 1 - \Delta t \sum_{i=1}^{n} w(\lambda_i \mid t)[\lambda_i + \sum_{s=1}^{n} p_{is}\alpha_{is}] + o(\Delta t), \tag{12}$$

$$p_{ii} = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Подставляя (11), (12) в (6) и принимая во внимание, что $(1-x)^{-1}=1+x+o(x)$, получаем

$$w(\lambda_j \mid t+\Delta t)=$$

$$=(1-\lambda_j\Delta t)w(\lambda_j \mid t)+\Delta t\sum_{i=1}^{n}(1-p_{ij})\alpha_{ij}w(\lambda_i \mid t)+\Delta t w(\lambda_j \mid t)\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i+\sum_{s=1}^{n}p_{is}\alpha_{is}]w(\lambda_i \mid t)+o(\Delta t),\ j=\overline{1,n}.$$

Перенося $w(\lambda_j \mid t)$ в левую часть последнего равенства, после чего деля левую и правую части равенства на Δt и устремляя Δt к нулю, приходим к (10). Лемма 1 доказана.

Систему (10) необходимо дополнить начальными условиями: значениями апостериорных вероятностей в моменты наступления событий и в момент начала наблюдения за потоком.

В силу замечания 1 рассмотрим ситуацию, когда на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ наступает одно событие обобщенного асинхронного потока, скажем, в момент времени t_k, $k=1,2,\ldots$. Рассмотрим два смежных промежутка времени $[t, t_k)$, $[t_k, t+\Delta t)$. Длительность первого промежутка есть $\Delta t'=t_k-t$, длительность второго промежутка есть $\Delta t''=t+\Delta t-t_k$. Тогда в (6) $w(\lambda_j \mid t+\Delta t)=w(\lambda_j \mid t_k+\Delta t'')$, $w(\lambda_i \mid t)=w(\lambda_i \mid t_k-\Delta t')$, и рекуррентная формула (6) приобретает вид:

$$w(\lambda_j \mid t_k+\Delta t'')=\frac{\sum_{i=1}^{n}w(\lambda_i \mid t_k-\Delta t')p_d(\lambda_j \mid \lambda_i)p(r_{m+1} \mid \lambda_i)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}w(\lambda_i \mid t_k-\Delta t')p_d(\lambda_s \mid \lambda_i)p(r_{m+1} \mid \lambda_i)}, \tag{13}$$

$$j=\overline{1,n};\ (d=0, r_{m+1}=1), (d=1, r_{m+1}=0);\ k=1,2,\ldots$$

Начальные условия для системы (10) определяются в следующих леммах.

Лемма 2. Апостериорные вероятности состояний обобщённого асинхронного потока $w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$, в момент t_k, $k=1,2,\ldots$, наступления события потока определяются формулой пересчета:

$$w(\lambda_j \mid t_k+0)=\lambda_j w(\lambda_j \mid t_k-0)+\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\alpha_{ij}w(\lambda_i \mid t_k-0)\Big/\sum_{i=1}^{n}w(\lambda_i \mid t_k-0)[\lambda_i+\sum_{s=1}^{n}p_{is}\alpha_{is}], \tag{14}$$

где $j=\overline{1,n}$; $p_{jj}=0$, $p_{ii}=0$; $k=1,2,\ldots$

Доказательство. Обозначим в (13) $A_1^{(j)}$ – числитель, B_1 – знаменатель. Учитывая (1), находим

$$p_1(\lambda_j \mid \lambda_i)=p_{ij}\alpha_{ij}\Delta t+o(\Delta t),\ i,j=\overline{1,n},\ i\neq j; \tag{15}$$

$$p_1(\lambda_j \mid \lambda_j)=0,\ j=\overline{1,n}; \tag{16}$$

$$p(r_{m+1}=1 \mid \lambda_i)=\lambda_i\Delta t+o(\Delta t),\ i=\overline{1,n}. \tag{17}$$

Тогда, принимая во внимание введенные обозначения, формулы (7)–(9), (15)–(17), и с учетом замечания 1, проделывая необходимые преобразования, получаем

$$\begin{aligned}A_1^{(j)}&=\sum_{i=1}^{n}w(\lambda_i \mid t_k-\Delta t')[p_0(\lambda_j \mid \lambda_i)p(r_{m+1}=1 \mid \lambda_i)+p_1(\lambda_j \mid \lambda_i)p(r_{m+1}=0 \mid \lambda_i)]=\\&=\Delta t[\lambda_j w(\lambda_j \mid t_k-\Delta t')+\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\alpha_{ij}w(\lambda_i \mid t_k-\Delta t')]+o(\Delta t),\ p_{jj}=0,\ j=\overline{1,n};\end{aligned} \tag{18}$$

$$B_1=\sum_{j=1}^{n}A_1^{(j)}=\Delta t\sum_{i=1}^{n}w(\lambda_i \mid t_k-\Delta t')[\lambda_i+\sum_{s=1}^{n}p_{is}\alpha_{is}]+o(\Delta t),\ p_{ii}=0,\ i=\overline{1,n}. \tag{19}$$

Подставляя (18), (19) в (13), деля при этом числитель и знаменатель на Δt, после чего устремляя Δt к нулю ($\Delta t'$ и $\Delta t''$ стремятся к нулю одновременно), приходим к (14). Лемма 2 доказана.

Замечание 2. При стремлении Δt к нулю величина $t=t_k-\Delta t'$ стремится к t_k слева, величина $t+\Delta t=t_k+\Delta t''$ стремится к t_k справа. В формуле (14) $w(\lambda_j \mid t_k+0)$ – предел функции $w(\lambda_j \mid t)$ в точке t_k ($k=1,2,\ldots$) справа, $w(\lambda_j \mid t_k-0)$ – предел $w(\lambda_j \mid t)$ в той же точке слева. То есть функция

$w(\lambda_j \mid t)$ в точке t_k претерпевает разрыв первого рода, $k = 1, 2, \ldots$ Вероятности $w(\lambda_j \mid t_k + 0)$ являются начальными условиями для решения системы (10) на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим $w(\lambda_j \mid t_0) = w(\lambda_j \mid t_0 + 0)$ ($j = \overline{1,n}$) – апостериорные вероятности состояний потока в момент $t_0 = 0$. Вероятности $w(\lambda_j \mid t_0 + 0)$ являются начальными условиями для решения системы (10) на полуинтервале $[t_0, t_1)$. Задавать $w(\lambda_j \mid t_0 + 0)$ ($j = \overline{1,n}$) можно, исходя из априорной информации о потоке. Поскольку поток рассматривается в стационарном режиме, то можно в качестве $w(\lambda_j \mid t_0 + 0)$, $j = \overline{1,n}$, выбрать априорные финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$. Пусть π_j ($j = \overline{1,n}$) – априорная финальная вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t находится в j-м состоянии. Для вероятностей π_j ($j = \overline{1,n}$) справедлива лемма 3.

Лемма 3. Априорные финальные вероятности π_j ($j = \overline{1,n}$) состояний процесса $\lambda(t)$ ($t \to \infty$) удовлетворяют неоднородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i \alpha_{ij} = 0, \; j = \overline{1, n-1}, \; \sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1, \tag{20}$$

где α_{ij} ($i, j = \overline{1,n}$) определены в (1).

Доказательство. Процесс $\lambda(t)$ является транзитивным марковским, для которого существует финальное распределение вероятностей состояний [30], т.е. существует $\pi_j = \lim \pi_j(t)$ при $t \to \infty$ ($j = \overline{1,n}$), причем для π_j ($j = \overline{1,n}$) выполняется условие нормировки. На поведение процесса $\lambda(t)$ наступление событий обобщенного асинхронного потока (как событий пуассоновского потока, так и дополнительных событий) не оказывает влияния. Вследствие этого дальнейшее доказательство формулы (20) аналогично доказательству, приведенному в [26]. Решение системы (20) можно осуществить по формулам Крамера [31]. Лемма 3 доказана.

Леммы 1–3 позволяют сформулировать теорему 1.

Теорема 1. Поведение апостериорных вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$, на временной оси $t \ge t_0 = 0$ определяется системой дифференциальных уравнений (10), формулами пересчета вероятностей (14) и решением системы (20), в которых $t_k \le t < t_{k+1}$, $w(\lambda_j \mid t_k) = w(\lambda_j \mid t_k + 0)$, $w(\lambda_j \mid t_{k+1}) = w(\lambda_j \mid t_{k+1} - 0)$ ($k = 0, 1, \ldots$); для $k = 0$ имеет место равенство $w(\lambda_j \mid t_0) = w(\lambda_j \mid t_0 + 0) = \pi_j$ ($j = \overline{1,n}$).

Доказательство следует из (10), (14), (20) путем их синхронизации. Теорема 1 доказана.

Замечание 3. Теорема 2 определяет, в частности, поведение апостериорных вероятностей на полуинтервале $[t_{k-1}, t_k)$, т.е. между моментами наступления соседних событий, причем на правом конце полуинтервала имеет место значение $w(\lambda_j \mid t_k) = w(\lambda_j \mid t_k - 0)$, на основе которого по формуле (14) находится вероятность $w(\lambda_j \mid t_k + 0)$ ($j = \overline{1,n}$), являющаяся начальной для следующего полуинтервала $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$ Таким образом, апостериорные вероятности $w(\lambda_j \mid t)$ в моменты наступления событий $t_1, t_2, \ldots$ претерпевают разрывы первого рода.

4. Явный вид апостериорных вероятностей в зависимости от времени

Рассмотрим $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 0, 1, \ldots$) – полуинтервал времени между моментами наступления соседних k-го и $k+1$-го событий, либо, если $k = 0$, между моментом начала наблюдения за потоком и

моментом наступления 1-го события. Следующая теорема определяет решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (10) на временной оси в явном виде.

Теорема 2. Апостериорные вероятности состояний обобщtнного асинхронного потока событий $w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$, на полуинтервале времени $[t_k, t_{k+1})$, $k=0,1,\ldots$, определяются формулой

$$w(\lambda_j \mid t) = \sum_{s=1}^{n} c_s^{(k)} \gamma_{js} e^{\omega_s (t-t_k)} \Big/ \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c_s^{(k)} \gamma_{ls} e^{\omega_s (t-t_k)}, \; j=\overline{1,n}, \; t_k \le t < t_{k+1}, \; k=0,1,\ldots; \qquad (21)$$

$w(\lambda_j \mid t_0) = w(\lambda_j \mid t_0+0) = \pi_j$; $w(\lambda_j \mid t_k) = w(\lambda_j \mid t_k+0)$, $k=1,2,\ldots$; ω_s – корни (собственные числа) характеристического уравнения $\det \mathbf{D} = 0$, $\mathbf{D} = \|d_{sl}\|_1^n$, $d_{sl} = a_{sl}$ ($s,l=\overline{1,n}$, $s \ne l$), $d_{ss} = a_{ss} - \omega$ ($s=\overline{1,n}$), $a_{sl} = [(1-p_{ls})\alpha_{ls} - \lambda_l \delta_{ls}]$, δ_{ls} – символ Кронекера, $s,l=\overline{1,n}$; γ_{js} – компоненты собственного вектора $\boldsymbol{\gamma}^{(s)} = (\gamma_{1s},\ldots,\gamma_{ns})^T$, $j,s=\overline{1,n}$ (либо γ_{ls}; $l,s=\overline{1,n}$), определяемые из уравнения $(\mathbf{A}-\omega_s\mathbf{E})\boldsymbol{\gamma}^{(s)} = 0$, $s=\overline{1,n}$, в котором $\gamma_{ns}=1$ ($s=\overline{1,n}$), $\mathbf{A} = \|a_{sl}\|_1^n$, $\mathbf{E}$ – единичная матрица; коэффициенты $c_s^{(k)}$ являются решением системы линейных алгебраических уравнений: $\sum_{s=1}^{n} c_s^{(k)} \gamma_{js} = w(\lambda_j \mid t_k+0)$, $j=\overline{1,n}$, $k=0,1,\ldots$; вероятность $w(\lambda_j \mid t_k+0)$, $k=1,2,\ldots$, определяется формулой пересчtта (14), в которой $w(\lambda_i \mid t_k-0)$, $i=\overline{1,n}$, вычисляется по формуле

$$w(\lambda_i \mid t_k-0) = \sum_{s=1}^{n} c_s^{(k-1)} \gamma_{is} e^{\omega_s (t_k - t_{k-1})} \Big/ \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c_s^{(k-1)} \gamma_{ls} e^{\omega_s (t_k - t_{k-1})}, \; i=\overline{1,n}, \; k=1,2,\ldots \qquad (22)$$

Доказательство. Решим систему нелинейных дифференциальных уравнений (10) на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k=0,1,\ldots$, с начальным условием $w(\lambda_j \mid t_k) = w(\lambda_j \mid t_k+0)$, $j=\overline{1,n}$, путtм сведения et к системе линейных дифференциальных уравнений. Преобразуем систему (10). Обозначим $z_{ij} = (1-p_{ij})\alpha_{ij} - \delta_{ij}$ ($i,j=\overline{1,n}$), $\Psi(t) = \sum_{i=1}^{n}[\lambda_i + \sum_{s=1}^{n} p_{is}\alpha_{is}] w(\lambda_i \mid t)$. Тогда (10) примет вид:

$$\frac{dw(\lambda_j \mid t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} w(\lambda_i \mid t) + \Psi(t) w(\lambda_j \mid t), \qquad (23)$$

$$j=\overline{1,n}, t_k \le t < t_{k+1}, \; w(\lambda_j \mid t_k) = w(\lambda_j \mid t_k+0), \; k=0,1,\ldots$$

Произведем замену искомых функций $w(\lambda_j \mid t)$ в (23):

$$w(\lambda_j \mid t) = y_j(t) \exp[\int_{t_k}^{t} \Psi(\tau)\, d\tau], \; j=\overline{1,n}, \; t_k \le t < t_{k+1},$$

$$w(\lambda_j \mid t_k) = w(\lambda_j \mid t_k+0) = y_j(t_k+0), \; k=0,1,\ldots \qquad (24)$$

Подставляя (24) в (23), находим

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} y_i(t), \; j=\overline{1,n}, \; t_k \le t < t_{k+1}, \; y_j(t_k) = y_j(t_k+0) = w(\lambda_j \mid t_k+0), \; k=0,1,\ldots \qquad (25)$$

Относительно $y_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, получена система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение системы (25) выпишется в виде [32]:

$$y_j(t) = \sum_{s=1}^{n} c_s^{(k)} \gamma_{js} e^{\omega_s (t-t_k)}, \; j=\overline{1,n}, \; t_k \le t < t_{k+1}, \; y_j(t_k) = y_j(t_k+0) = w(\lambda_j \mid t_k+0), \; k=0,1,\ldots \qquad (26)$$

Так как $\sum_{l=1}^{n} w(\lambda_l \mid t) = 1$, $t_k \le t < t_{k+1}$, $k=0,1,\ldots$, то из (24), учитывая (26), получаем

$$\exp[\int_{t_k}^{t} \Psi(\tau)\, d\tau] = 1 \Big/ \sum_{l=1}^{n} y_l(t) = 1 \Big/ \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c_s^{(k)} \gamma_{ls} e^{\omega_s (t-t_k)}, \; t_k \le t < t_{k+1}, \; k=0,1,\ldots \qquad (27)$$

Подставляя (26), (27) в (24), приходим к (21). Теорема 2 доказана.

Формулы (14), (20)–(22) позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорных вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$, в любой момент времени t ($t \ge t_0 = 0$):

1) в момент времени $t_0 = 0$ задаются вероятности $w(\lambda_j \mid t_0 + 0) = \pi_j$, где π_j – решение системы (20), $j=\overline{1,n}$;

2) по формуле (21) рассчитываются вероятности $w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$, в любой момент времени t ($0 < t < t_1$), где t_1 – момент наблюдения первого события потока;

3) по формуле (22) рассчитываются вероятности $w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$, в момент времени t_1: $w(\lambda_j \mid t_1) = w(\lambda_j \mid t_1 - 0)$; затем по формуле (14) производится пересчет апостериорных вероятностей в точке $t = t_1$, при этом вероятности $w(\lambda_j \mid t_1 + 0)$, $j=\overline{1,n}$, являются начальными условиями для $w(\lambda_j \mid t)$ на следующем шаге алгоритма;

4) по формуле (21) рассчитываются апостериорные вероятности $w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$, для любого t ($t_1 \le t < t_2$), где t_2 – момент времени наступления второго события потока, и т.д.

Параллельно по ходу вычисления апостериорных вероятностей $w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$, в момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) по критерию максимума апостериорной вероятности: $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, если $w(\lambda_i \mid t) = \max w(\lambda_j \mid t)$, $j=\overline{1,n}$.

Заключение

Результаты, полученные в статье, дают возможность производить оценку состояний обобщенного асинхронного потока событий с произвольным (конечным) числом состояний по результатам текущих наблюдений (в течение некоторого временного интервала) за потоком. Это позволяет системе массового обслуживания адаптироваться (оперативно варьировать дисциплину обслуживания, режимы обслуживания и свою структуру) к изменяющимся состояниям потока.

Выражения (14), (20)–(22) для оценки состояний обобщенного асинхронного потока событий с произвольным числом состояний получены в явном виде, что позволяет производить вычисления без привлечения численных методов. Сам же алгоритм оценивания состояний потока обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, is. 3. P. 433–441.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
3. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
4. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
5. Diamond J.E., Alfa A.S. The MAP/PH/1 retrial queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1998. V. 14. P. 1151–1177.
6. Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю., Шифердекер И.Ю. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке платежей // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С. 36–43.
7. Card H.C. Doubly stochastic Poisson processes in artificial neural learning // Neural Networks, IEEE Transactions. 1998. V. 9, is. 1. P. 229–231.

8. Лившиц К.И., Ульянова Е.С. Модель управления запасами однородной продукции с релейным управлением темпом производства и MMP-потоком моментов продаж // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 44. С. 50–61.
9. Башарин Г.П., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова И.А. Новый этап развития математической теории телетрафика // Автоматика и телемеханика. 2009. № 12. С. 16–28.
10. Basharin G.P., Gaidamaka Y.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // Automatic Control and Computer Science. 2013. V. 47, is. 2. P. 62–69.
11. Вишневский В.М., Ларионов А.А. Открытая сеть массового обслуживания с коррелированными входными потоками для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016) : материалы XV Междунар. конф. Катунь, 12–16 сентября 2016. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. Ч. 1. С. 36–50.
12. Vishnevsky V.M., Larionov A.A., Smolnikov R.V. Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications : proc. of the eighteenth Int. Scientific Conf. (DCCN–2015) (Moscow, October 19–22, 2015). Moscow : ICS RAS, 2015. P. 27–35.
13. Вишневский В.М., Ляхов А.И. Оценка пропускной способности локальной беспроводной сети при высокой нагрузке и помехах // Автоматика и телемеханика. 2001. № 8. С. 81–96.
14. Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Самуйлов К.Е. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи. М. : Изд-во РУДН, 2008. 72 с.
15. Дудин А.Н., Клименок В.И. Расчет необходимого числа каналов в современных телекоммуникационных сетях // Информатизация образования. 2005. № 4. С. 56–68.
16. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Теория телетрафика мультисервисных сетей. М. : Изд-во РУДН, 2007. 191 с.
17. Ниссенбаум О.В., Пахомов И.П. Аппроксимация сетевого трафика моделью альтернирующего потока событий // Прикладная дискретная математика. 2009. № 1. С. 78–79.
18. Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова И.А. Математическая модель управления доступом в сетях Triple play // IV Междунар. конф. по проблемам управления : сб. трудов. М. : Изд-во ИПУ, 2009. С. 1722–1730.
19. Горцев А.М., Нежельская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1 (14). С. 13–21.
20. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event stream // Automatika i telemekhanika. 2008. Is 9. P. 76–93.
21. Gortsev A.M., Solov'ev A.A. Joint probability density of interarrival interval of a flow of physical events with unextendable dead time period // Russian Physics Journal. 2014. V. 57, is. 7. P. 973–983.
22. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 18–25.
23. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, is. 3. P. 283–290.
24. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability // Automation and Remote Control. 2002. V. 63, is. 3. P. 511–515.
25. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
26. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 44–65.
27. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Сов. радио, 1968. Кн. 2. 504 с.
28. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
29. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Сов. радио, 1968. 256 с.
30. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963. 236 с.

31. Лившиц К.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Томск : Изд-во НТЛ, 2011. 252 с.
32. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.

Поступила в редакцию 23 ноября 2018 г.

Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. (2019) OPTIMAL ESTIMATE OF THE STATES OF A GENERALIZED ASYNCHRONOUS EVENT FLOW WITH AN ARBITRARY NUMBER OF STATES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 12–23

DOI: 10.17223/19988605/47/2

In this paper, we consider a generalized asynchronous flow of events (hereinafter called a flow). The flow accompanying process (intensity process) is a piecewise constant random process $\lambda(t)$ with n states: $\lambda(t)$ takes values from a discrete set of values $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$, $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_n \geq 0$. Let's say that the i-th state of the process $\lambda(t)$ holds if $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, $n = 2,3,...$. If the i-th state takes place, then during the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$ there is a Poisson flow of events with parameter (intensity) λ_i, $i = \overline{1,n}$. The duration of the process $\lambda(t)$ (flow) in the i-th state is distributed according to the exponential law with the parameter α_i: $F_i(\tau) = 1 - e^{-\alpha_i \tau}$, $\tau \geq 0$, $i = \overline{1,n}$. The process $\lambda(t)$ is a fundamentally unobservable process; we can only observe time moments of occurrence of flow events $t_1, t_2, ..., t_k, ...$

We consider the stationary mode of the flow functioning. In these premises, $\lambda(t)$ is an accompanying stationary piecewise constant hidden transitive Markov process with an arbitrary number of states n ($n = 2,3,...$).

A generalized asynchronous flow (a generalized MMPP-flow) is a generalization of the asynchronous flow. The generalization is as follows: at the moment of transition of the process $\lambda(t)$ from the i-th state to the j-th, an additional event is triggered with probability p_{ij}; the transition occurs at an arbitrary time moment, not related to the moment of occurrence of the Poisson flow event with parameter λ_i, while initiating an additional event occurs in the j-th state, $i, j = \overline{1,n}$, $j \neq i$; transition and initiation of an additional event occur instantly.

It is required, on the basis of the moments of occurrence of events observed from moment t_0 to moment t, to estimate the state of the process $\lambda(t)$ at the moment t. We denote the estimate of the state of the process $\lambda(t)$ at the time moment t as $\hat{\lambda}(t)$. We found an explicit form for a posteriori probabilities $w(\lambda_i \mid t) = w(\lambda_i \mid t_1,..., t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i \mid t_1,..., t_m, t)$, $i = \overline{1,n}$, that at the time moment t the value of the process $\lambda(t) = \lambda_i$ (m is the number of events that occurred at the time moments $t_1,..., t_m$ at the observation interval (t_0, t)), here $\sum_{i=1}^{n} w(\lambda_i \mid t) = 1$. The decision on the state of the process $\lambda(t)$ obtained according to criterion of a posteriori probability maximum.

The algorithm for calculating a posteriori probabilities $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$, at any time moment t ($t \geq t_0 = 0$) was formulated according to analytical formulas. In parallel, as we calculate a posteriori probabilities $w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$, we can make a decision on the state of the process $\lambda(t)$ at the time moment t: $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, if $w(\lambda_i \mid t) = \max w(\lambda_j \mid t)$, $j = \overline{1,n}$.

Keywords: generalized asynchronous doubly stochastic flow of events; a posteriori probability; optimal states estimation.

GORTSEV Alexander Mikhailovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: a-gortsev@mail.ru

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: ludne@mail.ru

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proc. of the Cambridge Philosophical Society.* 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
2. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. CH. 1 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
3. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability.* 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
4. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models.* 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174

5. Diamond, J.E. & Alfa, A.S. (1998) The MAP/PH/1 retrial queue. *Communications in Statistics Stochastic Models.* 14. pp. 1151–1177. DOI: 10.1080/15326349808807518
6. Livshits, K.I., Sukhotina, L.Yu. & Shiferdeker, I.Yu. (2007) Mathematical model of incomercial fund functioning under the twice stohastic payments flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1. pp. 36–43. (In Russian).
7. Card, H.C. (1998) Doubly stochastic Poisson processes in artificial neural learning. *Neural Networks, IEEE Transactions.* 9(1). pp. 229–231. DOI: 10.1109/72.655046
8. Livshits, K.I. & Ulyanova, E.S. (2018) Model of inventory control of homogeneous products with relay control of production rate and MMP-flow of sales moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 44. pp. 50–61. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/44/6
9. Basharin, G.P., Samouylov, K.E., Yarkina, N.V. & Gudkova, I.A. (2009) A new stage in mathematical teletraffic theory. *Automation and Remote Control.* 70(12). pp. 1954–1964. DOI: 10.1134/S0005117909120030
10. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks. *Automatic Control and Computer Science.* 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
11. Vishnevsky, V.M. & Larionov, A.A. (2016) [Open queueing network with correlated input flows for estimating the performance of broadband wireless networks]. *Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM 2016). Proc. of the 15th International Conference.* September 12–16, 2016. Tomsk. pp. 36–50. (In Russian).
12. Vishnevsky, V.M., Larionov, A.A. & Smolnikov, R.V. (2015) Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes. *Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications.* Proc. of the 18th International Conference (DCCN–2015). Moscow. October 19–22, 2015. Moscow: ICS RAS. pp. 27–35.
13. Vishnevskii, V.M. & Lyakhov, A.I. (2001) A wireless LAN under high load and in noise: throughput evaluation. *Automation and Remote Control.* 62(8). pp. 1298–1311. DOI: 10.1023/A:1010257612786
14. Gaidamaka, Yu.V., Zaripova, E.R. & Samouylov, K.E. (2008) *Modeli obsluzhivaniya vyzovov v seti sotovoy podvizhnoy svyazi* [Call Service Models in Cellular Mobile Network]. Moscow: PFUR.
15. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2005) Raschet neobkhodimogo chisla kanalov v sovremennykh telekommunikatsionnykh setyakh [Calculation of the required number of channels in modern telecommunication networks]. *Informatizatsiya obrazovaniya.* 4. pp. 56–68.
16. Naumov, V.A., Samouylov, K.E. & Yarkina, N.V. (2007) *Teoriya teletrafika mul'tiservisnykh setey* [Teletraffic Theory of Multiservice Networks]. Moscow: PFUR.
17. Nissenbaum, O.V. & Pakhomov, I.P. (2009) Approximation of network traffic by the alternating event flow model. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika – Applied Discrete Mathematics.* 1. pp. 78–79. (In Russian).
18. Samouylov, K.E., Yarkina, N.V. & Gudkova, I.A. (2009) [Mathematical model of access control in Triple play networks]. *Proc. of the Fourth International Conference on Control Problems.* Moscow: ICS RAS. pp. 1722–1730. (In Russian).
19. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) On relationship of MC-flows and MAP-flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(14). pp. 13–21. (In Russian).
20. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event stream. *Automation and Remote Control.* 9. pp. 76–93.
21. Gortsev, A.M. & Soloviev, A.A. (2014) Joint probability density of interarrival interval of a flow of physical events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal.* 57(7). pp. 973–983. DOI: 10.1007/s11182-014-0333-4
22. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science.* 487. pp. 18–25. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
23. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications.* 21(3). pp. 283–290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
24. Vasilieva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control.* 63(3). pp. 511–515. DOI: 10.1023/A:1014718921138
25. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time at a generalized semy-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(30). pp. 27–37. (In Russian).
26. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal estimation of states of the asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2(11). pp. 44–65. (In Russian).
27. Levin, B.R. (1968) *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Moscow: Sovetskoe radio.
28. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [Theory of Probability and Random Processes]. Tomsk: NTL.
29. Khazen, E.M. (1968) *Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods of optimal statistical decisions and problems of optimal control]. Moscow: Sovetskoe radio.
30. Khinchin, A.Ya. (1963) *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Works on the Mathematical Theory of Queuing]. Moscow: Fizmatgiz.
31. Livshits, K.I. (2011) *Lineynaya algebra i analiticheskaya geometriya* [Linear Algebra and Analytic Geometry]. Tomsk: NTL.
32. Elsgolts, L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [The Differential Equations and Calculus of Variations]. Moscow: Nauka.

УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/47/3

M.Tz. Dimitrov

HEAVY TRAFFIC ANALYSIS OF A QUEUE WITH BATCH MMAP

A single-server queue with work conserving FIFO discipline is considered. The input process is a multiple marked. Markovian arrival process governed by a continuous-time finite state Markovian chain. The service time distributions of customers may be different for different arrival streams. The virtual waiting time is considered under a heavy traffic. The probability distributions of virtual waiting time and state of the random environment are asymptotically independent. The virtual waiting time is asymptotically exponential with the mean depending on the characteristics of the modulated process.
Keywords: single-server queue; FIFO; multiple batch Markovian arrival process; virtual waiting time; heavy traffic analysis.

In this paper we consider a single-server work conserving queue with FIFO discipline and the following characteristics. The arrival process is a multiple batch arrival flows of customers governed by a continuous time finite state Markov chain. The service time distributions of customers may be different for arrival flows. This model was considered for the first time in [1]. The most popular Markovian arrival flows of customers is introduced in [2]. There are two extensions of arrival process. One is batch introduced in [3] that allows batch arrivals and the other is marked introduced in [4] that explicitly represents possibly correlated process considered in this paper and in paper [1] is a further extension of MAP introduced in [2–4]. We assume that the service time distributions of customers from respective arrival streams are different from one another.

In this paper we consider asymptotic behavior of a stationary distribution of the virtual waiting time and the state of a random environment under a heavy traffic. The asymptotic distribution of a stationary distribution of a virtual waiting time is an exponential with the mean depending on the parameters of random environment. In the present study we prove a heavy traffic limit theorem for steady state virtual waiting time for a model considered in [1]. We used analytical approach introduced in [6] which allows for a rigorous mathematical analysis of the stationary characteristics under a heavy traffic. The remainder of the paper is organized as follows. In section [2] we describe the model introduced in [1]. In section 3 we consider some preliminary results. Section 4 is devoted to main results. In section 4 we find the mean value of the virtual waiting time in a steady state, and there we show that the distribution of the environment becomes independent of the virtual waiting time in a steady state under heavy traffic conditions. The limit distribution of the virtual waiting time under heavy traffic conditions is an exponential distribution.

1. Model description

In this paper we consider a single sever queue with the following characteristics. Arrivals to the system are from K arrival streams. We call customers from the k-th ($k = 1, 2, \cdots, K$) arrival stream class k customers. Customer arrivals are governed by a continuous-time Markov chain $Z(t)$. We assume that Markov chain $Z(t)$ has finite state space $S = \{0, 1, 2, \cdots, M\}$ and is irreducible. The underlying Markov chain stais in state $i \in S$ for an exponential interval of time with a mean value μ_i^{-1}. When the sojourn time in state i has

elapsed with probability $\sigma_{i,j}(0)$ the Markov chain $Z(t)$ changes its state *i* to state *j* without arrivals. The chain $Z(t)$ changes its state *i* to state *j* and *n* customers of class *k* arrive simultaneously with probability $\sigma_{k,i,j}(n), (k \in \{1,2,\cdots,K\},\ n=1,2,\cdots)$ for convenience, let $\sigma_{i,i}=0$ for all $i \in S$. Then for all $i \in S$ $\sum_{j=0}^{j=M}(\sigma_{i,j}(0)+\sum_{k=1}^{k=K}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k,i,j}(n))=1$.We assume that service time of class *k* customers are i.i.d. according to a distribution $H_k(x)$ with a mean value h_k, and a second moment v_k. We need some notations to describe the arrival process. Let C denote an $(M+1)\times(M+1)$ matrix whose (i,j)-th element $(i,j \in \{0,1,2,\cdots,M\})$ is given by $c_{i,j}=-\mu_i$, if $i=j$ and $c_{i,j}=\sigma_{i,j}(0)\mu_i$, otherwise. Further, for $k \in \{1,2,\cdots,K\}$ we define $D_k(n),(n=1,2,\cdots)$ as an $(M+1)\times(M+1)$ matrix whose $(i,j)-$th element $(i,j \in \{0,1,2,\cdots M\})$ of $D_{k,i,j}(n)$ is given by $D_{k,i,j}(n)=\sigma_{k,i,j}(n)\mu_i$. Thus the counting process of arrivals is characterized by the set of matrices $\{C, D_1(n_1), D_2(n_2),\cdots, D_K(n_K)\}$. Customers arrive in the following way. When a state transition driven by $D_k(n)$ occurs, *n* customers of class *k* arrive simultaneously. On the other hand, when a state transition driven by *C* occurs, no customers arrive. We define $D_k(k \in \{1,2,\cdots,K\})$ and *D* as $D_k=\sum_{n=1}^{\infty}D_k(n)$, $D=\sum_{k=1}^{k=K}D_k$, respectively. Note that the infinitesimal generator of the underlying Markov chain is given by $C+D$ and $(C+D)e=0$, where *e* denotes a column vector whose elements are all equal to one. We denote by π, the stationary probability vector of the underlying Markov chain and therefore π satisfies the equation $\pi(C+D)=0$ and $\pi e=1$. Because of the finite state space and the irreducibility of the underlying Markov chain, π is uniquely determined. Note that the arrival rate λ_k of class *k* is $\lambda_k=\sum_{n=1}^{\infty}n\pi D_k(n)e$. We assume that at least one element of D_k is positive, so that $\lambda_k>0$ for all $k \in \{1,2,\cdots,K\}$. Let ρ_k denote the utilization factor of class *k* customers, $\rho_k=\lambda_k h_k$. Furthermore, we denote the overall utilization factor by $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_k$. If the utilization factor $\rho<1$ then all customers arriving to the system are eventually served. The goal of this paper is to derive the asymptotic distribution of virtual waiting time under a heavy traffic, i.e., when $\rho<1$ and $\rho \to 1$, or $\varepsilon=1-\rho \to 0$. The virtual waiting time is equivalent to the amount of work in a system. Let *V*(*t*) denote a random variable representing the stationary amount of work in a system (the total amount of unfinished services of all customers in the system). We define $F(x)$ as a $(1,M+1)$ vector whose *j*-th element represents $P\{V(t)\le x, Z(t)=j\}$. The Laplace-Stiljes transforms (LST) of $H_k(x)$ and $F(x)$ are denoted by $h_k(s)$ and $\varphi(s)$ respectively. Applying the results in [5], we obtain the *LST* $\varphi(s)$ of a distribution function $F(x)$

$$\varphi(s)=sF(0)(sI+C+\bar{D}(s))^{-1}, \tag{1}$$

where $\bar{D}(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}dD(x)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}D_k(n)h_k^n(s)$. We assume that $\mu_i=\lambda\mu_i^0$ and we will introduce the matrices $C^0, D_k(n), D_k^0, D^0, Q, Q^0$ by the equations $C=\lambda C^0$, $D_k(n)=\lambda D_k^0(n), D_k=\lambda D_k^0, D=\lambda D^0$, $Q=C+D, Q=\lambda Q^0$. Further we will also assume that all parameters except for λ are fixed, and λ increases in such a way that $\varepsilon \to 0$, or $\lambda \to \lambda^0=(\rho^0)^{-1}$, where $\rho^0=\pi\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k^0(n)h_k e$.

2.Some preliminary results

Consider the continuous Markov chain $Z(t)$ introduced in Section 1. Markov chain is with a finite space $S=\{0,1,2,\cdots,M\}$, the infinitesimal matrix $Q=C+D$ and a stationary distribution $\pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_M)$. The set of equations with respect to unknown $a_0,a_1,\cdots,a_M$

$$Qa=(\pi\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k(n)h_ke)e-\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k(n)h_ke \tag{2}$$

always has a solution, since the stationary distribution π is orthogonal to the right side of this equation. We will define matrices *A* and *R*. The matrix *A* is defined by the rows and columns with numbers $1,2,...,M$ of the matrix *Q*. The first raw and the first column of matrix *R* are equal to zero vectors, and next *K* rows and *K* columns are from matrix A^{-1}. Then a matrix *QR* looks as follows: the first raw is equal to $(0,-\frac{\pi_1}{\pi_0},...,-\frac{\pi_M}{\pi_0})$ and the first column is equal to zero vector, and next elements form the identity matrix. For any vector $x=(x_0,x_1,\cdots,x_M)$ we have

$$xQR=x-x_0\frac{\pi}{\pi_0}. \tag{3}$$

The next equation

$$(a_0,a_1,\cdots,a_M)=R[(\pi\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k(n)h_ke)e-\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k(n)h_ke] \tag{4}$$

define the solution to equation (2) when $a_0=0.$ Dividing both side of (2) by λ we get

$$Q^0a=(\pi\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k^0(n)h_ke)e-\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k^0(n)h_ke. \tag{5}$$

And the solution to equation (2) is also a solution to equation (5). From (4) follows

$$(a_0,a_1,\cdots,a_M)=R^0[(\pi\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k^0(n)h_ke)e-\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k^0(n)h_ke]. \tag{6}$$

3. The main results

The next theorem gives the mean value of a virtual waiting time in a steady state.

Theorem 1. The mean virtual waiting time *EV* is given by the formula

$$(1-\rho)EV=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k(n)v_{k,n}e+\pi(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}nD_k(n)h_k-I)a+F(0)a, \tag{7}$$

where *a* is a solution to equation (4) and

$$F(0)e=1-\rho. \tag{8}$$

Proof. Consider a *LST* $\varphi(s)$ of a vector $F(x)=(F_0(x),F_1(x),...,F_M(x))$ defined by the equation

$$\varphi(s)(sI+C+\bar{D}(s))=sF(0). \tag{9}$$

where $\operatorname{Re}s>0$. We denote by $\bar{D}(s)$ the next sum $\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}D_k(n)h_k^n(s)$ and rewrite equation (9) to be

$$\varphi(s)Q=\varphi(s)(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}D_k(n)(s)(1-h_k^n(s))-sI)+sF(0). \tag{10}$$

Post-multiplying both sides of equation (10) by vector *e* we have

$$F(0)e=\varphi(s)(I-\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty}D_k(n)\frac{1-h_k^n(s)}{s})e. \tag{11}$$

Taking the limit $s \to +0$ of both sides of (11) and taking into account that $\varphi(0) = \pi$ we get equation (8). Differentiating both sides of (11) with respect to s at $s = 0$ yields

$$(EV_0, EV_1, ..., EV_M)(I - \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} nD_k(n)h_k)e = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} nD_k(n)v_{k,n}e \tag{12}$$

for the mean value of a virtual waiting time $EV_n = E(V(t); Z(t) = n)$. Post-multiplying both sides of the equation (10) by the vector a we obtain

$$\varphi(s)Qa = s\varphi(s)(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} nD_k(n)\frac{1-h_k^n(s)}{s} - I)a + sF(0)a.$$

After differentiating this equation with respect to s at the point $s = 0$ we have

$$-(EV_0, EV_1, ..., EV_M)Qa = \pi(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} nD_K(n)h_k - I)a + F(0)a. \tag{13}$$

Now, summing (13) with (12) we get equation (7). Thus the theorem is proved.

Theorem 2. Under heavy taffic assumption

a) the random variables $\varepsilon V(t)$ and $Z(t)$ are asymptotically independent*;*

b) the random variable $V(t)$ is asymptotically exponential with the mean

$$\frac{\pi}{2\rho^0}\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} nD_k^0(n)v_{k,n}e + \frac{\pi}{\rho^0}(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} nD_k^0(n)h_k - \rho^0 I)a\,. \tag{14}$$

where *a* is a solution to equation (2).

Proof: We consider equation (10)

$$\varphi(s)Q = \varphi(s)(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)(1-h_k^n(s)) - sI) + sF(0)\,.$$

Post-multiplying both sides of this equation by the vector $e = (1,1,...,1)^{\mathrm{T}}$, taking into account that $Qe = 0$ and from (8) we get

$$\varphi(s)(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)(1-h_k^n(s)) - sI)e + \varepsilon s = 0\,. \tag{15}$$

Now, post-multiplying equation (10) by the matrix *R*, which was introduced in section 3, from (3) follows the next equation

$$\varphi(s) = \frac{\varphi_0(s)}{\pi_0}\pi + \varphi(s)(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)(1-h_k^n(s)) - sI)R + sF(0)R\,. \tag{16}$$

Replacing the vector $\varphi(s)$ in the right hand side of equation (16) with the help of (16) we have the next equation

$$\varphi(s) = \frac{\varphi_0(s)}{\pi_0}\pi[I + (\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)(1-h_k^n(s)) - sI)R] + sY(s)\,, \tag{17}$$

where $Y(s) = s\varphi(s)[(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)\frac{1-h_k^n(s)}{s} - I)R]^2 + F(0)R\,[\mathrm{I}+(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)((1-h_k^n(s)) - sI)R]$. Substituting (17) into (15) we can express $\varphi_0(s)$ as

$$\varphi_0(s) = \pi_0\frac{A(s)}{B_1(s) + B_2(s)}, \tag{18}$$

Where $A(s) = s\varepsilon + sY(s)(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)(1-h_k^n(s)) - sI)e,$ $B_1(s) = -\pi(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)(1-h_k^n(s)) - sI)e\,,$

$B_2(s) = -\pi(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)(1-h_k^n(s)) - sI)R(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)(1-h_k^n(s)) - sI)e\,.$ Now, replace s by εs in

$A(s), B_1(s), B_2(s)$ and λ increases in such a way that $\varepsilon \to 0$, $\lambda \to \lambda^0 = (\pi \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k^0(n) h_k e)^{-1} = (\rho^0)^{-1}$. Further more, we use the next limits $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-h_k^n(\varepsilon s)}{\varepsilon s} = nh_k$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{h_k^n(\varepsilon s)-1+nh_k\varepsilon s}{(\varepsilon s)^2} = \frac{v_{k,n}}{2}$. Then

$$A(\varepsilon s) = \varepsilon^2 s + \varepsilon^2 s^2 Y(\varepsilon s)(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)\frac{1-h_k^n(\varepsilon s)}{\varepsilon s} - I)e,$$

$$B_1(\varepsilon s) = \varepsilon s - \pi\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} nD_k(n)h_k e\varepsilon s + \pi\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)(h_k^n(\varepsilon s) + nh_k\varepsilon s - 1)e = \varepsilon^2 s + \pi\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)(h_k^n(\varepsilon s) + nh_k\varepsilon s - 1),$$

$$B_2(\varepsilon s) = -\pi\varepsilon^2 s^2 (\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)\frac{1-h_k^n(\varepsilon s)}{\varepsilon s} - I)R(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k(n)\frac{1-h_k^n(\varepsilon s)}{\varepsilon s} - I)e\,.$$

From (18) follows

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_0(\varepsilon s) = \pi_0 \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A(\varepsilon s)/\varepsilon^2 s}{(B_1(\varepsilon s)+B_2(\varepsilon s))/\varepsilon^2 s} = \pi_0\frac{1}{1+Ns}\,,$$

where $N = \frac{1}{2\rho^0}\pi\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k^0(n)v_{k,n} + \frac{-\pi}{\rho^0}(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} nD_k^0(n)h_k - \rho^0 I)R^0\ (\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} nD_k^0(n)h_k e - \rho^0 e)$. Using (6) we can transform the parameter N to the form

$$N = \frac{1}{2\rho^0}\pi\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} D_k^0(n)v_{k,n} + \frac{\pi}{\rho^0}(\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{\infty} nD_k^0(n)h_k - \rho^0 I)a.$$

Finally, from (16) and (17) we get that there exists

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi_0(\varepsilon s)}{\pi_0}\pi = \pi\frac{1}{1+Ns}.$$

Thus the theorem is proved.

4. Conclusion

We studied the virtual waiting time of a queueing model introduced in [1]. We used the analytical approach introduced in [6] and derived that the scaled virtual waiting time converges to an exponentialy distributed random variable in a heavy traffic. This limit random variable is independent of the state of the environment.

REFERENCES

1. Massuyama, H. & Takine, T. (2003) Analysis of computation of the joint queue length distribution in a FIFO single-server queue with multiple batch Markovian arrival streams. *Stochastic Models*. 19. pp. 349–381.
2. Lucantoni, D.M., Meier-Hellstern, K.S. & Neuts, M.F. (1990) A single server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival process. *Advances in Applied Probability*. 22. pp. 676–705. DOI: 10.2307/1427464
3. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Stochastic Models.* 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
4. He, Q.M. (1996) Queues with Marked customers. *Advances in Applied Probability*. 28. pp. 567–587. DOI: 10.1017/S000186780004862X
5. Takine, T. & Hasegawa, T. (1994) The workload in the $MAP|G|1$ queue with state dependent services: Its applications to a queue with preemptive resume priority. *Stochastic Models.* 10. pp. 183–204. DOI: 10.1080/15326349408807292
6. Falin, G.I. & Falin, A.I. (1999) Heavy traffic analysis of $M|G|1$ type queueing systems with Markov modulated arrivals. *TOP*. 7(2). pp. 279–291. DOI: 10.1007/BF02564727

Received: December 21, 2018

Dimitrov M.Tz. (2019) HEAVY TRAFFIC ANALYSIS OF A QUEUE WITH BATCH MMAP. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 24–29

DOI: 10.17223/19988605/47/3

Димитров М.Ц. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВХОДЯЩИМ МАРКОВСКИМ МАРКИРОВАНЫМ ПОТОКОМ. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2019. № 47. С. 24–29

В работе рассматривается однолинейная система массового облуживания с дисциплиной обслуживания в порядке поступления, на вход которой поступает групповой марковский маркированый поток. Времена обслуживания требований зависят от номера поступающего потока. Исследован двумерный случайный процес, первая компонента которого является номером состояния сопроводящей марковской цепи, вторая – виртуальное время ожидания. Для его исследования предложен метод асимптотического анализа при условии высокой интенсивности входящего потока. Показано, что распределение состояния марковской цепи и виртуального времени ожидания независимы в стационарном режиме. Получено асимптотическое распределение виртуального времени ожидания в стационарном режиме в условиях большой нагрузки.

Ключевые слова: однолинейная система обслуживания; FIFO; марковский маркированый входящий поток; виртуальное время ожидания; высокая интенсивность входящего потока.

DIMITROV Mitko Tzanov (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria).
E-mail: mcdimitrov@abv.bg

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/47/4

Ю.Г. Дмитриев, Ж.Н. Зенкова, А.Г. Зенков

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ЦЕНОВОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ PSM

Анализируются асимптотические свойства оценок ценовых значений, полученных методом измерения ценовой чувствительности PSM (Price Sensitivity Meter), который ориентирован на потребительский спрос, показаны их асимптотическая нормальность и состоятельность, построены доверительные интервалы. Метод апробирован на реальных данных о ценовых предпочтениях потребителей нового программного продукта, выводимого на рынок товаров производственного назначения B2B; предприятию даны рекомендации относительно установления конечной цены на товар-новинку.

Ключевые слова: ценообразование; метод измерения ценовой чувствительности PSM; медиана; асимптотическая нормальность.

Вопрос установления рыночной цены, по которой предприятие будет продавать свою продукцию, особенно если это абсолютно новый для фирмы товар, является не просто ключевым, а жизненно важным для организации любой формы собственности [1]. Затратный подход не всегда позволяет найти такую цену, которую покупатели смогли бы воспринимать как приемлемую и справедливую. Методы ценообразования, ориентированные на спрос [2], решают данную проблему и помогают найти ориентировочные диапазоны справедливых цен еще до начала этапа внедрения товара на рынок. Одним из таких методов является метод измерения ценовой чувствительности – Price Sensitivity Meter (PSM), предложенный датским экономистом Питером Ван Вестендорпом [3]. Его описание приведено ниже.

Данная методика широко применяется за рубежом, однако достаточно редко используется в отечественной маркетинговой практике. Статистические свойства метода изучены весьма слабо, притом этот факт признается также и зарубежными исследователями [4–7]. В работах [8–12] метод PSM рекомендуется к применению за простоту как расчетов, так и интерпретации результатов, а также за относительную дешевизну стоимости маркетинговых исследований. В то же время в [8–10] метод подвергается критике, поскольку его результаты базируются на потребительских ощущениях, которые, с одной стороны, не имеют непосредственной связи с ожидаемой целевой прибылью компании-производителя, а с другой – не могут рассматриваться как четко осознаваемые потребителем данные [10], с чем стоит поспорить, так как после использования товара в течение некоторого временного периода, что предусматривается методом, представители целевой аудитории успевают получить емкое и детальное представление о товаре, а значит, смогут адекватно оценить его потребительскую ценность и указать справедливые, по их мнению, значения цен в процессе опроса.

В [4] предлагается модификация метода PSM, основанная на системе линейных (Чапмана–Колмогорова) и нелинейных дифференциальных уравнений, найдено ее аналитическое решение, представляющее собой комбинацию логистических регрессий. В [13] свойства метода изучены с помощью имитационного моделирования, показано влияние количества опрашиваемых на точность метода. В [13–20] предлагаются модификации на случай как наличия цензурированных данных, так и знания различной дополнительной информации; с помощью имитационного моделирования и метода бутстреп изучено влияние модификаций на свойства метода PSM; показано, что цензурирование негативно сказывается на точности оценивания ценовых предпочтений, в то время как привлечение дополнительной информации может улучшить его качество, в том числе и при наличии любого вида цензурирования.

В данной работе аналитически показана асимптотическая нормальность оценок ценовых значений, полученных с помощью метода PSM. Это позволяет находить доверительные интервалы для каждого из искомых уровней цен.

1. Метод измерения ценовой чувствительности PSM

Рассмотрим последовательность проведения маркетингового исследования согласно методу PSM. На начальном этапе N представителям целевой аудитории предлагается попользоваться товаром на протяжении некоторого периода времени для того, чтобы они смогли объективно воспринять его потребительскую ценность. Далее каждому участнику задаются следующие вопросы:

1. Ниже какого уровня цены x_1 товар кажется Вам настолько дешевым, что начинают возникать подозрения о том, что он некачественный или поддельный?

2. Какая цена x_2 для Вас является приемлемой для покупки товара?

3. Какая цена x_3 кажется Вам высокой, однако Вы еще рассматриваете вопрос о покупке?

4. Начиная с какого уровня цены x_4 товар кажется Вам настолько дорогим, что вопрос о покупке даже не ставится?

Рассмотрим цены в пунктах 1–4 как случайные величины X_j, $j=\overline{1,4}$, с соответствующими функциями распределения $F_j(x)=\mathrm{P}\left(X_j<x\right)$. Тогда результаты опроса можно представить как четырехмерную выборку $\left(X_{k1},X_{k2},X_{k3},X_{k4}\right)$, $k=\overline{1,N}$, при этом выборочные элементы можно рассматривать как независимые между собой, так как в процессе исследования представители целевой аудитории не могут оказать влияние друг на друга (опрос проводится тайно, желательно опрашивать каждого респондента отдельно).

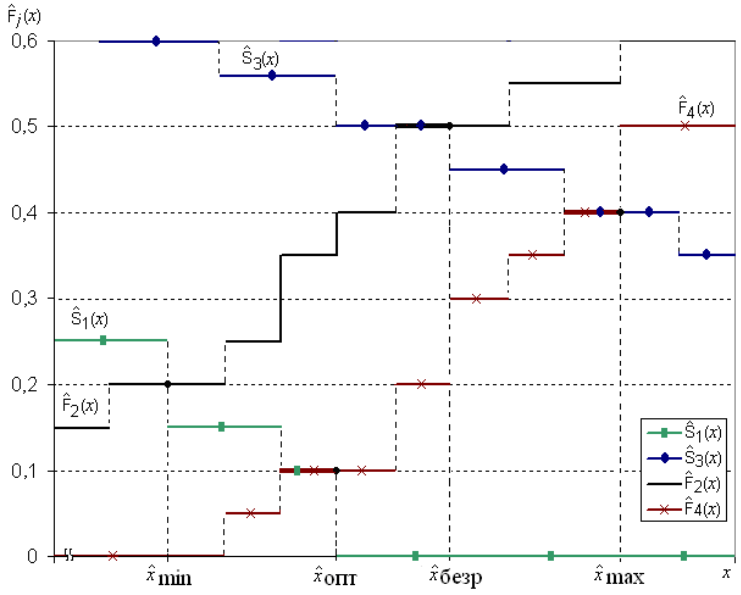


Рис. 1. Кривые ценовой чувствительности метода PSM

Fig. 1. Price sensitivity curves of PSM method

По каждому выборочному вектору $\left\{X_{1j},X_{2j},...,X_{Nj}\right\}$ случайной величины X_j, $j=\overline{1,4}$, построим эмпирическую функцию распределения $\hat{F}_j(x)$ по формуле

$$\hat{F}_j(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{I}_{[0,x)}\left(X_{kj}\right), \tag{1}$$

где $\mathrm{I}_{[0,x)}(\cdot)$ – индикаторная функция. Для i = 1, 3 рассмотрим эмпирическую оценку функции выживания

$$\hat{S}_i(x) = 1 - \hat{F}_i(x). \tag{2}$$

Отобразим функции (1) и (2) на рис. 1. Эти функции называют *кривыми ценовой чувствительности* (Price Sensitivity Curves). Обычно на практике кривые предварительно кусочно-линейно сглаживают, а затем находят искомые цены (рис. 2).

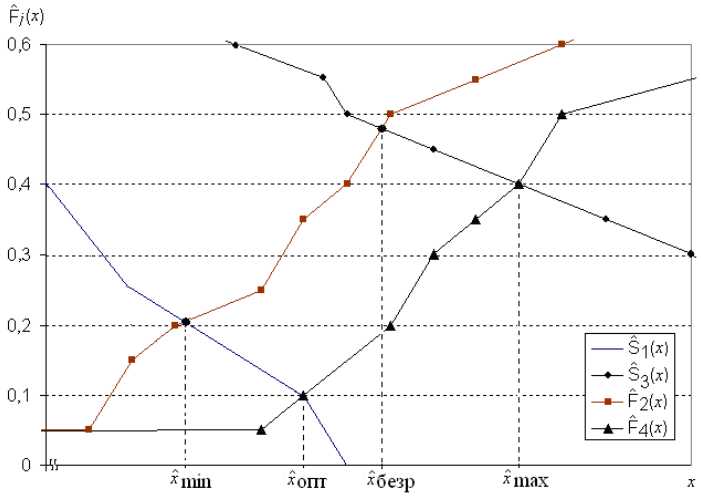


Рис. 2. Сглаженные кривые метода ценовой чувствительности PSM
Fig. 2. Smoothed price sensitivity curves of PSM method

В качестве рекомендуемого диапазона цен рассматривается отрезок, левый конец которого – абсцисса точки пересечения $\hat{F}_4(x)$ и $\hat{S}_1(x)$ – «оптимальная цена» $\hat{x}_{\text{опт}}$, правый – значение, соответствующее пересечению $\hat{F}_2(x)$ и $\hat{S}_3(x)$ – «ожидаемая цена», или «точка безразличия» $\hat{x}_{\text{безр}}$. Назначать цену ниже минимально возможной $\hat{x}_{\min}$ не рекомендуется, так как потребители будут воспринимать товар как некачественный. Если назначить цену выше максимально возможной $\hat{x}_{\max}$, то потребители будут воспринимать товар как необоснованно дорогой.

2. Расчет ценовых значений методом PSM

Рассмотрим случай, когда метод PSM базируется на не сглаженных кривых, а на эмпирических функциях распределения, представляющих из себя ступенчатые функции. Заметим, что пересечением оценок кривых ценовой чувствительности могут являться отрезки, при этом в качестве искомой цены будем рассматривать их правые границы. Например, для точки безразличия $\hat{x}_{\text{безр}}$ (см. рис. 1) формула для определения цены принимает вид:

$$\hat{x}_{\text{безр}} = \max\left\{ x : \hat{F}_2(x) = \hat{S}_3(x) \right\}.$$

Если несколько участников исследования назвали одинаковые цены, то возможна ситуация, когда пересечения не существует (см. $\hat{x}_{\min}$ на рис. 1), в результате искомая цена определяется следующим образом:

$$\hat{x}_{\min} = x : \hat{S}_1(x+0) \le \hat{F}_3(x) < \hat{S}_1(x).$$

В итоге для $i = 1,\ 3$ и $j = 2,\ 4$

$$\hat{x}^{(ij)} = \begin{cases} \max\left\{x : \hat{F}_j(x) = \hat{S}_i(x)\right\} \\ x : \hat{S}_i(x+0) \le \hat{F}_j(x) < \hat{S}_i(x), \\ x : \hat{F}_i(x) < \hat{S}_j(x) \le \hat{F}_i(x+0), \end{cases}$$

при этом $\hat{x}^{(12)} = \hat{x}_{\min}$, $\hat{x}^{(14)} = \hat{x}_{\text{опт}}$, $\hat{x}^{(32)} = \hat{x}_{\text{безр}}$, $\hat{x}^{(34)} = \hat{x}_{\max}$. Заметим, что для $i = 1,\ 3$ и $j = 2,\ 4$ истинное значение $x^{(ij)}$ есть абсцисса точки пересечения теоретических кривых $F_i(x)$ и $S_j(x)$, которая определяется в общем виде из уравнения

$$F_j(x) = 1 - F_i(x) \tag{3}$$

или, что то же самое,

$$\left(F_i(x) + F_j(x)\right)/2 = 0{,}5.$$

Для $i = 1,\ 3$ и $j = 2,\ 4$ рассмотрим функции

$$G_{ij}(x) = \left(F_i(x) + F_j(x)\right)/2. \tag{4}$$

Очевидно, что $G_{ij}(x)$ есть функция распределения. Таким образом, решением уравнения (3) является медиана функции распределения (4), то есть такое значение $x_{0.5}^{(ij)}$, что $G_{ij}\left(x_{0.5}^{(ij)}\right) = 0{,}5$ или

$$x_{0,5}^{(ij)} = G_{ij}^{-1}(0{,}5) = \sup\left\{x : G_{ij}(x) \le 0{,}5\right\}, \tag{5}$$

где $G_{ij}^{-1}(\cdot)$ – обратная к $G_{ij}(x)$ функция.

Найдем статистическую оценку решения (5). Для этого по двумерной выборке $\left(X_{ki}, X_{kj}\right)$, $k = \overline{1, N}$, для $i = 1,\ 3$ и $j = 2,\ 4$ построим оценки функции распределения (4)

$$\hat{G}_{ij}(x) = \left(\hat{F}_i(x) + \hat{F}_j(x)\right)/2. \tag{6}$$

Оценки (6) являются несмещенными, т.е. $M\hat{G}_{ij}(x) = G_{ij}(x)$, с дисперсией $D\hat{G}_{ij}(x) = \sigma_{ij}^2(x)/N$, где

$$\sigma_{ij}^2(x) = \tfrac{1}{4} \cdot \left(F_i(x)\left(1 - F_i(x)\right) + F_j(x)\left(1 - F_j(x)\right) + 2\left(F_{ij}(x,x) - F_i(x)F_j(x)\right)\right) =$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \left(F_i(x) + F_j(x) - \left(F_i(x) + F_j(x)\right)^2 + 2F_{ij}(x,x)\right).$$

Здесь $F_{ij}(y,z)$ – совместная функция распределения случайной величины X_i и X_j для $i = 1,\ 3$ и $j = 2,\ 4$, $F_{ij}(y,z) \ne F_i(y) \cdot F_j(z)$, так как случайные величины X_i и X_j не являются независимыми. Кроме того, в силу центральной предельной теоремы

$$L\left(\sqrt{N} \cdot \left(\hat{G}_{ij}(x) - G_{ij}(x)\right)\right) =$$

$$= L\left(\sqrt{N} \cdot \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{I_{[0,x)}\left(X_{ki}\right) - F_i(x) + I_{[0,x)}\left(X_{kj}\right) - F_j(x)}{2}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} N\left(0, \sigma_{ij}^2(x)\right). \tag{7}$$

Таким образом, оценки ценовых значений $\hat{x}^{(ij)}$ могут быть получены путем подстановки оценки (6) в (5) с последующим вычислением по формуле:

$$\hat{x}_{0.5}^{(ij)} = \hat{G}_{ij}^{-1}(0{,}5) = \sup\left\{x : \hat{G}_{ij}(x) \le 0{,}5\right\}. \tag{8}$$

Это приводит к значению (N + 1)-й порядковой статистики $X_{(N+1)}^{(ij)}$ в объединенной выборке объема 2N, составленной из выборок $\{X_{ki}\}$ и $\{X_{kj}\}$, $k = \overline{1, N}$, т.е. $\hat{x}_{0,5}^{(ij)} = X_{(N+1)}^{(ij)}$.

3. Асимптотическая нормальность оценок PSM

Для доказательства асимптотической $(N \to \infty)$ нормальности оценок (8) воспользуемся методом, изложенным в [21]. Представим (8) в виде функционала от оценки функции распределения (6)

$$\hat{x}_{0.5}^{(ij)} = T\left\lfloor \hat{G}_{ij} \right\rfloor, \tag{9}$$

в область определения которого входит теоретическая функции распределения $G(x)$ и все функции вида

$$\hat{G}_{ij}^{t}(x) = G(x) + t\left(\hat{G}_{ij}(x) - G(x)\right), \quad t \in [0;1].$$

Обозначим

$$\eta(t) = T\left\lfloor \hat{G}_{ij}^{t} \right\rfloor, \quad t \in [0;1].$$

Асимптотические свойства $\hat{x}_{0.5}^{(ij)}$ определяются первой отличной от нуля производной функции $\eta(t)$ в точке $t = 0$. Найдем производную $\eta(t)$. Для этого рассмотрим уравнение

$$H\left(t, \hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right) = \hat{G}_{ij}^{t}\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right) - 0,5 = 0,$$

которое при $t = 1$ переходит в (9). Пусть уравнение $H\left(t, \hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right) = 0$ определяет неявным образом значение функционала $T\left\lfloor \hat{G}_{ij}^{t} \right\rfloor$ для всех $t \in [0,1]$. Дифференцируя функцию $\eta(t)$ по t как неявную, имеем в точке $t = 0$

$$\eta'(t=0) = \left.\frac{\partial H / \partial t}{\partial H / \partial X_{0,5}^{(ij)}}\right|_{t=0} = -\frac{\hat{G}_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}\right) - G_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}\right)}{g_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}\right)} = -\frac{\hat{G}_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}\right) - 0,5}{g_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}\right)},$$

где $g_{ij}(x) = \left(f_i(x) + f_i(x)\right)\Big/2$ – плотность функции распределения $G_{ij}(x)$, при этом предполагается, что для $m = \overline{1,4}$ существуют $f_m(x)$ – плотности функции распределения $F_m(x)$ и $g_m\left(x_{0,5}^{(ij)}\right) \neq 0$. Отсюда и из (7) следует, что при $N \to \infty$ имеет место асимптотическая нормальность оценок (8):

$$L\left(\sqrt{N} \cdot \left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)} - x_{0,5}^{(ij)}\right)\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} N\left(0; \nu_{ij}^2\right), \tag{10}$$

где $\nu_{ij}^2 = F_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}, x_{0,5}^{(ij)}\right)\Big/\left(2g_{ij}^2\left(x_{0,5}^{(ij)}\right)\right)$.

Выражение (10) позволяет строить приближенные доверительные интервалы для $x_{0,5}^{(ij)}$ с заданной доверительной вероятностью $0 < \gamma < 1$:

$$X_{(N+1)}^{(ij)} - \frac{z_{(1+\gamma)/2} \cdot \hat{\nu}_{ij}}{\sqrt{N}} \le x_{0,5}^{(ij)} \le X_{(N+1)}^{(ij)} + \frac{z_{(1+\gamma)/2} \cdot \hat{\nu}_{ij}}{\sqrt{N}}, \tag{11}$$

где $z_{(1+\gamma)/2}$ – квантиль уровня $(1+\gamma)/2$ стандартного нормального распределения,

$$\hat{\nu}_{ij} = \sqrt{2\hat{F}_{ij}\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}, \hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right)}\Big/\left(\hat{f}_i\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right) + \hat{f}_i\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right)\right), \tag{12}$$

$\hat{f}_i(x)$, $\hat{f}_j(x)$ – состоятельные оценки плотностей в точке $x = \hat{x}_{0,5}^{(ij)}$.

4. Состоятельность оценок

Покажем состоятельность оценок (5) и (12). Очевидно, что для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$ функции распределения $F_{ij}(x, y)$ непрерывны, так как плотности существуют только для непрерывных случайных величин, следовательно, обратные к $F_{ij}(x, y)$ функции также существуют и являются непрерывными.

Воспользуемся интегральными преобразованиями [22]

$$X_{(ks)} = F_s^{-1}\left(U_{(ks)}\right),\ U_{(ks)} = F_s\left(X_{(ks)}\right),\ \ X_{ks} = F_s^{-1}\left(U_{ks}\right),\ U_{ks} = F_s\left(X_{ks}\right), \tag{13}$$

где для $s=\overline{1,4}$ $X_{(ks)}$ – k-я порядковая статистика выборки $\{X_{ks}\}$, U_{ks} – равномерная в [0, 1] с.в., $U_{(ks)}$ – k-я порядковая статистика выборки $\{U_{ks}\}$. Нетрудно убедиться, что смесь с.в. $\{U_{ki}\}$ и $\{U_{kj}\}$, $i=1,\ 3$ и $j=2,\ 4$, $k=\overline{1,N}$, распределена равномерно в [0, 1], следовательно, для медианы

$$\hat{U}_{0,5} = G_{ij}\left(X_{(N+1)}^{(ij)}\right) = \left(F_i\left(X_{(N+1)}^{(ij)}\right) + F_j\left(X_{(N+1)}^{(ij)}\right)\right)\Big/2$$

объединенной выборки $\{U_k\}$ объема $2N$ верно неравенство Чебышёва:

$$\mathrm{P}\left\{\left|\hat{U}_{0,5} - E\hat{U}_{0,5}\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\hat{U}_{0,5}}{\varepsilon^2},\ \ \forall \varepsilon > 0,$$

где [22]

$$E\hat{U}_{0,5} = \frac{N}{2N+1},$$

$$D\hat{U}_{0,5} = \frac{N\cdot(2N-N+1)}{(2N+2)\cdot(2N+1)^2} = \frac{N}{2\cdot(2N+1)^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, $\hat{U}_{0,5} \xrightarrow[N\to\infty]{P} \frac{1}{2}$.

Заметим, что в силу непрерывности функций распределения $F_{ij}(x,y)$ и функции распределения $G_{ij}(x) = \left(F_i(x) + F_j(x)\right)\big/2$ являются непрерывными, следовательно, их обратные функции также непрерывны. Отсюда, согласно первой теореме непрерывности [23], верно следующее

$$G_{ij}^{-1}\left(\hat{U}_{0,5}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{P} G_{ij}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),$$

из чего следует состоятельность оценки $\hat{x}_{0,5}^{(ij)} = X_{(N+1)}^{(ij)}$ (5).

Согласно [23] для любого фиксированного x

$$\hat{F}_{ij}(x,x) \xrightarrow[N\to\infty]{P} F_{ij}(x,x),$$

следовательно, в силу первой теоремы непрерывности [23] $\hat{F}_{ij}\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}, \hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{P} F_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}, x_{0,5}^{(ij)}\right)$ для непрерывной функции $F_{ij}(x,x)$. Аналогично в силу первой теоремы непрерывности верно, что

$$\sqrt{2\hat{F}_{ij}\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}, \hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right)} \xrightarrow[N\to\infty]{P} \sqrt{2F_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}, x_{0,5}^{(ij)}\right)}.$$

Пусть для $s=\overline{1,4}$ плотности $f_s(x)$ непрерывны и $f_s(x) > 0$. Рассмотрим ядерные оценки плотностей $f_s(x)$ Розенблатта–Парзена [24, 25]:

$$\hat{f}_s(x) = \frac{1}{Nh_N^s}\sum_{i=1}^{N} K_s\left(\frac{x - X_{is}}{h_N^s}\right),$$

где $K_s(x)$ – ядро оценки (обычно это некоторая плотность распределения вероятностей), при этом должны выполняться следующие условия:

$$K_s(t) \geq 0,\ t\in\mathbf{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} K_s(t)dt = 1,\ \sup_{t\in\mathbf{R}} K_s(t) < \infty,\ \lim_{|t|\to\infty} tK_s(t) = 0,$$

здесь h_N^s – параметр размытости (последовательность положительных величин, такая, что $\lim\limits_{N\to\infty} h_N^s = 0,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tK_s(t)dt = 0,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_s^2(t)dt < \infty,\ \lim\limits_{N\to\infty} Nh_N^s = \infty$), тогда $\hat{f}_s(x)$ является состоятельной оценкой непрерывной функции $f_s(x)$. Из этого следует состоятельность $\hat{f}_i\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right)$ и $\hat{f}_j\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right)$ в точке $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$ ($\hat{f}_s(x)$ сходятся по вероятности к непрерывной функции, отсюда по первой теореме непрерывности следует состоятельность в точке $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$).

Так как для $s = \overline{1,4}$ $f_s(x) > 0$ и непрерывны, то функция $\dfrac{1}{f_i(x) + f_j(x)}$ также непрерывна, следовательно, по первой теореме непрерывности

$$\frac{1}{\hat{f}_i\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right) + \hat{f}_j\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right)} \xrightarrow[N\to\infty]{P} \frac{1}{f_i\left(x_{0,5}^{(ij)}\right) + f_j\left(x_{0,5}^{(ij)}\right)}.$$

Таким образом, в силу непрерывности произведения функций $\sqrt{2F_{ij}(x,x)}$ и $\dfrac{1}{f_i(x) + f_j(x)}$ при $f_s(x) > 0$ имеет место состоятельность оценки (12).

5. Метод PSM в анализе цены нового программного продукта

Рассматриваемый метод применялся в задаче определения цены нового программного продукта (ПП), выводимого на рынок товаров производственного назначения B2B. В анкетировании принимали участие представители 52 организаций, которым в тестовом режиме в течение двух месяцев предоставлялась возможность воспользоваться ПП. В целях сохранения коммерческой тайны результаты опроса масштабированы и приведены в табл. 1 в условных единицах (у.е./ед.). Итоги подсчетов цен – выборочных медиан – показаны в табл. 2. Предприятию целесообразно назначать цену продажи в диапазоне 205–379 у.е./ед.

Таблица 1

Результаты опроса потребителей по методике PSM (у.е./ед.)

№	X_1	X_2	X_3	X_4	№	X_1	X_2	X_3	X_4	№	X_1	X_2	X_3	X_4	№	X_1	X_2	X_3	X_4
1	53	145	204	257	14	109	251	302	360	27	159	277	359	428	40	196	307	403	591
2	58	172	239	287	15	116	253	308	363	28	162	280	362	432	41	198	308	408	611
3	60	173	253	290	16	125	255	310	365	29	163	284	364	436	42	200	311	408	620
4	66	175	254	301	17	126	256	313	374	30	165	286	367	439	43	205	313	424	643
5	73	186	256	302	18	129	257	315	379	31	165	288	367	454	44	206	313	427	660
6	78	186	257	305	19	130	262	333	382	32	167	291	368	462	45	209	314	430	685
7	82	186	260	309	20	138	262	335	384	33	173	293	373	467	46	225	320	438	690
8	85	199	274	318	21	144	264	339	390	34	181	294	374	472	47	238	322	439	773
9	95	201	277	322	22	148	266	341	398	35	183	295	377	489	48	259	323	474	838
10	103	202	279	324	23	151	266	350	418	36	184	300	381	522	49	270	327	474	869
11	104	220	283	327	24	152	271	350	419	37	186	301	391	526	50	288	336	508	1152
12	108	222	293	352	25	155	274	354	421	38	186	303	394	529	51	290	343	581	1309
13	108	236	294	359	26	157	276	355	422	39	193	306	399	560	52	301	361	655	1350

Знание асимптотической нормальности оценок позволило построить доверительные интервалы для каждой цены с вероятностью $\gamma = 0{,}9$ (см. табл. 2), где значения $\hat{\nu}_{ij}$ (12) рассчитывались с использованием ядерных оценок плотностей с гауссовым ядром. Доверительные интервалы для $\gamma = 0{,}9$ бы-

ли также смоделированы бутстреп-методом с объемом бутстреп-выборки M = 65 536. Результаты приведены в табл. 2. На рис. 3 показаны гистограмма, построенная по бутстреп-выборке медиан $\hat{X}_{0,5}^{(13)}$, и плотность нормального распределения с параметрами, оцененными по бутстреп-выборке (см. табл. 2).

Таблица 2

Результаты оценивания числовых характеристик и доверительных интервалов

	$\hat{x}^{(12)} = \hat{x}_{\min}$	$\hat{x}^{(14)} = \hat{x}_{\text{опт}}$	$\hat{x}^{(32)} = \hat{x}_{\text{безр}}$	$\hat{x}^{(34)} = \hat{x}_{\max}$
Оценки $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$	205	290	306	379
Средние по бутстреп-выборке $\bar{X}_{ij}$	206,80	289,88	303,21	376,51
Среднеквадратическое отклонение по бутстреп-выборке	11,00	10,93	6,90	6,02
γ	0,9	0,9	0,9	0,9
$z_{(1+\gamma)/2}$	1,645	1,645	1,645	1,645
$\Delta = z_{(1+\gamma)/2}\ \hat{\nu}_{ij} / \sqrt{N}$	25,07	18,42	13,73	12,15
Нижняя граница интервала $\hat{x}_{0,5}^{(ij)} - \Delta$	179,93	271,58	292,27	366,85
Верхняя граница интервала $\hat{x}_{0,5}^{(ij)} + \Delta$	230,07	308,42	319,73	391,15
$\Delta_Б$ по бутстреп-выборке	2,51	2,49	1,57	1,37
Нижняя граница интервала $\bar{X}_{ij} - \Delta_Б$	204,29	287,38	301,64	375,14
Верхняя граница интервала $\bar{X}_{ij} + \Delta_Б$	209,31	292,37	304,79	377,88

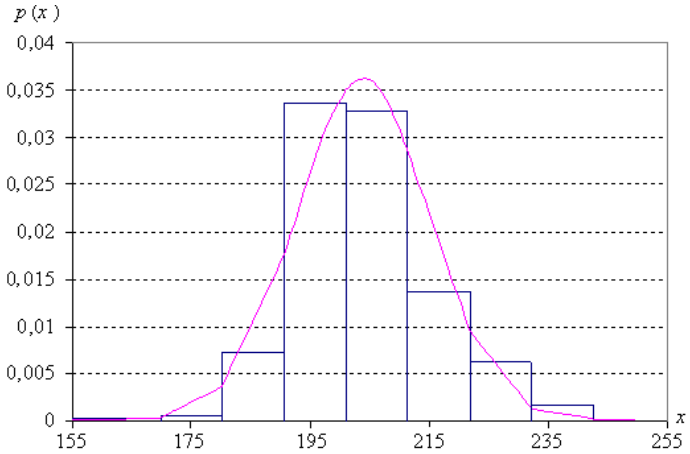


Рис. 3. Гистограмма бутстреп-выборки $\hat{X}_{0,5}^{(12)}$ и плотность $N(206{,}8;\ 11{,}0)$

Fig.3. Bootstrap histogram of $\hat{X}_{0,5}^{(12)}$ and corresponding density $N(206{,}8;\ 11{,}0)$

Таким образом, предприятию рекомендовано рассмотреть в качестве базовых бутстреп-интервалы для оптимальной цены, позволяющей захватить бóльшую долю рынка $X_{0,5}^{(14)} \in (287{,}38;\ 292{,}37)$ у.е./шт., а также для цены безразличия, которая выше оптимальной, но применяется для подчеркивания престижности и статусности товара $X_{0,5}^{(23)} \in (301{,}64;\ 304{,}79)$ у.е./шт.

Заключение

В работе показаны асимптотическая нормальность и состоятельность оценок ценовых значений метода PSM. На основании этого построены приближенные доверительные интервалы, в которых использованы оценки совместной функции распределения и плотностей. Расчеты по реальным дан-

ным результатов опроса представителей организаций – потенциальных потребителей нового программного продукта – показали, что эти доверительные интервалы шире в сравнении с доверительными интервалами, построенными методом бутстреп.

При формировании стратегии ценообразования производителю рекомендуется использовать в качестве базовых бутстреп-интервалы для оптимальной цены, позволяющей охватить большую долю рынка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kotler P., Armstrong G. Principles of Marketing. Prentice-Hall, 2016. 398 p.
2. Коржов М.М., Кузин Д.А. Сравнительный анализ и практическое применение методов ценообразования с ориентацией на спрос // Новости маркетинга. 2007. № 4. С. 9–17.
3. Westendorp P.H. NSS – Price Sensitivity Meter (PSM) – A New Approach to Consumer Perception of Prices // Venice Congress Main Sessions, European Marketing Research Society (ESOMAR). Amsterdam, 1976. P. 139–167.
4. Lipovetsky S. Van Westendrop Price Sensitivity in Statistical Modeling // International Journal of Operations and Quantitative Management. 2006. V. 12, No. 2, P. 141–156.
5. Lipovetsky S., Magnan S., Polzi A.Z. Pricing Models in Marketing Research // Intelligent Information Management. 2011. No. 3. P. 167–174.
6. Roll O., Achterberg L.H., Herbert K.G. Innovative approaches to analyzing the Price Sensitivity Meter: Results of an international comparative study // COMBI2010 Conference proceedings. Vantaa, 2010. P. 181–193.
7. Müller H. Empirische Untersuchung zur Messung der Preiswahrnehmung mittels Pricesensitivity-Meter // Marketing Zeitschrift für Forschung und Praxis. 2009. No 3. P. 171–182.
8. Hofmann T., Lederle D., Felsch M. Innovative Verfahren der empirischen Preisforschung // Planung & Analyse, 2006. No. 6. P. 28–33.
9. Wildner R. Marktforschung für den Preis // Jahrbuch der Absatz- und Verbrauchsforschung. 2003. No. 49 (1). P. 4–26.
10. Nagle T.T., Holden R.K. The Strategy and Tactics of Pricing: A Guide of Profitable Decision Making. 2nd ed. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. NJ, 1995.
11. Kupiec B., Revell B. Measuring consumer quality judgments // British Food Journal. 2001. № 103 (1). P. 7–22.
12. Comley P. What do we know about Pricing research // WARC. Admap, 1997. No. 1.
13. Журко Е.С., Зенкова Ж.Н. Метод ценообразования PSM для случая цензурированных выборок малого объема // Логистические системы в глобальной экономике. Красноярск : СибГАУ, 2016. С. 152–157.
14. Журко Е.С., Зенкова Ж.Н. Влияние априорной информации на результаты метода ценообразования на товар-новинку PSM // Актуальные проблемы и перспективы развития государственной статистики в современных условиях : III Междунар. науч.-практ. конф. Саратов : Саратовстат, 2017. Т. 2. С. 66–68.
15. Журко Е.С., Зенкова Ж.Н. Метод ценообразования PSM для цензурированных данных с учетом квантиля // Наука. Технологии. Производство : междунар. союз ученых. СПб., 2015. № 9 (13). С. 13–16.
16. Журко Е.С., Зенкова Ж.Н. Модификация метода ценообразования PSM с учетом квантиля заданного уровня // Информационные технологии Сибири : сб. матер. Междунар. науч.-практич. конф. Кемерово : КузГТУ, 2016. С. 134–136.
17. Зенкова Ж.Н., Копнова Е.Е., Бараксанов Д.Н. Применение метода PSM и алгоритма Тёрнбулла при определении цены нового программного продукта // Высокие технологии, фундаментальные исследования, инновации : сб. докл. XVII Междунар. науч.-практ. конф. СПб., 2014. С. 301–305.
18. Зенкова Ж.Н., Краковецкая И.В. Маркетинговое исследование цены спроса по интервальным данным с привлечением информации о симметрии распределения // Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике. Высокие технологии, исследования, финансы : сб. докл. XV Междунар. науч.-практ. конф. СПб. : Политехн. ун-т, 2013. Т. 1. С. 101–104.
19. Зенкова Ж.Н., Краковецкая И.В. Непараметрическая оценка Тёрнбулла для интервально-цензурированных данных в маркетинговом исследовании спроса на биоэнергетические напитки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3 (24). С. 64–69.
20. Zenkova Zh., Krakovetckaia I. Marketing of New Bio-Energy Drinks // Theoretical and Empirical Reflections in Marketing. Athens Institute for Education & Research, ATINER, 2014. P. 179–192.
21. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М. : Высшая школа, 1982. 256 с.
22. Шуленин В.П. Математическая статистика : учебник. Томск : НТЛ, 2012. Ч. 3: Робастная статистика. 520 с.
23. Боровков А. А. Математическая статистика. Новосибирск : Наука, 1997. 772 с.
24. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density functions // Ann. Math. Statist. 1956. V. 27, No. 3. P. 832–837.
25. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode // Ann. Math. Statist. 1962. V. 33. P. 1065–1076.

Поступила в редакцию 2 сентября 2018 г.

Dmitriev U.G., Zenkova Z.N., Zenkov A.G. (2019) STATISTICAL PROPERTIES OF PRICE SENSITIVITY METER RESULTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 30–40

DOI: 10.17223/19988605/47/4

Price Sensitivity Meter (PSM) technique is used to estimate prices, which are maximal agreed to consumers. It is based on marketing survey of N target audience representatives' price preferences. The survey forms independent sample $\left(X_{k1}, X_{k2}, X_{k3}, X_{k4}\right)$, $k=\overline{1,N}$, where for the k-th respondent X_{k1} is minimal acceptable, X_{k2} – bargain, X_{k3} is high but yet acceptable, X_{k4} is too high prices. For $j=\overline{1,4}$ the empirical distribution functions $\hat{F}_j(x)=\sum_{k=1}^{N} \mathrm{I}_{[0,x)}\left(X_{kj}\right)\Big/N$ are considered, for $i=1,3$: $\hat{S}_i(x)=1-\hat{F}_i(x)$. The final prices are found as the abscissas of $\hat{F}_j(x)$, $j=2,4$ and $\hat{S}_i(x)$, $i=1,3$, intersections as $\hat{x}^{(ij)}=\left\{\max\left\{x:\hat{F}_j(x)=\hat{S}_i(x)\right\};\ x:\hat{S}_i(x+0)\le \hat{F}_j(x)<\hat{S}_i(x)\right\}$, which are the medians' estimates $x_{0,5}^{(ij)}$ of $G_{ij}(x)=\left(F_i(x)+F_j(x)\right)\Big/2$. It was proved that $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}=X_{(N+1)}^{(ij)}$ are (N + 1)-order statistics of a sample containing random values $\left(X_{ki}, X_{kj}\right)$, $k=\overline{1,N}$, and $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$ are consistent and asymptotically normally distributed:

$$L\left(\sqrt{N}\left(\hat{x}_{0.5}^{(ij)}-x_{0.5}^{(ij)}\right)\right)\xrightarrow[N\to\infty]{} N\left(0;\nu_{ij}^2\right),$$

where $\nu_{ij}=\sqrt{2F_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)},x_{0,5}^{(ij)}\right)}\Big/g_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}\right)$, $F_{ij}(y,z)$ is a joint of X_i and X_j, $F_{ij}(y,z)\ne F_i(y)F_j(z)$ because according to PSM for $i,j=\overline{1,4}$, $i<j$, prices $X_i<X_j$ and they are not independent; $g_{ij}(x)$ are the density function of $G_{ij}(x)$. Here we suggested that for $m=\overline{1,4}$ $\exists f_m(x)$ and $g_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}\right)\ne 0$. Equation (1) allows finding approximate confidence intervals

$$X_{(N+1)}^{(ij)}-z_{(1+\gamma)/2}\cdot\hat{\nu}_{ij}/\sqrt{N}\le x_{0,5}^{(ij)}\le X_{(N+1)}^{(ij)}+z_{(1+\gamma)/2}\cdot\hat{\nu}_{ij}/\sqrt{N},$$

where $\gamma\in(0,1)$ is a confidence level, $\hat{\nu}_{ij}=\sqrt{2\hat{F}_{ij}\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)},\hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right)}\Big/\left(\hat{f}_i\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right)+\hat{f}_j\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)}\right)\right)$ is consistent estimate of ν_{ij} based on the sample containing $\left(X_{ki}, X_{kj}\right)$, $k=\overline{1,N}$, $z_{(1+\gamma)/2}$ is a $\left((1+\gamma)/2\right)$ - quantile of the standard normal distribution, $\hat{g}_{ij}(x)$ is a consistent estimate of the density at x.

The method was applied to calculate price of new software for B2B market. There were surveyed N = 52 target audience representatives. Some recommendations about pricing were given to the enterprise.

Keywords: Price Sensitivity Meter (PSM); median; asymptotical normality.

DMITRIEV Yurii Glebovich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia)
E-mail: dmit@mail.tsu.ru

ZENKOVA Zhanna Nikolaevna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia)
E-mail: zhanna.zenkova@mail.tsu.ru

ZENKOV Andrei Gennadievich (National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia)
E-mail: zenkov@tpu.ru

REFERENCES

1. Kotler, P. & Armstrong, G. (2016) *Principles of Marketing*. Prentice-Hall.
2. Korzhov, M.M. & Kuzin, D.A. (2007) Sravnitel'nyy analiz i prakticheskoe primenenie metodov tsenoobrazovaniya s orientatsiey na spros [Comparative analysis and practical application of demand-driven pricing methods]. *Novosti marketinga*. 4. pp. 9–17.
3. Westendorp, P.H. (1976) NSS – Price Sensitivity Meter (PSM) – A New Approach to Consumer Perception of Prices. *Venice Congress Main Sessions, European Marketing Research Society (ESOMAR*). Proc. of the ESOMAR Congress. Amsterdam. pp. 139–167.
4. Lipovetsky, S. (2006) Van Westendrop Price Sensitivity in Statistical Modeling. *International Journal of Operations and Quantitative Management*. 12(2). pp. 141–156.
5. Lipovetsky, S., Magnan, S. & Polzi, A.Z. (2011) Pricing Models in Marketing Research. *Intelligent Information Management.* 3. pp. 167–174. DOI: 10.4236/iim.2011.35020

6. Roll, O., Achterberg, L.H. & Herbert, K.G. (2010) Innovative approaches to analyzing the Price Sensitivity Meter: Results of an international comparative study. *COMBI2010 Conf. Proc.* Finland: Vantaa. pp. 181–193.
7. Müller, H. (2009) Empirische Untersuchung zur Messung der Preiswahrnehmung mittels Pricesensitivity-Meter. *Marketing Zeitschrift für Forschung und Praxis.* 3. pp. 171–1826. DOI: 10.15358/0344-1369-2009-3-171
8. Hofmann, T., Lederle, D. & Felsch, M. (2006) Innovative Verfahren der empirischen Preisforschung. *Planung & Analyse.* 6. pp. 28–33. (In German).
9. Wildner, R. (2003) Marktforschung für den Preis. *Jahrbuch der Absatz- und Verbrauchsforschung.* 49(1). pp. 4–26.
10. Nagle, T.T. & Holden, R.K. (1995) *The Strategy and Tactics of Pricing: A Guide of Profitable Decision Making.* 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
11. Kupiec, B. & Revell, B. (2001) Measuring consumer quality judgments. *British Food Journal.* 103(1). pp. 7–22. DOI: 10.1108/00070700110382911
12. Comley, P. (1997) What do we know about Pricing research. *WARC.* Admap. 1.
13. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2016) Metod tsenoobrazovaniya PSM dlya sluchaya tsenzurirovannykh vyborok malogo ob"ema [PSM pricing method for small-sized censored samples]. In: Loginov, Yu.Yu. (ed.) *Logisticheskie sistemy v global'noy ekonomike* [Logistical systems in global economics]. Krasnoyarsk: M.F. Reshetnev Siberian State University. pp. 152–157 (In Russian).
14. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2017) [The influence of additional information on the PSM method results]. *Aktual'nye problemy i perspektivy razvitiya gosudarstvennoy statistiki v sovremennykh usloviyakh* [Topical problems and development prospects of state statistics in modern conditions]. Proc. of the Third International Conference. Vol. 2. Saratov: Saratovstat. pp. 66–68. (In Russian).
15. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2015) PSM pricing method for censored data using quantile. *Nauka. Tekhnologii. Proizvodstvo.* 9(13). pp. 13–16. (In Russian).
16. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2016) [Modification of PSM pricing method considering predetermined level quantile]. *Informatsionnye tekhnologii Sibiri* [Information Siberian Technology]. Proc. of the International Conference. Kemerovo. pp. 134–136. (In Russian).
17. Zenkova, Z.N., Kopnova, E.E. & Baraksanov, D.N. (2014) [The use of PSM method and Turnbull estimator in determination of new software price]. *Vysokie tekhnologii, fundamental'nye issledovaniya, innovatsii* [High Technology, Basic Research, Innovation]. Proc. of the 17th International Conference. St. Petersburg. pp. 301–305. (In Russian).
18. Zenkova, Z.N. & Krakovetskaya, I.V. (2013) Marketingovoe issledovanie tseny sprosa po interval'nym dannym s privlecheniem informatsii o simmetrii raspredeleniya [Marketing research of demand price for interval-censored data using additional information about symmetry of distribution function]. In: *Vysokie tekhnologii, issledovaniya, finansy* [High technology, research, finance]. Vol. 1. St. Petersburg: St. Petersburg Polytechnic University. pp. 101–104.
19. Zenkova, Z.N. & Krakovetskaya, I.V. (2013) Nonparametric Turnbull estimator for interval-censored data in marketing research of demand on bio-energy drinks. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 3(24). pp. 64–69. (In Russian).
20. Zenkova, Z.N. & Krakovetskaya, I.V. (2014) Marketing of New Bio-Energy Drinks. In: Grigoriou, N. & Veloutsou, C. (eds) *Theoretical and Empirical Reflections in Marketing*. Greece: Atiner. pp. 179–192.
21. Kovalenko, I.N. & Philippova, A.A. (1982) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Theory of probability and mathematical statistics]. Moscow: Vysshaya shkola.
22. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Tomsk: NTL.
23. Borovkov, A.A. (1997) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Novosibirsk: Nauka.
24. Rosenblatt, M. (1956) Remarks on some nonparametric estimates of a density functions. *Annals of Mathematical Statistics.* 27(3). pp. 832–837. DOI: 10.1214/aoms/1177728190
25. Parzen, E. (1962) On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics.* 33. pp. 1065–1076. DOI: 10.1214/aoms/1177704472

УДК 519.24
DOI: 10.17223/19988605/47/5

B.S. Dobronets, O.A. Popova

COMPUTATIONAL ASPECTS OF PROBABILISTIC EXTENSIONS

In this article we propose a new approach to computing of functions with random arguments. Approach based on the idea of dimension reduction by to calculating some integrals and the application of numerical probability analysis. We apply one of the basic concepts of numerical probabilistic analysis as the probabilistic extension to computing a function with random arguments. To implement this technique, a new method based on parallel recursive calculations is proposed. Numerical examples are presented demonstrating the effectiveness of the proposed approach.
Keywords: computational probabilistic analysis; probabilistic extensions; non-Monte Carlo methods; random boundary value problem.

Problems of modelling can be reduced to the numerical analysis of functions [1].

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Let $(x_1, \ldots, x_n)$ be a system of continuous random variables with joint probability density function $p(x_1, \ldots, x_n)$ and random variable *z* is a function $f(x_1, \ldots, x_n)$. Consider main methods to find the distribution of random variable *z*.

These are to use the cumulative distribution function

$$F(y) = P(f(x_1, \ldots, x_n) \le y)$$

and the probability $z \le y$ is determined by the formula

$$P(z \le y) = \int_{\Omega_y} p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{1}$$

where $\Omega_y = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) \le y\}$. Further, the probability density function $\boldsymbol{f}$ of random variable *z* is defined as the derivative [2]

$$\boldsymbol{f}(y) = \frac{dF(y)}{dy}.$$

In the case of the monotone function $f(x)$, the distribution density $\boldsymbol{f}$ of the random variable *z* is defined as [2] as follows:

$$\boldsymbol{f}(y) = f(f^{-1}(y)) \,|(f^{-1})'(y)|, \tag{2}$$

where f^{-1} is the inverse function of f.

Note that the calculation of the integral (1) and the use of the formula (2) in some cases is rather difficult. Moreover, one of the reasons for the emergence of the Monte Carlo method was the need to calculate integrals of the form (1) in the case of large values of *n*. Thus, the Monte Carlo method is often the only way to calculate the probability density function *f* of a random variable *z*. Monte Carlo method is a powerful approach, but it has some serious shortcomings, first of all, this is an extremely low rate of convergence.

Non-Monte Carlo methods have been developed since the 1960s. A major non-Monte Carlo approach is interval analysis. However, interval analysis computing only to the boundaries of random processes, without examining their internal distributions.

An important special case is operations on independent random variables. In the papers [3−6], various approaches for numerical operations on densities of random variables are considered.

In our work, we develop a technique that uses **C**omputational Probabilistic Analysis (CPA) to solve various problems with stochastic data uncertainty [7−9].

The basis of computational probabilistic analysis is numerical operations on probability density functions of the random values. These are operations “+”, “ – ”, “ · ”, “/”, “↑”, “max”, “min”, as well as binary relations “ ≤ ”,“ ≥ ” and some others. The numerical operations of the piecewise polynomial function arithmetic constitute the major component of CPA. The use of CPA for these problems is more effective than the Monte Carlo method in a thousand times.

Using the arithmetic of probability density functions and probabilistic extensions, we can construct numerical methods that enable us solving systems of linear and nonlinear algebraic equations with random parameter [7, 8].

We will use piecewise polynomial models to represent probability density functions [10–12]:

– piecewise constant functions (histograms);
– piecewise linear functions (frequency polygons);
– piecewise polynomial functions (splines).

1. Probabilistic extensions

One of the most important problems that NPA deals with is to construct probability density functions of random variables.

Let z be a function $f(x_1,\ldots,x_n)$

$$z = f(x_1,\ldots,x_n).$$

Definition. By probabilistic extension $\boldsymbol{f}(\xi,\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ of the function f, we mean a probability density function $\boldsymbol{z}$ of the random variable z

$$\boldsymbol{z}(\xi) = \boldsymbol{f}(\xi,\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n).$$

Definition. Support of the probability density functions f will be called the set

$$\mathrm{supp}(\boldsymbol{f}) = \{x \mid f(x) > 0\}.$$

One possible way to estimate the probability density $\boldsymbol{z}$ of a random variable z

$$z = f(x_1,\ldots,x_n). \tag{3}$$

is the Monte Carlo method [13]. For these purposes a random vector $(x_1^i,\ldots,x_n^i)$ with joint probability density function $p(x_1,\ldots,x_n)$ is generated. Further calculated $z^i = f(x_1^i,\ldots,x_n^i), i = 1,\ldots,N$. Using the histogram method for z^i, we can construct an estimate of the probability density function $\boldsymbol{z}$.

We study the properties of the probability density $\boldsymbol{z}$. Build the grid

$$\{z_0, z_1,\ldots z_k\} \in \mathrm{supp}(\boldsymbol{z})$$

and calculate the number n_l of sample points falling in each segment z_{l-1}, z_l. It is known that histograms converge to the probability density function of the mean integral value

$$p_l = \frac{n_l}{N} \approx \int_{z_{l-1}}^{z_l} \boldsymbol{Z}(\xi)d\xi.$$

Build the grid $\{t_0, t_1,\ldots t_m\} \subset \mathrm{supp}(x_1)$ and calculate the number m_j of sample points falling in each segment t_{j-1}, t_j.

$$p_j^1 = \frac{m_j}{N}.$$

Consider only those random vectors $(x_1^i,\ldots,x_n^i)$ for such $(x_1^i \in (t_{j-1}, t_j)$. Number such vectors is equal exactly m_j. If ν_{jl} is the number of sample points falling in each segment z_{l-1}, z_l, then

$$n_l = \sum_j^m \nu_{jl}$$

and

$$p_l = \frac{n_l}{N} = \sum_j^m \frac{m_j}{N} \frac{\nu_{jl}}{m_j}.$$

Going to the limit at $N \to \infty$

$$x_1(t) \approx \frac{m_j}{N}.$$

Further, let for any $t \in \operatorname{supp} x_1$ we can construct a probabilistic extension $f(\cdot, t, x_2, \ldots, x_n)$

$$\frac{\nu_{jl}}{m_j} \approx \boldsymbol{f}(\xi, t, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n).$$

Increasing the dimension of the grids and going to the limit, we obtain

$$\boldsymbol{f}(\xi) = \int_{\underline{x}_1}^{\bar{x}_1} \boldsymbol{x}_1(t) \boldsymbol{f}(\xi, t, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) dt. \tag{4}$$

Thus proven Theorem.

Theorem 1. Let $\boldsymbol{f}(\xi, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ be probabilistic extensions of function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ and for each real t function $\boldsymbol{f}(\xi, t, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ be probabilistic extensions of the function $f(t, x_2, \ldots, x_n)$. Then

$$\boldsymbol{f}(\xi, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \int_{\underline{x}_1}^{\bar{x}_1} \boldsymbol{x}_1(t) \boldsymbol{f}(\xi, t, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) dt. \tag{5}$$

Corollary. Theorem 1 infers the possibility of recursive computations for the general form of probability extensions and reduction to the calculation of the one-dimensional case.

Let us consider the computing of the integral (5). For simplicity, we represent (5) as a numerical quadrature

$$\int_{\underline{x}_1}^{\bar{x}_1} \boldsymbol{x}_1(t) \boldsymbol{f}(\xi, t, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) dt \approx \sum_{l=1}^m \gamma_l \boldsymbol{x}_1(t_l) \boldsymbol{f}(\xi, t_l, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n).$$

Further, for the computing $\boldsymbol{f}(\xi, t_l, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ we can also use numerical quadratures and so on. In general, it is NP-hard problem with actual parallelization.

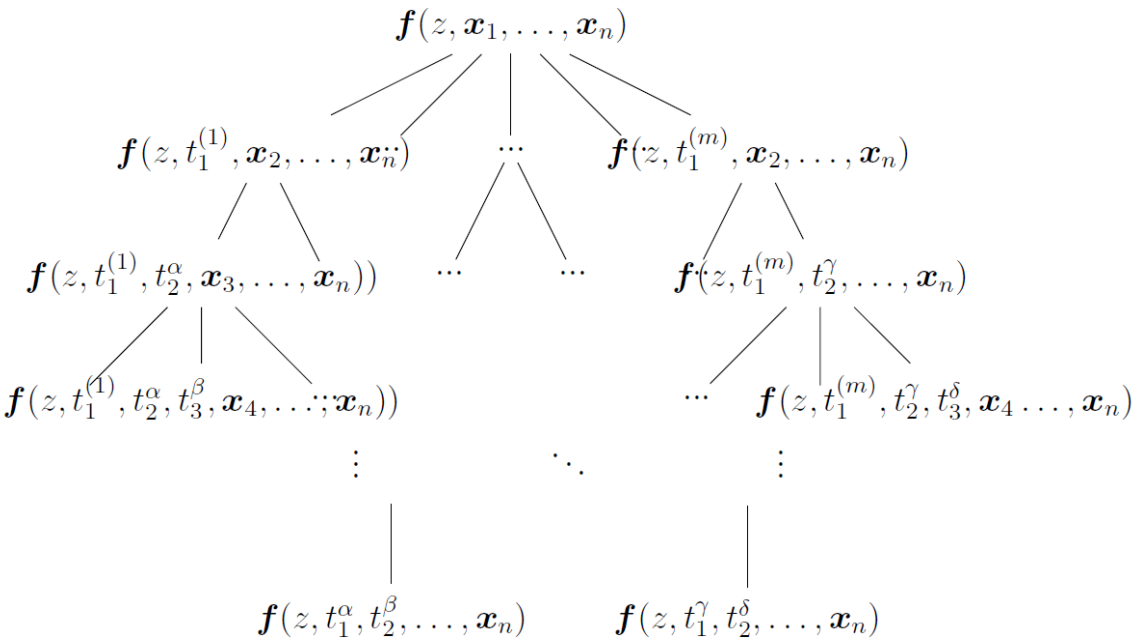


Fig. 1. The tree of the parallel recursive programming

In Fig. 1 we are shown the tree of the parallel recursive organization of the computational process. Thus, on the lower layer, it is necessary to computing the probabilistic extensions only for one variable. Note that all computations on each layer are independent and can be computed simultaneously.

2. One-dimensional case

Consider the procedure for computing the probabilistic extensions for the one-dimensional case. Let there be given a functional dependence

$$z = f(x),$$

where x is a random variable. Let $\boldsymbol{x}$ be the probability density function of a random variable x with support $[\underline{x}, \overline{x}]$. Further $\{r_i(z) \in [\underline{x}, \overline{x}] \mid i = 1, \ldots, n\}$ are the roots of the equation $z = f(x)$.

Following the main method (1) it is easy to construct a generalization of the expression (2). We can represent probabilistic extensions $\boldsymbol{f}(\cdot, \boldsymbol{x})$ of function $f(x)$ in the form

$$\boldsymbol{f}(\xi, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{x}(r_i(\xi))}{|f'(r_i(\xi))|}.$$

Example 1. As an example, consider the construction of a probabilistic extensions function

$$f = ax^2 + bx, a \geq 0, b \geq 0,$$

x is random variable distributed on $[0,2]$ by a triangular law

$$\boldsymbol{x}(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{if } \xi \in [0,1), \\ 2 - \xi & \text{if } \xi \in [1,2]. \end{cases}$$

Further

$$r_1(z) = -\frac{\sqrt{4az + b^2} + b}{2a}, r_2(z) = \frac{\sqrt{4az + b^2} - b}{2a}.$$

are roots $z = f(r_i)$. Choose a positive root $r(\xi) = r_2(\xi) = \dfrac{\sqrt{4a\xi + b^2} - b}{2a}$, and

$$[ax^2 + bx]' = 2ax + b = \sqrt{4az + b^2}.$$

Finally

$$\boldsymbol{f}(\xi, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}(r(\xi)) / \sqrt{4a\xi + b^2}.$$

Put $a = 1$ and $b = 0$

$$\boldsymbol{f}(\xi, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1/2 & \text{if } \xi \in [0,1), \\ 1/\sqrt{\xi} - 1/2 & \text{if } \xi \in [1,4]. \end{cases}$$

2.1. Numerical approach

Consider a numerical approach to construct a probabilistic extensions $\boldsymbol{f}$ of function $f(x)$. For these purposes, we construct in the support $[\underline{x}, \overline{x}]$ of the probability density function $\boldsymbol{x}$ a grid $\{\xi_i \mid \xi_i \in [\underline{x}, \overline{x}], i = 0,1,2...n\}$ and compute $\{z_i = f(\xi_i), i = 0,1,2...n\}$. Next we set

$$f_z(z_i) = \frac{\boldsymbol{x}(\xi_i)}{|(f'(\xi_i)|}$$

and using $(z_i, f_z(z_i))$ we construct a piecewise polynomial interpolation.

So, for Example 1. the support is $[0,2]$, $\xi_i = i/10, i = 0,1,\ldots,20$. With $a = 1,\ b = 0$ we get

$$(z_i, f_z(z_i)) = \left((i/10)^2, \frac{\boldsymbol{x}(i/10)}{i/5} \right), \quad i = 0,1,\ldots,20.$$

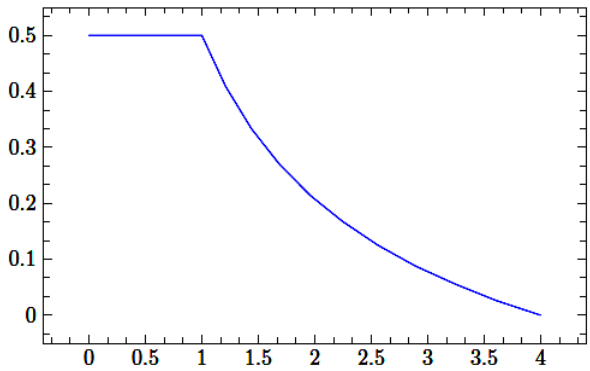


Fig. 2. Probabilistic extensions $\boldsymbol{f}(\cdot,\boldsymbol{x})$

The Fig. 2 shows the probability density function $\boldsymbol{f}(\cdot,\boldsymbol{x})$ from Example 1. Unlike the general approach, there is no need to find the roots of the equation.

3. Two dimensional case

Let (x,y) be a system of continuous random variables with joint probability density function $p(x,y)$ and the random variable z is a function $f(x,y)$

$$z = f(x,y).$$

Need to find probability density function the random variable z. Define

$$\Omega_z = \{(x,y) \mid z > f(x,y)\}$$

and cdf F_z the random variable z

$$F_z = \int_{\Omega_z} p(x,y)dxdy$$

probability density function of z

$$f_z = \frac{d}{dz}F_z.$$

Consequently

$$\frac{d}{dz}F_z = \frac{d}{dz}\int_{\Omega_z} p(x,y)dxdy =$$

$$= \lim_{dz\to 0}\frac{\int_{\Omega_{z+dz}} p(x,y)dxdy - \int_{\Omega_z} p(x,y)dxdy}{dz} =$$

$$= \lim_{dz\to 0}\frac{\int_{\Omega_{z+dz}-\Omega_z} p(x,y)dxdy}{dz}.$$

Assuming that $dx = 0$ then

$$dz = f'_y dy$$

and

$$dS = dxdy = dxdz/|f'_y|.$$

Finally get

$$f_z(z) = \int_{\Gamma_z}\frac{p(x,y)}{|f'_y(x,y)|}dx,$$

where

$$\Gamma_z = \{(x,y) \mid z = f(x,y)\} = \{(x,y(x))\}.$$

Let

$$f_y(\xi,t)=\frac{p(t,y(\xi))}{|f'_y(\xi,y(t))|}$$

be probabilistic extensions of $f(t,y)$. Thus, the calculation of the probabilistic extension f_z is reduced to the calculation of the integral of probabilistic extensions $f(t,y)$.

Example 2. Consider the construction of a probabilistic extension for the function

$$z=x^2y+xy^2.$$

Let t be real, put $y=t$ and a probabilistic extension for the function

$$z_x=x^2t+xt^2.$$

is

$$z_x(\xi,t)=\boldsymbol{x}(\eta(\xi))/\sqrt{4t\xi+t^4},$$

where $\eta(\xi)=(\sqrt{4t\xi+t^4}-b)/(2t)$.

Thus, the probabilistic extension for $\boldsymbol{z}$ can be represented as

$$\boldsymbol{z}(\xi)=\int \boldsymbol{y}(t)z_x(\xi,t)dt=\int \boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{x}(\eta(\xi))/\sqrt{4t\xi+t^4}dt. \tag{6}$$

4. Random Boundary value Problem

Consider using probabilistic extensions to calculate solutions Random Boundary value Problem [14]

$$Lu\equiv -pu''+qu=f(x),\ \ x\in(0,1), \tag{7}$$

with boundary conditions

$$u(0)=0,\ u(1)=0.$$

where $p>0$, $q\ge 0$, $p,\ q$ are independent random variables.

Let $\omega_h=\{x_i=ih, i=1,2,...,N-1, h=1/N\}$ be grid and

$$L^hu_i^h=-\boldsymbol{p}\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}+\boldsymbol{q}u_i=f(x_i),\ \ i=1,2,...,N-1.$$

is difference scheme. $[\underline{p},\overline{p}]$, $[\underline{q},\overline{q}]$ are supports of $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$. Generate grids

$$\omega_p=\{p_0=\underline{p}<p_1<...<p_K=\overline{p}\}\ \text{and}\ \omega_q=\{q_0=\underline{q}<q_1<...<q_L=\overline{q}\}.$$

Solve numerically *KL* problems

$$-p_k\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}+q_lu_i=f(x_i), i=1,2,...,N-1.$$

Thus we get an array of solutions $u_{ikl}=u_i(p_k,q_l)$. Consider building probability density functions for u_i. For these purposes, we construct Hermitian cubic splines $s_l(p),\ l=0,1,...,10$ using the values $u_i(p_k,q_l)$. In fig. 3 they are shown in solid line. Further for some ξ we find the roots p_l

$$s_l(p_l)=\xi,\ \ l=0,1,...,10.$$

The values of $\boldsymbol{u}_i(\xi)$ are computed using numerical quadratures, for example, Simpson quadratures

$$\boldsymbol{u}_i(\xi)=h\sum_{k=0}^{10}\gamma_k\boldsymbol{q}(q_k)\boldsymbol{p}(p_k)/s'(p_k).$$

In fig. 3 line of integration mark = ‘o’. Note, Simpson quadratures and cubic splines have $O(h^4)$ accuracy.

Numerical experiments with *K*, *L* = 10 showed good agreement with the Monte Carlo method with the number of samples ~ 10^6. Thus, in this example, the proposed method turned out to be more efficient than Monte Carlo ~ 10^4 times.

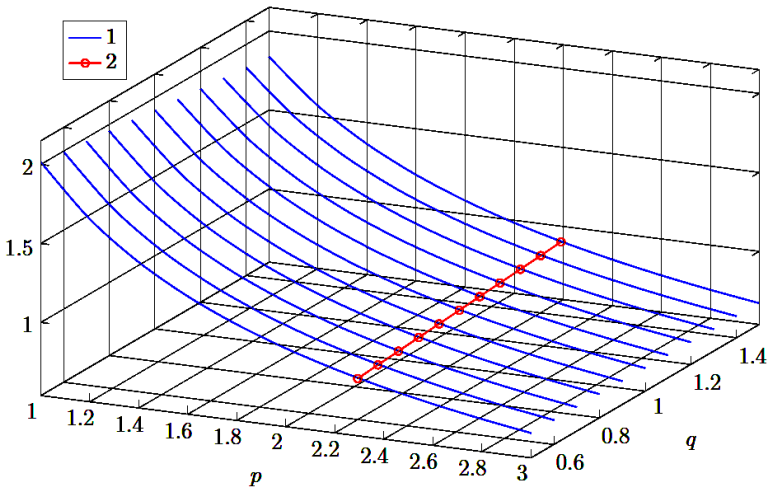


Fig. 3. Construction of probabilistic extensions for u_i, 1 are splines, 2 is a line of integration

Remark. The main computational costs are spent on building the set $u_{ikl} \sim O(KLN)$. Computational costs building of the probability extension of u_i is *O(m)*. Therefore, once you have u_{ikl}, you can compute relatively quickly $\boldsymbol{u}_i$ for different ***p, q***.

Conclusion

The proposed approach makes it possible to solve the problem of computing the probability density function in the modeling processes with random input data. For these purposes we propose using a parallel-recursive organization of the computational process. Thus, the important problem of computing probability extensions can be solved within parallel recursive programming. This opens multifold possibilities for studying various models with random input data. Fast and accurate calculations are based on the properties of numerical arithmetic procedures over piecewise polynomial models developed within the framework of computational probabilistic analysis.

REFERENCES

1. Rocquigny, E. (2012) *Modelling Under Risk and Uncertainty: An Introduction to Statistical, Phenomenological and Computational Methods*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons.
2. Springer, M.D. (1979) *The Algebra of Random Variables*. New York; Chichester; Brisbane: John Wiley & Sons.
3. Gerasimov, V.A., Dobronets, B.S. & Shustrov M.Yu. (1991) Numerical operations of histogram arithmetic and their applications. *Automation and Remote Control.* 52(2). pp. 208–212.
4. Williamson, R. & Downs, T. (1990) Probabilistic arithmetic i: numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds. *International Journal of Approximate Reasoning.* 4(2). pp. 89–158. DOI: 10.1016/0888-613X(90)90022-T
5. Li, W. & Hym, J. (2004) Computer arithmetic for probability distribution variables. *Reliability Engineering and System Safety.* 85(1–3). pp. 191–209. DOI: 10.1016/j.ress.2004.03.012
6. Jaroszewicz, S. & Korzeń, M. (2012) Arithmetic operations on independent random variables: a numerical approach. *SIAM J. Sci. Comput*. 34(3). pp. A1241–A1265. DOI: 10.1137/110839680
7. Dobronets, B.S. & Popova, O.A. (2014) Numerical probabilistic analysis under aleatory and epistemic uncertainty. *Reliable Computing*. 19. pp. 274–289.
8. Dobronets, B. & Popova, O. (2016) Numerical Probabilistic Approach for Optimization Problems. *Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics. Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 9553. Springer International Publishing, Cham. pp. 43–53.
9. Dobronets, B.S. & Popova, O.A. (2017) Improving the accuracy of the probability density function estimation. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*. 10(1). pp. 16–21. DOI: 10.17516/1997-1397-2017-10-1-16-21
10. Dobronets, B.S. & Popova, O.A. (2018) Piecewise Polynomial Aggregation as Preprocessing for Data Numerical Modeling. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series.* 1015. DOI:10.1088/1742-6596/1015/3/032028

11. Dobronets, B.S. & Popova, O.A. (2018) Improving reliability of aggregation, numerical simulation and analysis of complex systems by empirical data. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering.* 354. DOI:10.1088/1757-899X/354/1/012006
12. Popova, O.A. (2019) Using Richardson extrapolation to improve the accuracy of procesing and analyzing empirical data. *Measurement Techniques.* 2. pp. 18−22.
13. Mikhailov, G.A. & Voitishek, A.V. (2018) *Statisticheskoe modelirovanie: metod Monte-Karlo* [Statistical modeling. Monte Carlo methods]. Moscow: Yurait.
14. Soong, T.T. (1973) *Random Differential Equations in Science and Engineering*. New York and London: Academic Press.

Received: December 14, 2018

Dobronets B.S., Popova O.A. (2019) COMPUTATIONAL ASPECTS OF PROBABILISTIC EXTENSIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 41–48

DOI: 10.17223/19988605/47/5

Добронец Б.С., Попова О.А. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСШИРЕНИЙ. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2019. № 47. С. 41–48

В статье предлагается новый подход к вычислению функций со случайными аргументами. Подход основан на идее уменьшения размерности функции путем вычисления определенных интегралов и использования вычислительного вероятностного анализа. Применяется одно из основных понятий вычислительного вероятностного анализа – вероятностное расширение для вычисления функции со случайными аргументами. Для реализации этого метода предлагается способ, основанный на параллельных рекурсивных вычислениях. Приведены численные примеры, демонстрирующие эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: вычислительный вероятностный анализ; вероятностные расширения; не Монте-Карло методы; случайные краевые задачи.

DOBRONETS Boris Stanislavovich (Doktor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Systems of artificial intelligence Institute of Space and Information Technologies, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).
E-mail: BDobronets@yandex.ru

POPOVA Olga Arcadevna (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Systems of artificial intelligence Institute of Space and Information Technologies, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).
E-mail: OlgaArc@yandex.ru

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/47/6

К.С. Ким, В.И. Смагин

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант № 17-08-00920.

Рассматривается задача синтеза экстраполятора для дискретного объекта с мультипликативными возмущениями, неизвестным входом и неизвестными параметрами. Задача решена на основе принципа разделения с использованием оптимальной рекуррентной экстраполяции, метода наименьших квадратов и сглаживающих процедур.

Ключевые слова: оценки экстраполяции; дискретная система; мультипликативные возмущения; неизвестный вход, неизвестные параметры.

Задачи оценивания для дискретных систем с мультипликативными возмущениями рассматривались в работах [1–3]. Аналогичные задачи оценивания для непрерывных систем с мультипликативными возмущениями изучались в статье [4]. Для моделей систем с неопределенными параметрами такие задачи были рассмотрены в [5]. Задачи фильтрации и экстраполяции для дискретных систем с неизвестным входом и аддитивными гауссовскими возмущениями изучались в [6–13]. В [7–8] для вычисления оценок неизвестного входа использовался МНК, в работах [9–13] для улучшения качества оценивания применялись алгоритмы непараметрического сглаживания.

В настоящей статье рассматривается задача экстраполяции в дискретных системах с мультипликативными и аддитивными возмущениями с неизвестными входом и неизвестными параметрами. Задача решается на основе принципа разделения с помощью алгоритмов МНК и с использованием сглаживающих процедур (скользящего среднего и непараметрического сглаживания).

1. Постановка задачи

Пусть модель объекта с мультипликативными возмущениями и неполной информацией описывается разностным уравнением:

$$x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)u(k)+\sum_{s=1}^{m}A_s x(k)\theta_s(k)+f(k)+q(k),\ \ x(0)=x_0, \tag{1}$$

где $x(k)\in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния, $u(k)\in \mathrm{R}^p$ – известный вход, $f(k)$ – неизвестный вход; x_0 – случайный вектор (предполагаются известными дисперсионная матрица $N_0=\mathrm{M}\{(x_0-\bar{x}_0)(x_0-\bar{x}_0)^{\mathrm{T}}\}$ и математическое ожидание $\bar{x}_0=\mathrm{M}\{x_0\}$); $A,\ B,\ A_s\ (s=1...m)$ – заданные матрицы; $\Delta A, \Delta B$ – матрицы неизвестных параметров; $q(k)$ и $\theta_s(k)$ – векторные гауссовские случайные последовательности со следующими характеристиками:

$$\mathrm{M}\{q(k)\}=0,\ \mathrm{M}\{q(k)q^{\mathrm{T}}(j)\}=Q\delta_{kj},\ \mathrm{M}\{\theta_s(k)\}=0,\ \mathrm{M}\{\theta_s(k)\theta_s^{\mathrm{T}}(j)\}=\Theta_s\delta_{kj}.$$

Здесь δ_{kj} – символ Кронекера.

Канал наблюдений имеет вид:

$$y(k) = Sx(k) + v(k), \tag{2}$$

где $v(k)$ – гауссовская случайная последовательность с характеристиками: $\mathrm{M}\{v(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{v(k)v^{\mathrm{T}}(j)\} = V\delta_{kj}$. Предполагается, что последовательности $q(k)$, $\theta_s(k)$, $v(k)$ независимы между собой, пара матриц S, A детектируема, матрицы Q, Θ_s $(s = 1...m)$ – неотрицательно определены, $V > 0$.

По информации, поступившей в момент $k \in [0; T]$, требуется найти оценку прогноза $\hat{x}(k+1)$ на основе минимизации следующего критерия:

$$J[0;T] = M\{\sum_{k=0}^{T} e^{\mathrm{T}}(k)R(k)e(k)\}, \tag{3}$$

где $R(k) > 0$ – весовая матрица, $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ – вектор ошибок.

2. Синтез оптимального экстраполятора

Представим модель (1) в следующем виде:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \sum_{s=1}^{m} A_s x(k)\theta_s(k) + r(k) + q(k),\ x(0) = x_0, \tag{4}$$

где $r(k) = \Delta Ax(k) + \Delta Bu(k) + f(k)$ – неизвестный вектор.

Для решения задачи экстраполяции воспользуемся принципом разделения. Это означает, что сначала мы построим оценки вектора $\hat{x}(k)$ в предположении, что вектор $r(k)$ известен, затем строятся оценки вектора $\hat{r}(k)$ в предположении, что оценка прогноза вектора состояния $\hat{x}(k)$ известна.

Тогда для построения оценки можно использовать рекуррентный алгоритм экстраполятора Калмана

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + r(k) + K(k)(y(k) - S\hat{x}(k)),\ \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \tag{5}$$

где $K(k)$ – матрица коэффициентов передачи экстраполятора.

Найдем матрицу $K(k)$, обеспечивающую минимум критерия (3). Для этого запишем уравнение для вектора ошибок $e(k)$, вычитая из уравнения (4) уравнение (5):

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) = \\ &= (A - KS)e(k) + \sum_{s=1}^{m} A_s x(k)\theta_s(k) + q(k) - Kv(k). \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая (6), уравнение для матрицы $N(k) = \mathrm{M}\{e(k)e(k)^{\mathrm{T}}\}$ получим в виде следующего разностного уравнения:

$$\begin{aligned} N(k+1) &= (A - K(k)S)N(k)(A - K(k)S)^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_s N(k) A_s^{\mathrm{T}} + \\ &+ \sum_{s=1}^{m} A_s \hat{x}(k)\hat{x}(k)^{\mathrm{T}} A_s^{\mathrm{T}} + Q + K(k)VK(k)^{\mathrm{T}},\ N(0) = N_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Представим критерий (3) в виде

$$J[0;T] = \mathrm{tr}\, N_0 R(0) + \sum_{k=1}^{T} \mathrm{tr}\, N(k)R(k), \tag{8}$$

где tr – след матрицы. Тогда, подставив в (8) формулу (7) со сдвигом на один такт, в результате получим

$$\begin{aligned} J[0;T] = \mathrm{tr}\, N_0 R(0) + \sum_{k=1}^{T} \mathrm{tr}[&(A - K(k-1)S)N(k-1)(A - K(k-1)S)^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_s N(k-1) A_s^{\mathrm{T}} + \\ &+ \sum_{s=1}^{m} A_s \hat{x}(k-1)\hat{x}(k-1)^{\mathrm{T}} A_s^{\mathrm{T}} + Q + K(k-1)VK(k-1)^{\mathrm{T}}]R(k). \end{aligned} \tag{9}$$

Используя правила дифференцирования функции след (tr) от произведения матриц [14]:

$$\frac{\partial \operatorname{tr} AXB}{\partial X} = A^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}, \ \frac{\partial \operatorname{tr} A^{\mathrm{T}} X B^{\mathrm{T}}}{\partial X} = BA, \tag{10}$$

из уравнения

$$\frac{\partial J[0;T]}{\partial K} = 0, \tag{11}$$

учитывая, что матрица $R(k)$ не вырождена, получим выражение для матрицы $K(k)$:

$$K(k) = AN(k)S^{\mathrm{T}}(SN(k)S^{\mathrm{T}} + V)^{-1}. \tag{12}$$

Теперь рассмотрим стационарный случай, когда дополнительно предполагается, что пара матриц A, B управляема и существует управление в форме обратной связи, зависящей от $\hat{x}(k)$, которое осуществляет слежение за некоторым постоянным вектором z. Тогда матрица коэффициентов передачи экстраполятора также будет постоянной и может быть вычислена по формуле

$$K = ANS^{\mathrm{T}}(SNS^{\mathrm{T}} + V)^{-1}, \tag{13}$$

где матрица N определяется из решения матричного алгебраического уравнения

$$N = (A - KS)N(A - KS)^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_s N A_s^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_s z z^{\mathrm{T}} A_s^{\mathrm{T}} + Q + KVK^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

Если решение уравнения (14) существует, $N > 0$, а также в силу того, что в этом случае матрица $\sum_{s=1}^{m} A_s N A_s^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m} A_s z z^{\mathrm{T}} A_s^{\mathrm{T}} + Q + KVK^{\mathrm{T}}$ положительно определена, следует устойчивость матрицы динамики экстраполятора $(A - KS)$, так как будет выполнено условие устойчивости для дискретных систем в виде следующего матричного неравенства:

$$(A - KS)N(A - KS)^{\mathrm{T}} - N < 0. \tag{15}$$

3. Оценка неизвестного входа

В качестве алгоритма оценивания неизвестного входа будем использовать алгоритмы МНК, в этом случае оценку можно построить на основе минимизации дополнительного критерия [7, 8]:

$$I = \sum_{t=1}^{k} \left\{ \left\| y(t) - S\tilde{x}(t) \right\|_W^2 + \left\| r(t-1) \right\|_{\overline{W}}^2 \right\}, \tag{16}$$

где $W, \overline{W}$ – положительно определенные весовые матрицы, $\tilde{x}(t) = A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1) + r(t-1)$. Построенные на основе минимизации (16) оценки неизвестного входа примут вид:

$$\hat{r}^{\langle \mathrm{LSM} \rangle}(k) = [S^{\mathrm{T}} W S + \overline{W}]^{-1} S^{\mathrm{T}} W \{ y(k) - S\ (A\hat{x}(k-1) + Bu(k-1)) \}. \tag{17}$$

Оценка неизвестного входа, использующая дополнительное непараметрическое сглаживание [11–13], определим по формуле:

$$\hat{r}^{\langle \mathrm{NP} \rangle}(k) = [S^{\mathrm{T}} W S + \overline{W}]^{-1} S^{\mathrm{T}} W \hat{\Omega}, \tag{18}$$

где j-я компонента вектора $\hat{\Omega}(k)$ имеет вид:

$$\hat{\Omega}_j(k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{[y(i) - S(A\hat{x}(i-1) + Bu(i-1))]_j}{\mu_j} G\left(\frac{k-i+1}{\mu_j} \right)}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu_j} G\left(\frac{k-i+1}{\mu_j} \right)}. \tag{19}$$

В соотношении (19), $G(\cdot)$ является ядерной функцией и μ_j – коэффициентом сглаживания.

Для построения оценки неизвестного входа можно также использовать скользящее среднее $\bar{\Omega}$:

$$\hat{r}^{\langle SM\rangle}(k) = [S^{\mathrm{T}}WS + \bar{W}]^{-1} S^{\mathrm{T}} W \bar{\Omega}, \tag{20}$$

где j-я компонента вектора $\bar{\Omega}$ вычисляется по формуле

$$\bar{\Omega}_j(k) = \sum_{i=k-l-1}^{k} \frac{[y(i) - S(A\hat{x}(i-1) + Bu(i-1))]_j}{l} \tag{21}$$

(в (21) l – ширина окна сглаживания).

4. Результаты моделирования

Экстраполяции в дискретных системах с мультипликативными возмущениями реализована для трех вариантов вычисления оценок неизвестного вектора (формулы (17), (18), (20)). Оценки вектора состояния определялись из рекуррентного уравнения

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + \hat{r}(k) + K(k)(y(k) - S\hat{x}(k)),\ \ \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \tag{22}$$

где матрица коэффициентов передачи $K(k)$ вычислялась по формуле (12).

Моделирование выполнено для следующих исходных данных:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 \\ -0{,}05 & 0{,}94 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & -0{,}0015 \\ 0{,}003 & 0{,}01 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}004 \\ -0{,}002 & 0{,}01 \end{pmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}1 \end{pmatrix},\ \Delta B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}03 \\ 0 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0 \\ 0 & 0{,}04 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0 \\ 0 & 0{,}02 \end{pmatrix},$$

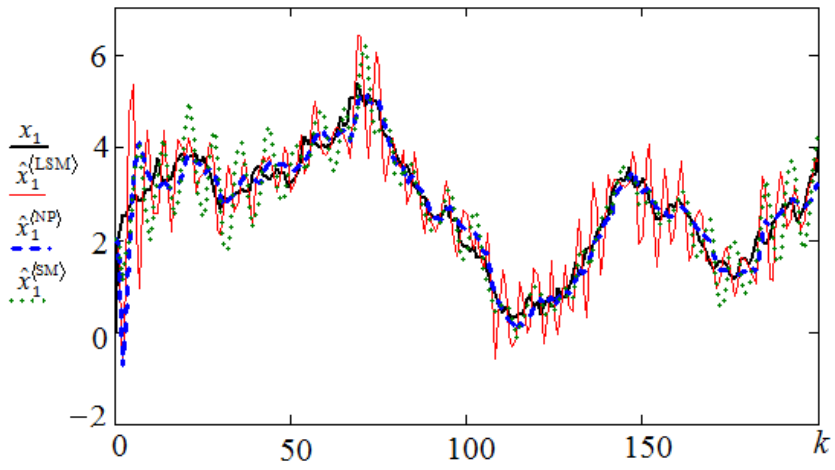
$$W = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}15 \end{pmatrix},\ \bar{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$u(k) \begin{cases} \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ if } k \in [1;30], \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ if } k \in [31;75], \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ if } k \in [76;126], \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ if } k \in [127;184], \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ if } k \in [185;200]. \end{cases}$$

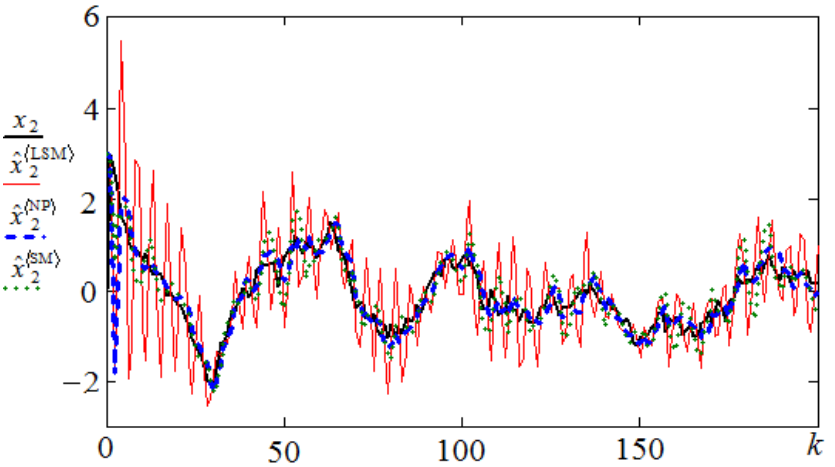
В (19) использовалась ядерная функция гауссовского вида:

$$G(u) = \frac{\exp\left(\dfrac{-u^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Результаты моделирования представлены на рис. 1, 2 и в табл. 1, 2.



a



b

Рис. 1, *a*, *b*. Графики компонент вектора состояния *x* и оценок вектора состояния, полученные с использованием алгоритмов МНК $\hat{x}^{\langle LSM\rangle}$, модифицированного МНК с использованием непараметрического сглаживания $\hat{x}^{\langle NP\rangle}$, модифицированного МНК с использованием метода скользящего среднего $\hat{x}^{\langle SM\rangle}$

Fig. 1, *a*, *b*. Graphs for the state vector *x* components and state vector estimates components using LSM algorithms $\hat{x}^{\langle LSM\rangle}$, modified LSM using nonparametric smoothing $\hat{x}^{\langle NP\rangle}$, modified LSM using the moving average method $\hat{x}^{\langle SM\rangle}$

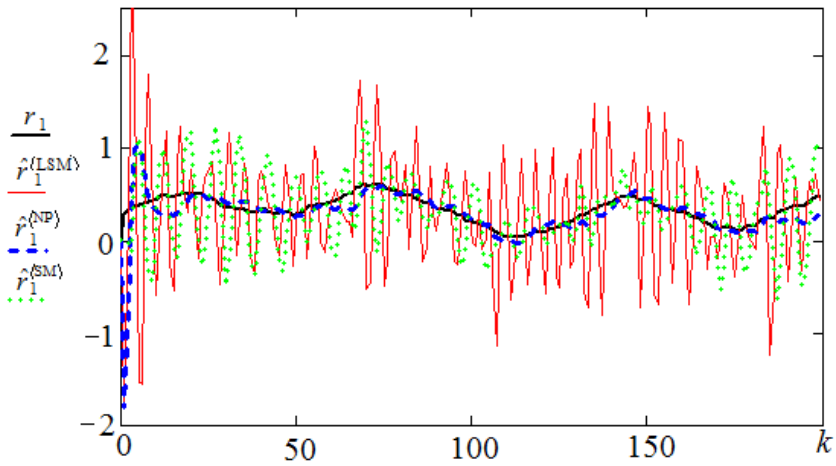
В табл. 1 приведены результаты сравнения среднеквадратических ошибок отклонений оценок вектора состояния для алгоритмов МНК и модифицированного МНК, использующего процедуру скользящего среднего и алгоритм непараметрического сглаживания для оценки неизвестного входа. Расчет среднеквадратических ошибок оценивания выполнялся по формулам:

$$\sigma_{x,i} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2}{N-1}}, \quad \sigma_{r,i} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N}(r_i(k) - \hat{r}_i(k))^2}{N-1}} \quad (i = \overline{1,2}).$$

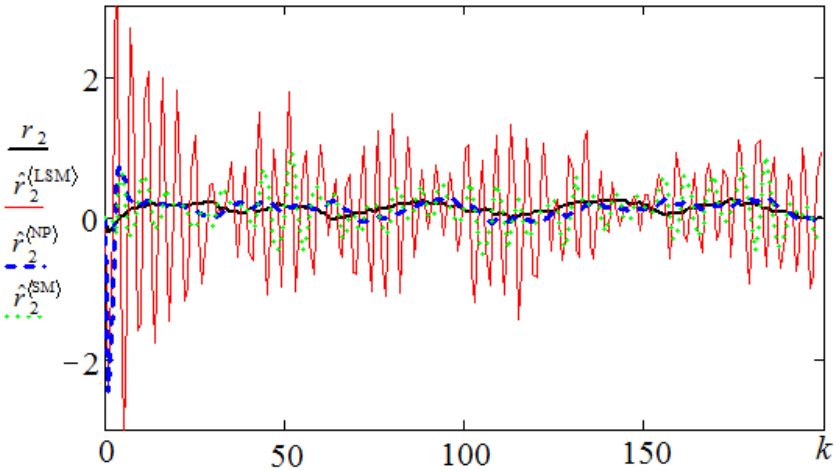
Таблица 1

Среднеквадратические ошибки оценок вектора состояния ($\sigma_{x,i}$)

Номер компоненты *i*	МНК	МНК и скользящее среднее	МНК и непараметрическое сглаживание
1	0,732	0,527	0,294
2	0,821	0,425	0,268



a



b

Рис. 2, *a*, *b*. Графики компонент вектора неизвестного входа *r* и оценок вектора неизвестного входа, полученных с использованием алгоритмов МНК $\hat{r}^{\langle LSM \rangle}$, модифицированного МНК с использованием непараметрического сглаживания $\hat{r}^{\langle NP \rangle}$, модифицированного МНК с использованием метода скользящего среднего $\hat{r}^{\langle SM \rangle}$

Fig. 2, *a*, *b*. Graphs for the unknown input vector *r* components and estimates vector of the unknown input components using the LSM algorithms $\hat{r}^{\langle LSM \rangle}$, modified LSM using nonparametric smoothing $\hat{r}^{\langle NP \rangle}$, modified LSM using the moving average method $\hat{r}^{\langle SM \rangle}$

В табл. 2 показаны среднеквадратические ошибки отклонений оценок неизвестного входа.

Таблица 2

Среднеквадратические ошибки оценок *r*(*k*) ($\sigma_{r,i}$)

Номер компоненты *i*	МНК	МНК и скользящее среднее	МНК и непараметрическое сглаживание
1	0,712	0,454	0,293
2	0,763	0,302	0,099

Из табл. 1 и 2 видно, что применение для оценок неизвестного входа МНК с дополнительным сглаживанием с помощью алгоритмов скользящего среднего и непараметрического сглаживания позволяет уменьшить среднеквадратические ошибки оценок экстраполяции вектора состояния и среднеквадратические ошибки оценок вектора неизвестного входа.

Заключение

Получено решение задачи синтеза экстраполятора для линейной дискретной модели с аддитивными и мультипликативными возмущениями, с неизвестным входом и неизвестными параметрами. Показано, что применение алгоритмов сглаживания при оценивании неизвестного входа позволяет повысить точность прогнозирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mohanty N.C., Soong T.T. Linear filtering in multiplicative noise // Information and Control. 1977. V. 34, is. 2. P. 141–147.
2. Stoica A.-M., Yaesh I. Kalman-type filtering for discrete-time stochastic systems with state-dependent noise // Proc. Mathematical Theory of Networkand Systems-MTNS. 28 July – 1 August, Blacksburg, VA. 2008. P. 1–6.
3. Wu Y., Zhang Q., Shen Z. Kalman filtering with multiplicative and additive noises // Proc. 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). 12–15 June, 2016. P. 483–487.
4. Germani A., Manes C., Palumbo P. Linear filtering for bilinear stochastic differential systems with unknown inputs // IEEE Trans. on Automatic Control. 2002. V. 47, No. 10. P. 1726–1730.
5. Yang F., Wang Z., Hung Y.S. Robust Kalman filtering for discrete time-varying uncertain systems with multiplicative noises // IEEE Trans. on Automatic Control. 2002. V. 47, No. 7. P. 1179–1183.
6. Smagin V.I. State estimation for nonstationary discrete systems with unknown input using compensations // Russian Physics Journal. 2015. V. 58, is. 7. P. 1010–1017.
7. Janczak D., Grishin Yu. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // Control and Cybernetics. 2006. No. 4. P. 851–862.
8. Gillijns S., Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // Automatica. 2007. V. 43. P. 111–116.
9. Hsien C.-S. On the optimality of two-stage Kalman filter for systems with unknown input // Asian J. of Control. 2010. V. 12, No. 4. P. 510–523.
10. Witczak M. Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems. Ch. 2: Unknown input observers and filters // Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer International Publishing, 2014. P. 19–56.
11. Koshkin G.M., Smagin V.I. Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms // Proc. 10th International Conference on Digital Technologies. Zilina, Slovakia, July 9–11, 2014. P. 120–124.
12. Smagin V.I., Koshkin G.M. Kalman filtering and conrol algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique // Proc. 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015). 24–27 August, 2015, Miedzyzdroje, Poland. P. 247–251.
13. Koshkin G.M., Smagin V.I. Kalman filtering and forecasting algorithms with use of nonparametric functional estimators // Springer Proceeding in Mathematical Statistics / eds. R. Cao et al. 2016. Vol. 175. P. 75–84.
14. Athans M. The matrix minimum principle // Informat. and Contr. 1968. V. 11. P. 592–606.

Поступила в редакцию 28 сентября 2018 г.

Kim K.S., Smagin V.I. (2019) EXTRAPOLATION IN DISCRETE SYSTEMS WITH MULTIPLICATIVE PERTURBATIONS AT INCOMPLETE INFORMATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 49–56

DOI: 10.17223/19988605/47/6

The model with multiplicative perturbations and incomplete information is described by the equation:

$$x(k+1) = (A+\Delta A)x(k) + (B+\Delta B)u(k) + \sum_{s=1}^{m} A_s x(k)\theta_s(k) + f(k) + q(k),\ \ x(0) = x_0,$$

where $x(k) \in \mathrm{R}^n$ is the state vector, $u(k) \in \mathrm{R}^p$ is the known input, $f(k)$ is an unknown input; x_0 is a random vector (the covariance matrix $N_0 = \mathrm{M}\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}}\}$ and the expectation $\bar{x}_0 = \mathrm{M}\{x_0\}$ are assumed to be known); A, B, $A_s\ (s = 1...m)$ are known matrices; ΔA, ΔB are matrices of unknown parameters; $q(k)$ and $\theta_s(k)$ are Gaussian vector random sequences with the following characteristics: $\mathrm{M}\{q(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{q(k)q^{\mathrm{T}}(j)\} = Q\delta_{kj}$, $\mathrm{M}\{\theta_s(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{\theta_s(k)\theta_s^{\mathrm{T}}(j)\} = Q\delta_{kj}$.

The observation channel is described by the formula: $y(k) = Sx(k) + v(k)$, where $v(k)$ is a Gaussian random sequence with known characteristics.

The problem solution is proposed to be performed on the basis of the separation principle using the optimal recurrent extrapolation, the least squares method with additional smoothing using the moving average algorithms and nonparametric estimators. It is shown that the use of smoothing algorithms for estimating an unknown input for a discrete model with multiplicative perturbations allows can improve the prediction accuracy.

Keywords: extrapolation estimates; discrete system; multiplicative perturbations; unknown input, unknown parameters.

KIM Konstantin Stanislavovich (Post-graduate student of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: kks93@rambler.ru

SMAGIN Valery Ivanovich (Doctor of Technical Science, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: vsm@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Mohanty, N.C. & Soong, T.T. (1977) Linear filtering in multiplicative noise. *Information and Control*. 34(2). pp. 141–147.
2. Stoica, A.-M. & Yaesh, I. (2008) Kalman–type filtering for discrete–time stochastic systems with state–dependent noise. *Proc. Mathematical Theory of Networkand Systems-MTNS*. July 28 – August 1. Blacksburg, VA. pp. 1–6.
3. Wu, Y., Zhang, Q. & Shen, Z. (2016) Kalman filtering with multiplicative and additive noises. *Proc. 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*. June 12–15. pp. 483–487.
4. Germani, A., Manes, C. & Palumbo, P. (2002) Linear filtering for bilinear stochastic differential systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 47(10). pp. 1726–1730. DOI: 10.1109/TAC.2002.803546
5. Yang, F., Wang, Z. & Hung, Y.S. (2002) Robust Kalman filtering for discrete time-varying uncertain systems with multiplicative noises. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 47(7). pp. 1179–1183. DOI: 10.1109/TAC.2002.800668
6. Smagin, V.I. (2015) State estimation for nonstationary discrete systems with unknown input using compensations. *Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 1010–1017. DOI: 10.1007/s11182-015-0602-x
7. Janczak, D. & Grishin, Yu. (2006) State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming. *Control and Cybernetics*. 4. pp. 851–862.
8. Gillijns, S. & Moor, B. (2007) Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*. 43. pp. 111–116. DOI: 10.1016/j.automatica.2006.11.016
9. Hsien, C.-S. (2010) On the optimality of two-stage Kalman filter for systems with unknown input. *Asian Journal of Control*. 12(4). pp. 510–523. DOI: 10.1109/9.895577
10. Witczak, M. (2014) Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems. Chapter 2. Unknown input observers and filters. In: Angrisani, L. et al. (eds) *Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer International Publishing.* Switzerland. pp. 19–56.
11. Koshkin, G.M. & Smagin, V.I. (2014) Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms. *Proc. of the 10th International Conference on Digital Technologies*. Zilina, Slovakia. July 9–11. pp. 120–124.
12. Smagin, V.I. & Koshkin, G.M. (2015) Kalman filtering and conrol algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique. *Proc. 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015)*. August 24–27. Miedzyzdroje. Poland. pp. 247–251.
13. Koshkin, G.M. & Smagin, V.I. (2016) Kalman filtering and forecasting algorithms with use of nonparametric functional estimators. In: Cao, R. et al. (eds) *Springer Proceeding in Mathematical Statistics.* Vol. 175. pp. 75–84.
14. Athans, M. (1968) The matrix minimum principle. *Information and Control*. 11. pp. 592–606.

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

УДК 681.5
DOI: 10.17223/19988605/47/7

И.А. Корелин, С.В. Поршнев

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВАРИАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ВХОДНОГО ПОТОКА НА МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СМО

Обсуждаются результаты исследования влияния случайных вариаций интенсивности входного потока на макроскопические характеристики нестационарной системы массового обслуживания (НСМО), в которых были выбраны статистические характеристики стохастической составляющей вариации интенсивности входного потока на основе анализа статистической информации. Построены оценки характеристик НСМО, на вход которой поступает поток заявок, интенсивности которых зависят от детерминированной и случайной составляющих.

Ключевые слова: нестационарные СМО; дискретно-событийное моделирование.

В настоящее время для обеспечения доступа посетителей на объекты проведения массовых мероприятий широко используются контрольно-пропускные системы (КПС) [1]. В связи с тем, что интенсивности потоков посетителей, проходящих через КПС, изменяются во времени, можно рассматривать КПС как нестационарную систему массового обслуживания (НСМО). (Напомним, что НСМО отличаются от стационарных систем массового обслуживания тем, что интенсивности поступления заявок на вход НСМО λ и интенсивности их обслуживания μ изменяются во времени, в том числе и случайно.) Изучение особенностей функционирования данных систем представляет несомненный интерес с практической точки зрения, поскольку полученные при этом результаты могут быть использованы для научного обоснования принимаемых конструкторских решений на этапе проектирования и модернизации нестационарных систем массового обслуживания (НСМО), а также для объективного оценивания особенностей функционирования данных систем при возникновении на объекте проведения массовых мероприятий нештатных ситуаций (террористический акт, пожар и т.д.).

Поскольку аналитическое исследование подобных систем удается провести для малого числа НСМО [2–4], для изучения их количественных характеристик целесообразно использовать подход, основанный на использовании имитационных моделей НСМО, работоспособность которого ранее была продемонстрирована авторами в [5]. В данном подходе используется кусочно-постоянная аппроксимация функции $\lambda = \lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{K} \left(\theta\left(t - t_k\right) - \theta\left(t - t_{k+1}\right) \right) \cdot \bar{\lambda}_k, \tag{1}$$

где $\theta\left(t - \xi\right)$ – функция Хэвисайда:

$$\theta\left(t - \xi\right) = \begin{cases} 0, t < \xi, \\ 1, t \geq \xi \end{cases} \tag{2}$$

($\bar{\lambda}_k$ – среднее значение функции $\lambda_{\exp}\left(t\right)$ на интервале $\left[t_k, t_{k+1}\right]$).

При этом полагается, что на каждом из интервалов $\left[\tau_k, \tau_{k+1}\right]$ моделируемую систему можно рассматривать как СМО, на вход которой поступает стационарный поток заявок с интенсивностью λ_k, а ее начальное состояние соответствует конечному состоянию СМО на интервале $\left[\tau_{k-2}, \tau_{k-1}\right]$. Однако оказывается, что интенсивность потока заявок на входе НСМО, как показывают результаты анализа информации о динамике процесса входа посетителей на футбольный стадион, собранной во время

проведения футбольных матчей, представляет собой аддитивную смесь детерминированной и случайной составляющих:

$$\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_k^{\text{det}} + \bar{\lambda}_k^{\text{rnd}}, \tag{3}$$

Отметим, что в ранее проведенных исследованиях [5] наличие случайной составляющей интенсивности $\bar{\lambda}_k^{\text{rnd}}$ при расчете макроскопических характеристик НСМО во внимание не принималась.

В статье изложены результаты исследования случайной составляющей интенсивности потока заявок, поступающих на вход НСМО, на оценки ее количественных характеристик.

1. Математическая модель нестационарной системы массового обслуживания

Структурная схема модели нестационарной одноканальной СМО с неограниченной очередью представлена на рис. 1.

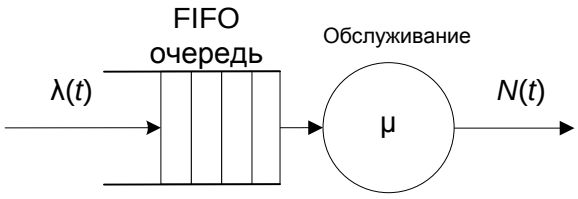


Рис. 1. Схема модели нестационарной СМО
Fig. 1 The block diagram of non-stationary QS

В данной модели предполагается, что на вход СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda(t)$, изменяющейся во времени. Основной характеристикой входного потока событий является мгновенная плотность потока $\lambda(t)$, вычисляемая по формуле

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} = \frac{dM(t)}{dt}, \tag{4}$$

где $M(t)$ – математическое ожидание числа событий на интервале $[0, t]$.

Для обслуживания очереди посетителей используется политика FCFS (first come – fist service, первый вошел – первый вышел). Скорость обслуживания поступающих заявок определяется интенсивностью обслуживания μ заявок/мин. В работе принято допущение, что время на обслуживание одной заявки можно охарактеризовать как случайную величину с плотностью вероятности $p\{\xi\}$:

$$p\{\xi\} = \begin{cases} 0, \text{ при } \xi \le 1, \\ \dfrac{2M[\xi]}{9(M[\xi]-1)}(\xi - 1), \text{ при } 1 < \xi \le M[\xi], \\ \dfrac{2M[\xi]}{9(M[\xi]-10)}(\xi - 10), \text{ при } M[\xi] < \xi < 10, \\ 0, \text{ при } \xi \ge 10, \end{cases} \tag{5}$$

где $\xi \in [1,10]$. В проведенном исследовании мы использовали случайные числа, генерируемые в соответствии с плотностью вероятности (5) и $M[\xi] = 4$ с. При этом средняя интенсивность обслуживания $\bar{\mu}$ составила 15 заявок/мин.

Анализ статистической информации выполнялся с использованием данных, собранных 05.05.2013 г. во время проведения футбольного матча между футбольными клубами «Крылья советов» и «Динамо» на стадионе «Металлург», г. Самара. Типичная зависимость $\lambda_{\text{exp}}(t)$, полученная во время проведения футбольного матча, приведена на рис. 2 [1].

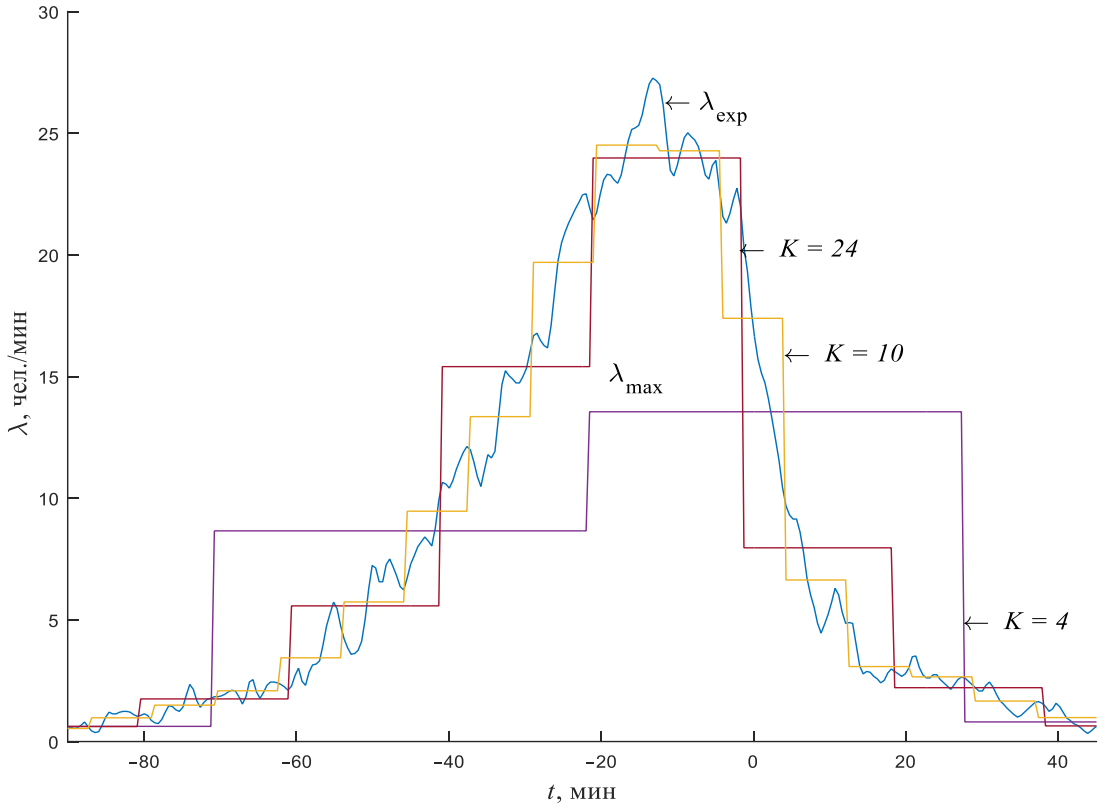


Рис. 2. Типичная зависимость λ(t) нестационарной СМО (начало матча t = 0)
Fig. 2. The dependences λ(t) of non-stationary QS (the beginning of the match t = 0)

Доступ на стадион «Металлург» был открыт за 1,5 часа до начала футбольного матча. После открытия турникетов в течение времени $T_1 \approx 70$ мин интенсивность поступления заявок нарастала от 0 чел./мин до λ_{max} = 28 чел./мин. Примерно за 15 мин до начала матча интенсивность поступления заявок начала уменьшаться. В последующие 50 мин ($T_2 \approx 50$) число заявок уменьшилось от λ_{max} = 28 чел./мин до 0 чел./мин. Общее число посетителей N, вошедших через одно контрольно-пропускное устройство (турникет) на стадион «Металлург»,

$$N = \int_{-80}^{40} \lambda(t)\,dt, \tag{6}$$

составило 1 400 чел.

Из рис. 2 видно, что зависимость $\lambda_{exp}(t)$ представляет собой аддитивную смесь детерминированной и случайной составляющих:

$$\lambda_{exp}(t) = \lambda_{det}(t) + \lambda_{rnd}(t). \tag{7}$$

При поиске удачной аппроксимации детерминированной составляющей обнаружено, что зависимость λ(t) имеет ярко выраженный максимум в точке $t = T_0$. В этой связи для выделения из экспериментальной зависимости $\lambda_{exp}(t)$ случайной составляющей $\lambda_{rnd}(t)$ на интервалах $[T_1;T_0]$, $[T_0,T_2]$ была использована кусочно-полиномиальная аппроксимация зависимости $\lambda_{apr}(t)$ (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что в первом приближении остатки кусочно-полиномиальной аппроксимации (зависимость $\lambda_{rnd}(t)$) можно рассматривать как случайные (точнее, «квазислучайные») числа, для оценки плотности распределения и функции распределения которых можно использовать аппроксимацию Розенблата–Парзена [7, 8] с ядерной функцией типа Коши, как обеспечивающую наименьшее значение информационного функционала (рис. 4).

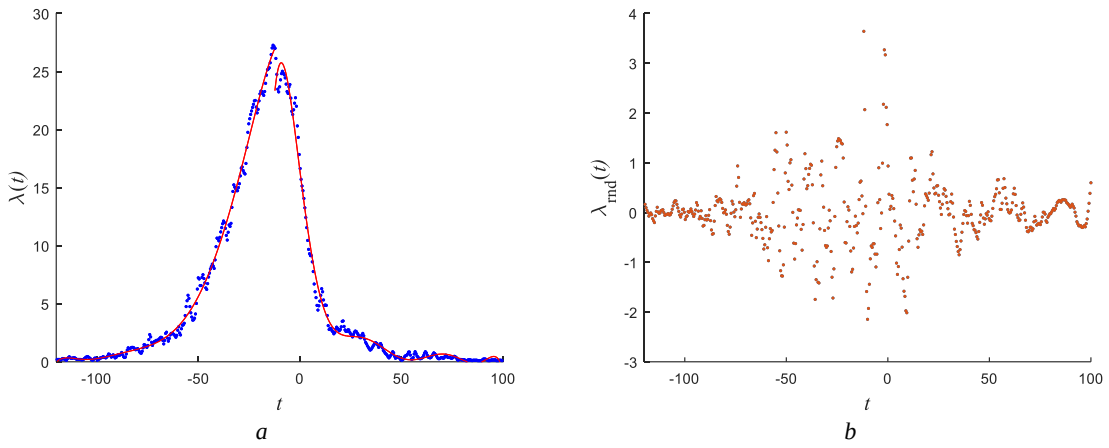


Рис. 3. Визуализация кривых $\lambda_{\text{apr}}(t)$, аппроксимирующих зависимость $\lambda_{\text{exp}}(t)$ (*a*).
Остатки кусочно-полиномиальной аппроксимации входной интенсивности $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ (*b*)

Fig. 3. Visualization of curve $\lambda_{\text{apr}}(t)$ approximating the dependence $\lambda_{\text{exp}}(t)$ (*a*).
Residuals $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ of piecewise polynomial approximation of input rate (*b*)

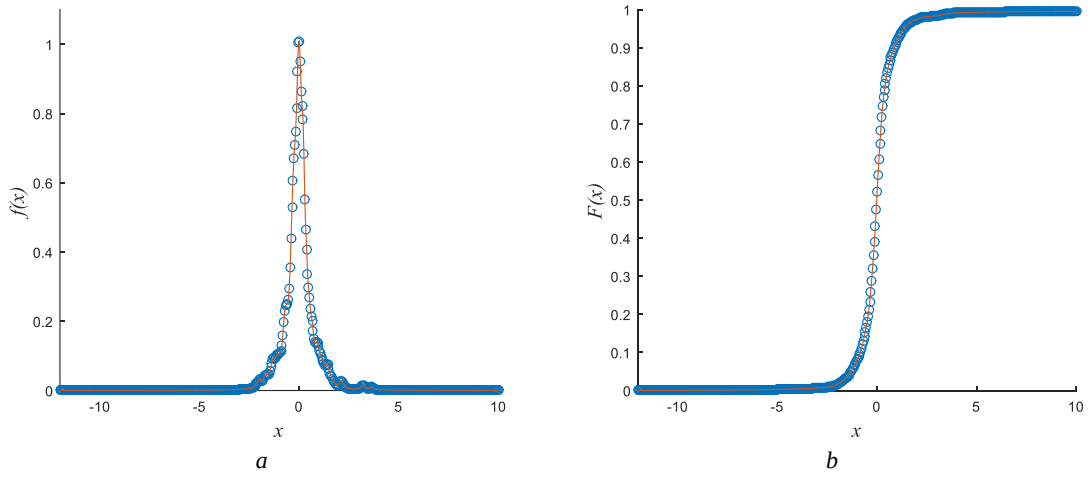


Рис. 4. Аппроксимация Розенблатта–Парзена плотности распределения случайной составляющей $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ (*a*).
Функция распределения случайной составляющей $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ (*b*)

Fig. 4. Rosenblatt–Parzen approximation of the probability density function of the input rate random component $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ (*a*).
The cumulative distribution function of input rate random component $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ (*b*)

В предыдущих исследованиях [1] авторы использовали подход по эмулированию входного потока на основании статистической информации с матчей, проводимых на стадионах, полностью повторяя статистические свойства входного потока. Подход, при всей его эффективности, однако, также имеет известный недостаток, связанный с тем, что параметры модели, вообще говоря, оказываются зависящими от имеющейся статистической информации, собранной во время проведения футбольных матчей на стадионах. В проведенном исследовании полученная оценка функции распределения была использована для генерации случайной составляющей интенсивности потока заявок, поступающего на вход изучаемой НСМО. Детерминированная составляющая интенсивности потока заявок на вход НСМО выбрана синтетической, чтобы не привязываться к конкретному событию, и описывалась функцией

$$\lambda_{\text{det}}(t) = \sum_{k=0}^{K} (\theta(t - t_k) - \theta(t - t_{k+1})) \cdot \bar{\lambda}_k^{\text{det}}, \tag{8}$$

где $\theta(t+\xi)$ – функция Хэвисайда по формуле (2) и $\bar{\lambda}_k^{\det}$ – среднее значение функции $\lambda_{\exp}(t)$ на интервале $[t_k, t_{k+1}]$.

Число интервалов K кусочно-постоянной аппроксимации зависимости $\lambda_{\det}(t)$ на основании предыдущих исследований [6] выбиралось равным 1 520.

2. Методика проведения вычислительных экспериментов

В проведенных вычислительных экспериментах были использованы следующие виды зависимостей интенсивности входного потока заявок от времени:

1) функция $\lambda_{\det}(t)$, значения которой вычислялись в соответствии с (5) (на рис. 5 обозначена сплошной линией);

2) сумма значений функции $\lambda_{\det}(t)$, вычисляемых в соответствии с (5), и случайной последовательности, сгенерированной в соответствие функцией распределения, оцененной по экспериментальным данным (на рис. 5 обозначена кружочками);

3) сумма значений функции $\lambda_{\det}(t)$, вычисляемых в соответствии с (5), и случайной последовательности, генерируемой в соответствии с функцией распределения, оцененной по экспериментальным данным, на каждом из этапов статистического моделирования (зависимость $\lambda_{\det}(t)$, использованная на первом шаге метода Монте-Карло, на рис. 5 обозначена кружочками, на других шагах алгоритма случайная составляющая изменяется).

Примеры зависимостей входной интенсивности потока заявок видов 2, 3 приведены на рис. 5.

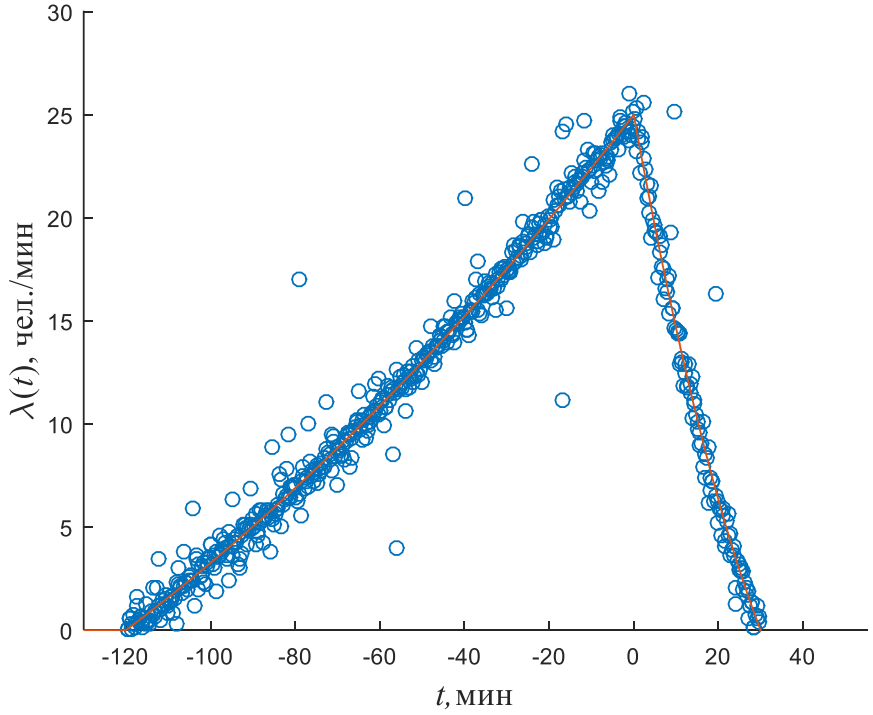


Рис. 5. Зависимости λ(*t*) нестационарной СМО (начало матча *t* = 0)
Fig. 5. λ(t) are dependences of non-stationary QS (the beginning of the match *t* = 0)

Блок-схема алгоритма, использовавшегося при проведении статистического моделирования, представлена на рис. 6. (Здесь обозначение $\mathrm{exprnd}(\lambda_i)$ означает генерацию реализации экспоненциально распределенных величин с параметром λ_i).

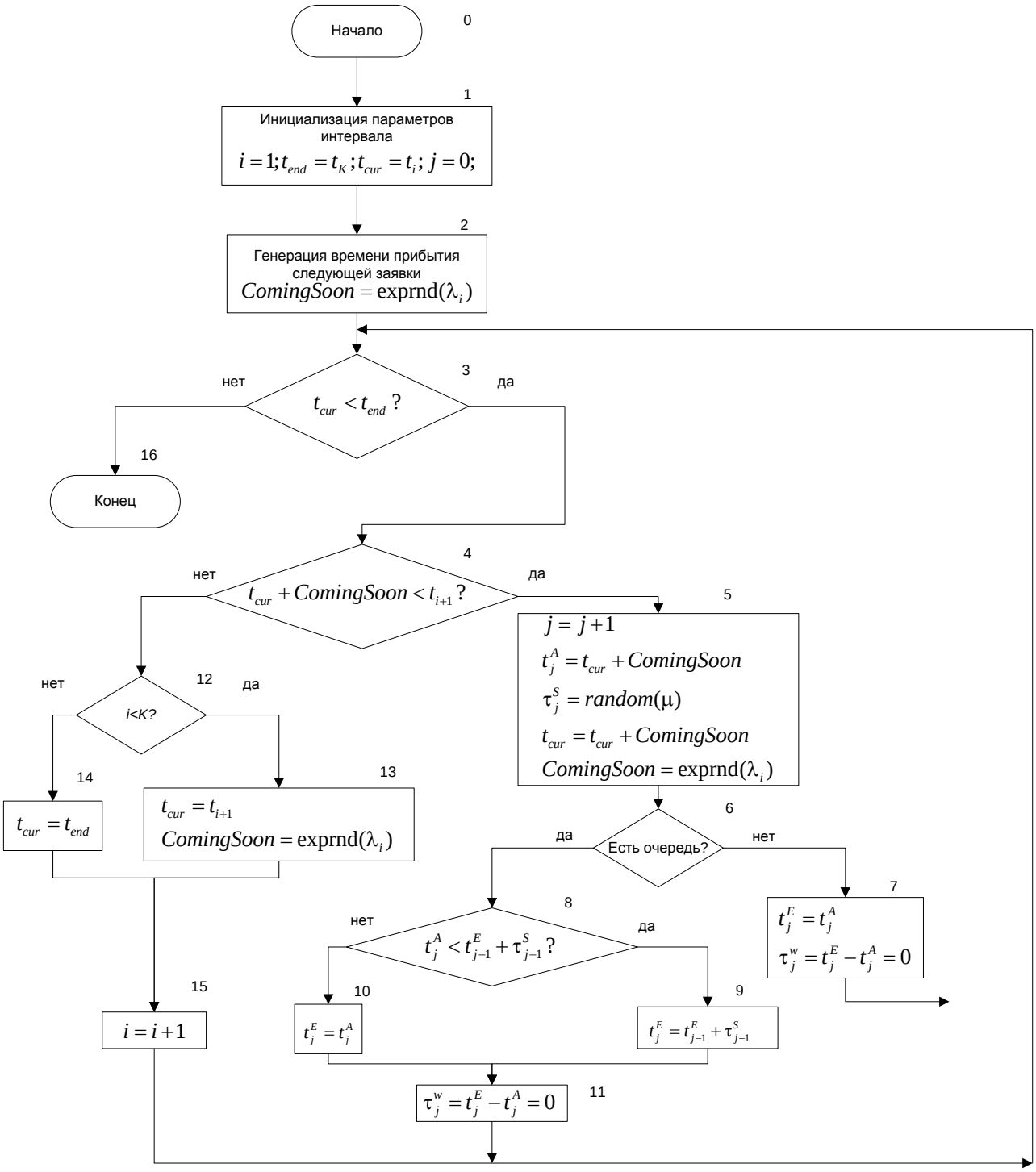


Рис. 6. Блок-схема методики проведения статистического моделирования НСМО
Fig. 6. A block diagram of the methodology for simulation of NQS

Из рис. 6 видно, что на каждом из интервалов кусочно-постоянной аппроксимации входной интенсивности в течение интервала генерировались времена прибытия заявки t^A с экспоненциальным законом распределения и интенсивностью, равной усредненному значению интенсивности прибытия. Интервал времени обслуживания τ^S генерировался в соответствии с (2). Для каждой заявки вычислялось время ее поступления в очередь t^E, для этого поочередно просматривались все заявки, находившиеся на данном временном интервале в очереди:

$$t_i^E = \begin{cases} t_i^A, \ t_i^A \geq t_{i-1}^E + \tau_{i-1}^S, \\ t_i^A + (t_{i-1}^E + \tau_{i-1}^S - t_i^A), \ t_i^A < t_{i-1}^E + \tau_{i-1}^S. \end{cases} \quad (9)$$

Отметим, что, как очевидно, для первой заявки $t_1^E = t_1^A$.

Для количественного описания особенностей работы данных НСМО, следуя [6], были использованы: зависимость длины очереди посетителей (в терминах СМО – длины очереди заявок) от времени

$$L = L(t_k) = |Q|, \text{ где } Q = \{q_n : t_n^A < t_k \cap t_n^E > t_k\}, \quad (10)$$

среднее время ожидания посетителя (в терминах СМО – заявки) в очереди от времени

$$\tau^w = \tau^w(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^{|Q|}(t_i^E - t_i^A)}{|Q|}, \text{ где } Q = \{q_n : t_n^E \leq t_k \cap t_n^E > t_{k-1}\}, \quad (11)$$

а также зависимость числа вошедших на стадион посетителей от времени (в терминах СМО – число обслуженных заявок)

$$N_{out} = N_{out}(t_k) = |Q|, \text{ где } Q = \{q_n : t_n^E < t_k\}, \quad (12)$$

где $t_k = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{K}(k-1)$, $k = \overline{1, K}$, K – количество интервалов кусочно-линейной аппроксимации $\lambda(t)$.

3. Анализ экспериментальных результатов

Примеры зависимостей выбранных количественных характеристик представлены на рис. 7.

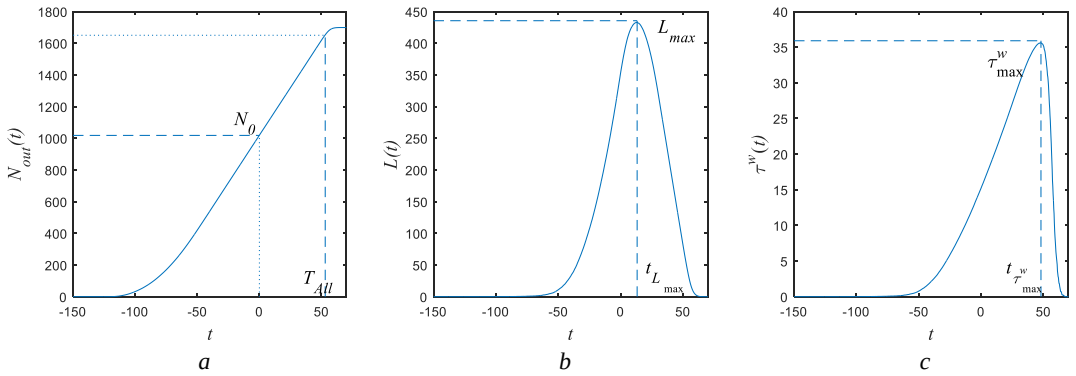


Рис. 7. Зависимости: *a* – числа вошедших от времени $N_{out}(t)$; *b* – длины очереди от времени $L(t)$; c – времени ожидания обслуживания от времени $\tau^w(t)$

Fig. 7. Dependencies: *a* – the numbers of entered from time $N_{out}(t)$; *b* – the length of the queue from the time $L(t)$; c – waiting time for maintenance from time $\tau^w(t)$

Из рис. 7 видно, что для каждой из зависимостей можно указать характерные точки, представляющие интерес для инженеров, проектировщиков, служб безопасности объектов проведения массовых мероприятий (макроскопические характеристики КПС).

1. Максимальное значение величины $x_{\max}$:

$$x_{\max} = \max(x), \text{ где } x \in \{L, \tau^w\}. \quad (13)$$

2. Значение аргумента $t_{x_{\max}}$, в котором $x(t)$ достигает максимального значения:

$$t_{x_{\max}} = \arg\max_t (x(t)), \text{ где } x \in \{L, \tau^w\}. \quad (14)$$

3. Число посетителей, вошедших к моменту начала матча:

$$N_0 = |Q|, \text{ где } Q = \{q_n : t_n^E < t = 0\}. \quad (15)$$

4. Время, необходимое для обслуживания всех посетителей:

$$T_{All} = \{t : N(t) \geq 0{,}97 \cdot N_{\max}\}, \text{ где } N_{\max} = \max(N(t)). \quad (16)$$

Совокупность значений выбранных макроскопических показателей, вычисляемых на каждом шаге метода Монте-Карло, представляет собой некоторые случайные последовательности, для оценки плотности распределения которых была использована аппроксимация Розенблатта–Парзена [7, 8]. Оценки квантилей изученных случайных последовательностей представлены в таблице.

Оценки квантилей распределений количественных показателей НСМО

Параметр	Метод вычисления λ(*t*) (см. Методика проведения вычислительных экспериментов)								
	1			2			3		
Доверительная вероятность	0,05	0,5	0,95	0,05	0,5	0,95	0,05	0,5	0,95
$L_{\max}$	371,3	439,4	512,2	369,4	437	508,9	372,7	438,9	502,1
$t_{L_{\max}}$	8,8	12,8	16,9	8,3	12,1	16,2	8,2	12,4	16,5
$\tau_{\max}^{w}$	31	36,6	42,5	30,6	36,4	42	31	36,6	41,9
$t_{\tau_{\max}^{w}}$	42	49,5	57,5	41,3	48,7	56,1	42	49,4	56,8
N_0	979	1 018,6	1 057,5	981,3	1 019,8	1 058,8	979,6	1 018,3	1 059,2
T_{All}	46,8	52,8	59,4	46,1	52,2	58,4	46,8	52,7	58,7

Из таблицы видно, что значения соответствующих квантилей распределений выбранных макроскопических характеристики НСМО оказались отличными друг от друга. В этой связи в соответствии с критерием типа Колмогорова–Смирнова была проведена проверка статистической значимости отличий данных распределений друг от друга. Оказалось, что отличия изученных распределений макроскопических характеристики НСМО на уровне доверительной вероятности $p = 10^{-4}$ для изученных диапазонов значений интенсивностей входного потока заявок статистически незначимы. Следовательно, при изучении НСМО в режиме, когда на ее вход поступает поток заявок, детерминированная составляющая которого вычисляется в соответствии с (5), а случайная составляющая находится в диапазоне интенсивностей, аналогичном диапазону изменения данной величины во время проведения футбольных матчей, оказывается достаточным учитывать только детерминированную составляющую $\lambda(t)$, что позволяет существенно сократить время исследования.

Заключение

Исследованы макроскопические характеристики НСМО при кусочно-полиномиальном изменении детерминированной составляющей входной интенсивности в диапазоне [0, 25] чел./мин.

Получены оценки макроскопических характеристик НСМО, на вход которой поступает поток заявок, интенсивность которых представляет собой смесь детерминированной и случайной составляющих.

Обнаружено, что случайная составляющая интенсивности поступления заявок, выявленная в работе, не оказывает существенного влияния на оценки макроскопических характеристик изученной НСМО. В этой связи при оценке макроскопических характеристик контрольно-пропускных систем, используемых на футбольных стадионах, достаточно использовать детерминированную зависимость λ(*t*).

ЛИТЕРАТУРА

1. Поршнев С.В., Якоб Д.А. Исследование особенностей функционирования информационных контрольно-пропускных систем объектов проведения массовых мероприятий. Екатеринбург : Ин-т экономики УрО РАН, 2014. 216 с.
2. Clarke A.B. A waiting line process of Markov type // Ann. Math. Statist. 1956. No. 27. P. 452–459.
3. Koopman B.O. Air-terminal queues under time-dependent conditions // Operation Research. 1972. № 20. P. 1089–1114.

4. Luchak G. The solution of the single channel queueing equations characterized by a time-dependent arrival rate and a general class of holding times // Operation Research. 1956. No. 4. P. 711–732.
5. Поршнев С.В., Корелин И.А. Исследование особенностей нестационарной одноканальной системы массового обслуживания в разрезе числа обслуженных заявок // Cloud of Science. 2017. Т. 4, № 3. С. 366–375.
6. Korelin I.A., Porshnev S.V. Rationale choosing interval of a piecewise-constant approximation of input rate of non-stationary queue system // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. № 944. 012060.
7. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function // Ann. Math. Statist. 1956. No. 27. P. 832–837.
8. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode // Ann. Math. Statist. 1962. No. 33. 1065–1076.

Поступила в редакцию 22 ноября 2018 г.

Korelin, I.A., Porshnev S.V. (2019) THE STUDY OF INFLUENCE OF RANDOM VARIATIONS OF INPUT RATE TO MACROSCOPIC INDICATORS OF A NON-STATIONARY QUEUING SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 57–65

DOI: 10.17223/19988605/47/7

Access control systems (ACS) are widely used to provide safe and comfortable passing for public events. The input rate of the flows of visitors passing through the ACS varies in the time. That is why ACS can be considered as non-stationary queuing system (NQS). The study of the features of the functioning of such systems is of great interest from a practical point of view. The obtained results could be used as a scientific justification for the design decisions that are accepted at the design and modernization stage of NQS. In addition, an objective assessment of the features of the functioning of these systems in moment of incident on an object for carrying out mass events (terrorist act, fire, etc.) need to be done.

In simulation the input rate is similar to the function approximating the dependence $\lambda = \lambda(t)$, fixed during the football matches. The results of simulation NQS, which receives on the input flow of requests with the rate $\lambda = \lambda(t)$, changing in time are some of NQS characteristics. The dependence of the queue length, the waiting time in service queue and the number of visitors entered from time were calculated. The averaged dependencies of the NQS characteristics on time should be considered as functions. These functions have significant values that can be useful for engineers, designers and also appropriate security services: the number of entered visitors at the beginning of the event, the maximum length of the queue of visitors, the maximum waiting time in the queue and the corresponding time points. We propose to call them macroscopic characteristics of NQS. Taking into account that the dependencies recorded during the football matches contain both deterministic and random components, a priori, we can expect that the random part will influence the macroscopic characteristics listed above.

The results of the conducted statistical modeling showed that in the studied range of variations in the input rate of requests, this component does not have a significant effect on the selected macroscopic indicators of NQS.

Keywords: non-stationary queuing system (NQS); discrete-event modeling.

KORELIN Ivan Andreevich (Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation).
E-mail: korelin.ivan@gmail.com

PORSHNEV Sergey Vladimirovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation).
E-mail: sergey_porshnev@mail.ru

REFERENCES

1. Porshnev, S.V. & Jakob, D.A. (2014) *Issledovanie osobennostey funktsionirovaniya informatsionnykh kontrol'no-propusknykh sistem ob"ektov provedeniya massovykh meropriyatiy* [The study of the functioning of information systems checkpoints objects of mass event]. Ekaterinburg: Ural Branch RAS.
2. Clarke, A.B. (1956) A waiting line process of Markov type. *Annals of Mathematical Statistics.* 27. pp. 452–459. DOI: 10.1214/aoms/1177728268
3. Koopman, B.O. (1972) Air-terminal queues under time-dependent conditions. *Operation Research*. 20. pp. 1089–1114. DOI: 10.1287/opre.20.6.1089
4. Luchak, G. (1956) The solution of the single channel queueing equations characterized by a time-dependent arrival rate and a general class of holding times. *Operation Research*. 4. pp. 711–732.
5. Porshnev, S. & Korelin, I. (2017) Non-stationary single-channel queuing system features research in context of number of served queries. *Cloud of Science.* 4(3). pp. 366–375. (In Russian).
6. Korelin, I.A. & Porshnev, S.V. (2018) Rationale choosing interval of a piecewise-constant approximation of input rate of non-stationary queue system. *Journal of Physics: Conference Series.* 944(1).
7. Rosenblatt, M. (1956) Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics*. 27. pp. 832–837.
8. Parzen, E. (1962) On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics*. 33. pp. 1065–1076. DOI: 10.1214/aoms/1177704472.

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

УДК 519.17 + 519.24
DOI: 10.17223/19988605/47/8

Д.А. Мигов, Д.В. Винс

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ СЕТИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Работа поддержана РФФИ, гранты № 16-07-00434, 18-07-00460, 17-47-540977.

Рассматривается NP-трудная задача расчета надежности сети, элементы которой подвержены случайным отказам. Для оценки надежности сети используется метод Монте-Карло, улучшенный при помощи проверки связности реализации графа одновременно с генерацией этой реализации. Имитационное моделирование позволило оптимально настроить параметры параллельной версии алгоритма для повышения масштабируемости, сделав возможным его применение для приближенного расчета надежности сетей на суперЭВМ большой производительности (пета- и экзафлопсные).
Ключевые слова: надежность сети; случайный граф; связность; обход в ширину; параллельный алгоритм; методы Монте-Карло; имитационное моделирование.

Универсальным методом для оценки различных показателей надежности сетей является метод Монте-Карло [1–4], в том числе и в параллельной реализации [5–7]. Несмотря на принадлежность задачи точного расчета надежности сети к классу NP-трудных [8], для сетей небольшой размерности (до сотни ребер) возможно, как правило, осуществлять точный расчет надежности. Для этого используются метод факторизации (ветвления, Мура–Шеннона) и различные методы ускорения, в первую очередь методы редукции, декомпозиции, стратегия выбора элемента для факторизации, точные формулы для графов малой размерности и др. Однако подобные техники разработаны далеко не для всех показателей сетевой надежности. Больше всего таких приемов существует для классического показателя надежности – вероятности связности случайного графа. Некоторые методы ускорения расчета известны для надежности с ограничением на диаметр и для математического ожидания числа связных пар узлов сети. Отсутствие подобных методов сильно затрудняет расчет исследуемого показателя, делая его сложность близкой к экспоненциальной по числу ненадежных элементов (каналов связи и / или узлов).

Для анализа надежности сетей средней и большой размерности (сотни, тысячи элементов) точные методы неприменимы, вследствие чего используются различные приближенные методы. Большинство методов основывается на структурных и других особенностях сетей, что делает эти методы эффективными для определенных типов сетей. Наиболее известны методы на основе рассмотрения циклов, разрезов, остовных деревьев. Метод Монте-Карло является среди приближенных методов наиболее универсальным, способным за приемлемое время дать ответ. Другим универсальным методом является метод, основанный на кумулятивном уточнении границ надежности [9–10].

При расчете надежности сети методом Монте-Карло необходимо случайным образом сгенерировать определенное число реализаций сети и усреднить по полученной выборке интересующий нас показатель (связность, число связных пар и т.д.), что и будет оценкой показателя надежности. Исходя из дисперсии выборки можно сделать заключение о погрешности полученного решения. Для некоторых показателей возможно оценить дисперсию в зависимости от размера выборки еще перед началом расчета и, соответственно, определить необходимое количество итераций алгоритма для достижения требуемой погрешности решения. Для других показателей необходимо динамически вычислять дисперсию текущей выборки и принимать решение либо о продолжении расчета, либо о его окончании. Для сокращения дисперсии при расчете надежности сети методом Монте-Карло применяются различные подходы; отметим расслоенную выборку Ван Слайка [1] и рекурсивный метод RVR [2].

В данной работе в качестве показателя надежности рассматривается вероятность связности случайного графа с ненадежными ребрами. Для этого показателя мы предлагаем при генерации реализации графа делать заключение о связности реализации без дополнительного обхода графа. Также для вероятности связности возможно оценить дисперсию в зависимости от размера выборки еще перед началом расчета и определить необходимое количество итераций алгоритма для достижения требуемой погрешности решения. Такой подход также значительно упрощает параллельную реализацию, избавляя от необходимости периодически всем процессам приостанавливать расчет и ждать, пока процесс-сборщик проведет оценку дисперсии. Для исследования эффективности данного параллельного алгоритма при его исполнении на высокопроизводительном суперкомпьютере (в том числе и на потенциальном экзафлопсном суперкомпьютере) применяется имитационное моделирование на основе мультиагентного подхода. При имитационном моделировании с использованием платформы мультиагентного моделирования AGNES предполагалось, что архитектура экзафлопсного суперкомпьютера не отличается от архитектуры кластера НКС-30Т ССКЦ СО РАН.

В результате выявлено, что параллельный алгоритм идеально масштабируется до 512 000 вычислительных ядер, далее наблюдается уменьшение эффекта ускорения от количества ядер. Решением в данном случае могут быть увеличение количества агентов-«сборщиков» и их иерархическая организация. Отметим, что предложенная модель позволяет осуществлять моделирование расчета методом Монте-Карло и для других показателей сетевой надежности, для которых возможно оценить дисперсию перед началом расчета.

1. Случайный граф как модель сети с ненадежными элементами

Для анализа надежности сетей различного назначения используют, как правило, аппарат случайных графов. Рассмотрим произвольный неориентированный граф $G = (V, E)$, где V – это множество вершин, а E – множество ребер графа G. Пусть для каждого ребра e задана вероятность его присутствия в графе p_e, при этом предполагается, что вершины абсолютно надежны.

Элементарным событием будем называть частную реализацию графа, определяемую исправностью или отказом каждого ребра. Элементарное событие удобно представлять как список длины $|E|$, в котором i-й элемент равен 1, если i-е ребро присутствует в реализации, и равен 0 в противном случае.

Вероятность элементарного события равна произведению вероятностей присутствия исправных ребер, умноженному на произведение вероятностей отсутствия отказавших ребер.

Произвольное событие (событие есть объединение некоторых элементарных событий) будем называть *успешным*, если в каждом элементарном событии, входящем в это событие, все вершины могут быть связаны исправными ребрами.

Вероятность связности графа G, $R(G)$, есть вероятность того, что эти вершины связаны исправными ребрами, т.е. вероятность события, состоящего из всех успешных событий, и только из них.

2. Оценка надежности сети методом Монте-Карло

Опишем общую схему применения методов Монте-Карло к рассматриваемым задачам. Как уже упоминалось, для оценки надежности сети методом Монте-Карло нам нужно случайным образом сгенерировать определенное число реализаций сети, усреднить по полученной выборке интересующий нас показатель и получить таким образом оценку показателя надежности.

Для оценки вероятности связности графа показателем будет индикаторная функция связности $\chi(E)$, заданная как случайная величина на пространстве элементарных событий. Эта функция равна 1, если событие успешно, и 0 в противном случае. Факт успешности E определяется возможностью соответствующей сети успешно функционировать, исходя из практических соображений. В данном случае это связность сети.

Математическое ожидание случайной величины и будет точным значением надежности. Среднее значение по выборке будет приближенным значением надежности, сходящимся к точному с ростом размера выборки L по закону больших чисел:

$$R = M(\chi) \approx \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\chi_i = R_L . \quad (1)$$

Согласно ЦПТ, с ростом L вычисляемое приближение R становится все ближе к точному значению. Таким образом, по правилу трех сигм получаем следующую оценку:

$$P\left\{\left|R - \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\chi_i\right| \le 3\sigma\right\} = 0,9973 . \quad (2)$$

Дисперсия случайной величины равна

$$D(\chi) = M(\chi^2) - M^2(\chi) = R - R^2 .$$

Соответственно, дисперсия оценки надежности (среднего значения по выборке) составит

$$D(R_L) = \frac{L \cdot D(\chi)}{L^2} = \frac{R(1-R)}{L} ,$$

а утроенное среднеквадратичное отклонение, которое мы используем для оценки погрешности ε (2), оценивается сверху как:

$$\varepsilon = 3\sigma = 3\sqrt{\frac{R(1-R)}{L}} \le 3\sqrt{\frac{1}{4L}} = \frac{3}{2\sqrt{L}} . \quad (3)$$

Неравенство в центре в выражении (3) имеет место, так как $0 \le R \le 1$.

Таким образом, для количества итераций статистического моделирования

$$L = \frac{9}{4\varepsilon^2} \quad (4)$$

неравенство (3) выполняется, и получаемая оценка надежности (1) верна с погрешностью ε с вероятностью 0,9973 (2).

При параллельной реализации удобно разбить число L на максимально близкие друг к другу L_i, количество которых совпадает с количеством доступных вычислительных ядер минус 1. Далее на каждом ядре запускается свой процесс порождения реализаций графа. Предполагается, что количество вычислительных ядер достаточно велико, и для связи между ними используется MPI. Поэтому одно ядро остается как «сборщик» и не участвует в порождении реализаций графа. Остальные ядра по завершении работы пересылают усредненные значения на процесс-«сборщик».

3. Проверка связности графа при оценке вероятности связности сети методом Монте-Карло

Оценивание вероятности связности сети методом статистического моделирования требует многократного порождения графов, являющихся элементарными событиями, и проверки их связности. Каждая из этих операций имеет линейную по числу ребер M трудоемкость $O(M)$. Так, проверку связности графа удобно делать обходом графа в ширину. Несмотря на невысокую трудоемкость этих операций, их многократное использование для обеспечения нужной точности решения (сотни тысяч и миллионов раз) и большие размерности реальных сетей (сотни и тысячи элементов) делают актуальной разработку максимально быстрых методов их осуществления.

Мы предлагаем осуществлять генерацию частной реализации графа одновременно с проверкой его связности. В этом случае генерация ребер проходит при помощи обхода графа в ширину. Заводится список узлов, инициализируется как состоящий из некоторого начального узла. Определяем, какие из ребер, инцидентных узлам из списка, присутствуют в данной реализации. Если таких ребер нет – заканчиваем процесс. Если есть – формируем список смежных узлов через присутствующие инцидентные им ребра и продолжаем его обновление по указанной схеме. Если по завершении про-

цедуры количество посещенных узлов будет меньше, чем общее количество узлов, то полученная реализация несвязна. Учет появления изолированных вершин дополнительно сокращает трудоемкость.

В таблице приведены результаты для оценки надежности европейской научно-образовательной сети GÉANT образца 2009 г. (390 узла и 503 ребра; рис. 1). Предполагалось, что надежности всех ребер совпадают. Был рассмотрено четыре различных значения надежности, как показано в таблице. Для обоих методов и для каждого из рассматриваемых значений надежности ребра было проведено $L = 10^7$ итераций метода. Расчет проводился на ПЭВМ Intel Core Duo 2.4 GHz.

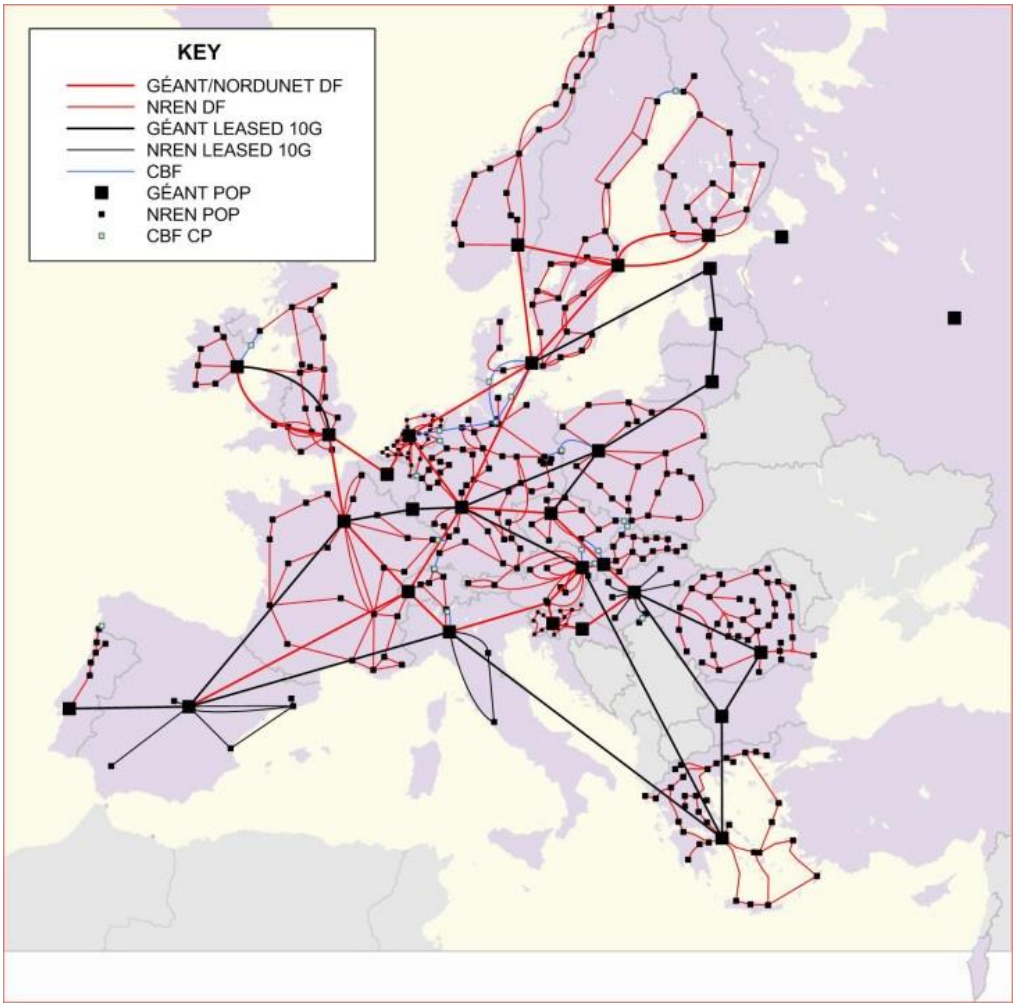


Рис. 1. Европейская научно-образовательная сеть GÉANT (2009)
Fig. 1. European research and education network GÉANT (2009)

Время оценки надежности сети GÉANT

Надежность ребра	$P = 0{,}75$	$P = 0{,}9$	$P = 0{,}99$	$P = 0{,}999$
Время расчета (с). Новый метод	45	72	314	402
Время расчета (с). Стандартный метод	67	92	421	623

Как видно, ускорение при использовании предложенного метода получается разным для различных значений надежности ребра. Максимально эффективен метод для высоконадежных сетей, а именно такие, как правило, существуют и проектируются в настоящее время. В этом случае метод дает ускорение более чем в полтора раза.

4. Моделирование оценки надежности сети методом Монте-Карло на суперЭВМ

Для исследования эффективности исходного алгоритма при его исполнении на потенциальном экзафлопсном суперкомпьютере применяется имитационное моделирование на основе мультиагентного подхода. При имитационном моделировании с использованием платформы мултьиагентного моделирования AGNES [11] предполагалось, что архитектура экзафлопсного суперкомпьютера не отличается от архитектуры кластера НКС-30Т.

Как известно, теоретическое ускорение при распараллеливании для методов статистического моделирования практически «идеальное», т.е. время расчета уменьшается пропорционально увеличению вычислительных ядер. Этот критерий и используется для исследования эффективности данных вычислительных алгоритмов.

Для исследования такой системы будем исходить из следующих предположений:

1. M – общее число ядер, задействованных в статистическом моделировании.
2. Уровень допустимой статистической погрешности, достижение которого означает завершение расчета:

$$\varepsilon = \frac{9}{4\sqrt{L}}.$$

3. Достижение уровня допустимой статистической погрешности достигается при совершении вычислительными ядрами определенного числа итераций вычислений L:

$$L = \sum_{i=1}^{M} L_i .$$

где L_i – количество итераций цикла вычислений на i-м ядре-вычислителе.

4. Время моделирования вычислительным ядром итерации T_{count} одинаково для однотипных вычислительных узлов.
5. Время выполнения коммуникаций будем считать по следующей формуле:

$$T^{Comm} = T_C + \Lambda .$$

где Λ – латентность при передаче данных, T_C – среднее время передачи полученных результатов.

6. Общее время выполнения алгоритма статистического моделирования по методу Монте-Карло – $T_L(M)$.
7. Величина относительно ускорения от распараллеливания определяется следующим образом:

$$S_L(M) = \frac{T_L(M_{\min})}{T_L(M)}.$$

Для имитации исполнительного алгоритма расчета по методу Монте-Карло создано два класса функциональных агентов: «вычислитель» и «сборщик». Агент-«вычислитель» имитирует проведение необходимого количества итераций одним вычислительным узлом, после чего отправляет результаты агенту-«сборщику». Агент-«сборщик» дожидается прихода сообщений от всех вычислителей и останавливает моделирование [12].

Исходные данные для моделирования были получены на кластере НКС-30Т, а именно: $T_{count} = 1{,}53 \cdot 10^{-5}$, $T_c = 2 \cdot 10^{-5}$. Для этого были осуществлены запуски расчетов на НКС-30Т на количестве ядер до 512 с использованием новой техники генерации графов, представленной в предыдущем разделе. В качестве тестируемой структуры бралась структура GÉANT с надежностью ребра 0,999. Требуемая допустимая статистическая погрешность $\varepsilon = 10^{-8}$, соответственно, общее число итераций $L = 10^{15}$. Было исследовано поведение алгоритма при его исполнении на от 8 до 1 536 000 вычислительных ядер, полученные параметры $T_L(M)$ и $S_L(M)$ сравнивались с «идеальным» теоретическим ускорением. Результаты исследования приведены на рис. 1, 2.

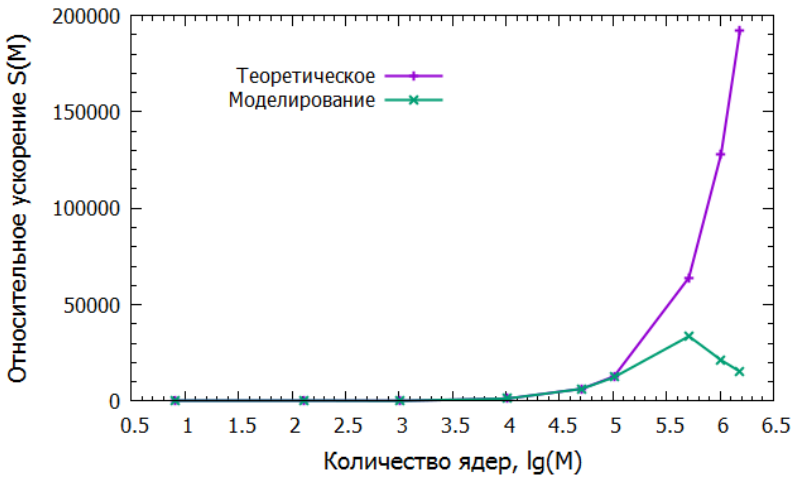


Рис. 2. Зависимость относительного ускорения S_L от общего числа моделируемых ядер M
(горизонтальная ось – в логарифмическом масштабе)
Fig. 2. Dependence of the relative acceleration S_L on the total number of simulated nuclei M
(the horizontal axis is on a logarithmic scale)

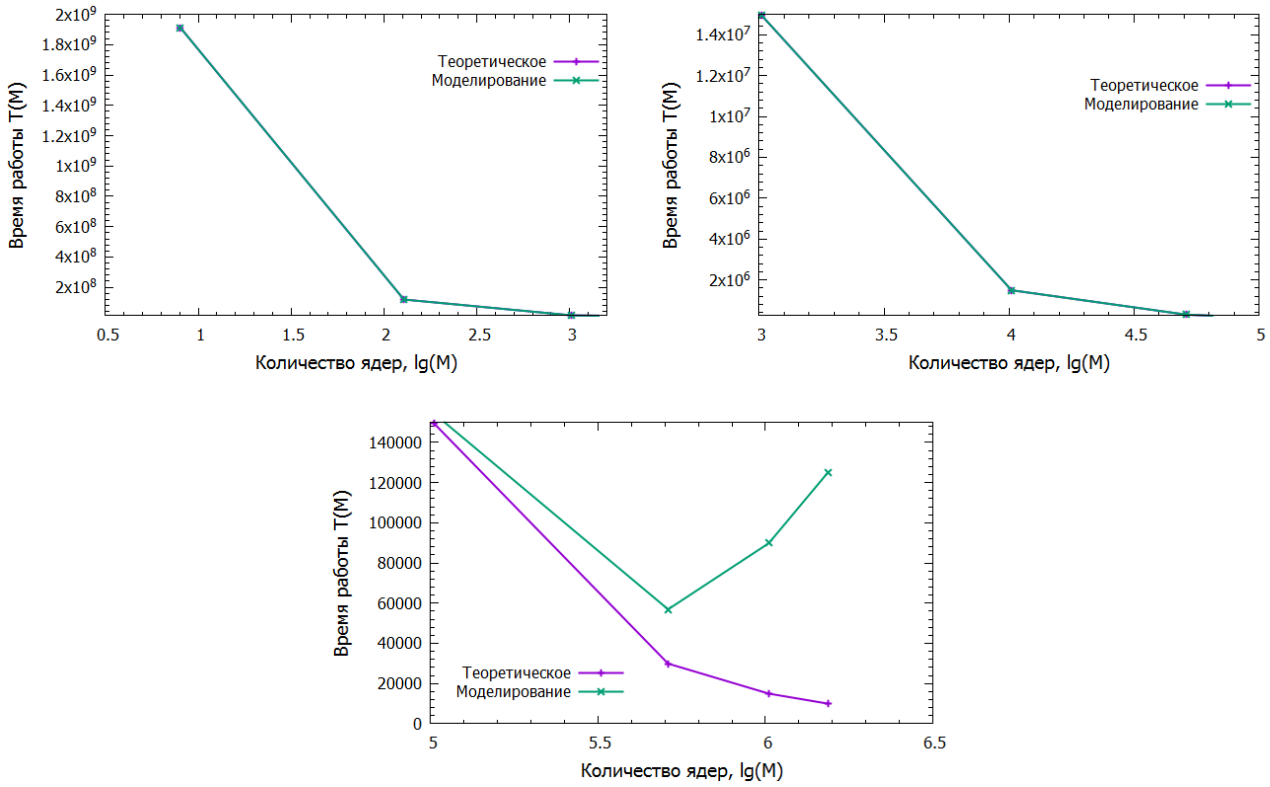


Рис. 3. Зависимость времени исполнения алгоритма T_L от общего числа моделируемых ядер M
(горизонтальная ось – в логарифмическом масштабе)
Fig. 3. Dependence of the execution time of the T_L algorithm on the total number of simulated kernels M
(the horizontal axis is on a logarithmic scale)

Как можно увидеть на рис. 2, 3, исходный алгоритм масштабируется до 512 000 вычислительных ядер практически идеально, однако на большем числе наблюдается уменьшение эффекта ускорения от количества вычислительных ядер. Это можно объяснить огромным количеством сообщений, которые должен принять и обработать агент-«сборщик» в конце вычислений. Решением в данном случае могут быть увеличение количества агентов-«сборщиков» и их иерархическая организация.

Заключение

Был исследован такой показатель надежности, сетей как вероятность связности случайного графа с ненадежными ребрами. Предложена новая техника генерации графов с заключением о связности реализации без дополнительного обхода графа. Данная техника позволяет существенно ускорить (на 30–50 %) приближенный расчет методом Монте-Карло как в последовательной, так и в параллельной реализациях.

Для исследования эффективности параллельного алгоритма оценки надежности сети методом Монте-Карло при его исполнении на высокопроизводительном суперкомпьютере (в том числе и на потенциальном экзафлопсном суперкомпьютере) мы использовали имитационное моделирование на основе мультиагентного подхода. В результате выявлено, что параллельный алгоритм идеально масштабируется до 512 000 вычислительных ядер, далее наблюдается уменьшение эффекта ускорения от количества ядер. Решением в данном случае может быть увеличение количества процессов-«сборщиков», по одному на 512 000 вычислительных процессов. Предложенная модель позволяет осуществлять моделирование расчета методом Монте-Карло и для других показателей сетевой надежности, для которых возможно оценить дисперсию перед началом расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Slyke R.V, Frank H. Network reliability analysis. Part I // Networks. 1972. V. 1. P. 279–290.
2. Cancela H., Urquhart M.E. Adapting RVR simulation techniques for residual connectedness network reliability models // IEEE Trans. Computers. 2002. V. 51, No. 4. P. 439–443.
3. Botev Z.I., Kroese D.P. Efficient Monte Carlo simulation via the generalized splitting method // Statistics and Computing. 2012. V. 22, No. 1. P. 1–16.
4. Cancela H., Murray L., Rubino G. Highly reliable stochastic flow network reliability estimation // Proc. XLII IEEE Latin American Computing Conference. CLEI'16. IEEE Press, 2016.
5. Khadiri M.E., Marie R., Rubino G. Parallel estimation of 2-terminal network reliability by a crude Monte Carlo technique // Proc. of the 6th Int. Symposium on Computer and Information Sciences. 1991. Elsevier, 1991. P. 559–570.
6. Martinez S.P., Calvino B.O., Rocco S.C.M. All-terminal reliability evaluation through a Monte Carlo simulation based on an MPI implementation // Proc. European Safety and Reliability Conference: Advances in Safety, Reliability and Risk Management. PSAM 2011/ESREL. Helsinki, 2012. P. 1–6.
7. Мигов Д.А. Параллельные методы точного и приближенного расчета надежности сетей // Молодежь. Наука. Технологии (МНТК-2017) : труды Междунар. конф. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. Ч. 3. С. 67–69.
8. Colbourn Ch.J. The combinatorics of network reliability. New York : Oxford University Press, 1987. 160 p.
9. Won J.-M., Karray F. Cumulative update of all-terminal reliability for faster feasibility decision // IEEE Trans. on Reliability. 2010. V. 59, No. 3. P. 551–562.
10. Rodionov A.S., Migov D.A., Rodionova O.K. Improvements in the efficiency of cumulative updating of all-terminal network reliability // IEEE Trans. on Reliability. 2012. Vol. 61, No 2. P. 460–465.
11. Podkorytov D., Rodionov A., Choo H. Agent-based simulation system agnes for networks modeling: review and researching // Proc. 6th Int. Conf. on Ubiquitous Information Management and Communication. ACM ICUIMC 2012. ACM New York, USA. Article No. 115.
12. Glinsky B., Rodionov A., Marchenko M., Podkorytov D., Weins D. Scaling the distributed stochastic simulation to exaflop supercomputers // Proc. 14th IEEE Int. Conf. on High Performance Computing and Communications. HPCC'2012. IEEE Press, 2012. P. 1131–1136.

Поступила в редакцию 17 июля 2018 г.

Migov D.A., Weins D.V. (2018) PARALLEL IMPLEMENTATION AND SIMULATION OF NETWORK RELIABILITY CALCULATION BY MONTE CARLO METHOD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 66–74

DOI: 10.17223/19988605/47/8

The paper considers the NP-hard calculation problem of the reliability of a network, which elements are subject to accidental failures. A universal method for evaluating various indicators of network reliability is the Monte Carlo method, which can be performed in parallel implementation. In spite of the fact that the exact reliability calculation problem is NP-hard), it is usually possible

to perform an accurate calculation of reliability for networks of small dimension (up to hundreds of edges). To this end, the factorization method and various acceleration methods are used, primarily reduction methods, decomposition, the selection strategy for the factorization element, exact formulas for low-dimensional graphs, and others. However, such techniques are not developed for all indicators of network reliability. Most of all such techniques exist for the classical reliability index - the probability of the connectedness of a random graph. Some methods of speeding up the calculation are known for the reliability with diameter constraint, and the mathematical expectation of the number of connected pairs of nodes of the network. The absence of such methods greatly complicates the calculation of the investigated indicator, making its complexity close to the exponential in the number of unreliable elements (communication channels and/or nodes).

When calculating the reliability of a network using the Monte Carlo method, it is necessary to randomly generate a certain number of implementations of the network and to average values obtained (connectivity function, the number of connected pairs, etc.), which will be an estimate of the reliability index. Based on the sample variance, one can draw a conclusion about the error of the solution obtained. For some indicators it is possible to estimate the variance depending on the sample size even before the calculation begins and, accordingly, to determine the necessary number of algorithm iterations to achieve the required error of the solution. In this paper, the probability of connectedness of a random graph with unreliable edges is considered as an index of reliability. For this indicator, we propose to generate an implementation of the graph simultaneously with its connectivity check. In addition, for the probabilistic connectivity, it is possible to estimate the variance depending on the sample size even before the calculation begins and determine the necessary number of iterations of the algorithm to achieve the required error in the solution.

This approach also greatly simplifies the parallel implementation, eliminating the need to periodically stop all processes and wait for evaluation of the variance. In the case of parallel implementation, it is convenient to split the iteration number between all processes. Further, on each core, the process of generation of the implementations starts. It is assumed that the number of computing cores is large enough, and MPI is used for communication between them. Therefore, one core remains as a master and does not participate in the generation of graph implementations. The rest of the cores send the averaged values to the collector process after completion.

As a result, it was shown that the parallel algorithm ideally scales up to 512,000 computing cores, then there is a decrease in the acceleration effect from the number of cores. The solution in this case may be to increase the number of collector agents and their hierarchical organization. It should be noted that the proposed model allows simulating Monte Carlo calculation for other indicators of network reliability, if it is possible to estimate the variance before the calculation begins.

Keywords: network reliability; random graph; connectivity; Monte Carlo methods; simulation.

MIGOV Denis Aleksandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, senior research fellow, Laboratory of System modeling and optimization of The Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation).
E-mail: mdinka@rav.sscc.ru

WEINS Dmitry Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, research fellow, Laboratory of supercomputer modeling of The Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation).
E-mail: vins@sscc.ru

REFERENCES

1. Slyke, R.V & Frank, H. (1972) Network reliability analysis: Part I. *Networks.* 1. pp. 279–290.
2. Cancela, H. & Urquhart, M.E. (2002) Adapting RVR simulation techniques for residual connectedness network reliability models. *IEEE Trans. Computers.* 51(4). pp. 439–443.
3. Botev, Z.I. & Kroese, D.P. (2012) Efficient monte carlo simulation via the generalized splitting method. *Statistics and Computing.* 22(1). pp. 1–16. DOI: 10.1007/s11009-009-9133-7
4. Cancela, H., Murray, L. & Rubino, G. (2016) Highly reliable stochastic flow network reliability estimation. *Proc. XLII IEEE Latin American Computing Conference. CLEI'16.* IEEE Press.
5. Khadiri, M.E., Marie, R. & Rubino, G. (1991) Parallel estimation of 2-terminal network reliability by a crude Monte Carlo technique. *Proc. 6th International Symposium on Computer and Information Sciences 1991*. Elsevier. pp. 559–570.
6. Martinez, S.P., Calvino, B.O. & Rocco, S.C.M. (2012) All-terminal reliability evaluation through a Monte Carlo simulation based on an MPI implementation. *Advances in Safety, Reliability and Risk Management.* Proc. European safety and reliability conference. PSAM 2011/ESREL 2012. Helsinki. pp. 1–6.
7. Migov, D.A. (2017) [Parallel methods for network reliability exact calculation and evaluation]. *Molodezh'. Nauka. Tekhnologii (MNTK-2017)* [Youth. Science. Technologies]. Proc. of the International Conference. Novosibirsk. pp. 67–69. (In Russian).
8. Colbourn, Ch.J. (1987) *The combinatorics of network reliability*. New York: Oxford University Press.
9. Won, J.-M. & Karray, F. (2012) Cumulative update of all-terminal reliability for faster feasibility decision. *IEEE Transactions on Reliability.* 59(3). pp. 551–562.
10. Rodionov, A.S., Migov, D.A. & Rodionova, O.K. (2012) Improvements in the efficiency of cumulative updating of all-terminal network reliability. *IEEE Transactions on Reliability.* 61(2). pp. 460–465.

11. Podkorytov, D., Rodionov, A., & Choo, H. (2012) Agent-based simulation system AGNES for networks modeling: review and researching. *Proc. 6th Int. Conf. on Ubiquitous Information Management and Communication.* ACM ICUIMC 2012. ACM New York. USA. Article No 115.
12. Glinsky, B., Rodionov, A., Marchenko, M., Podkorytov, D. & Weins, D. (2012) Scaling the distributed stochastic simulation to exaflop supercomputers. *Proc. 14th IEEE Int. Conf. on High Performance Computing and Communications.* HPCC'2012. IEEE Press. pp. 1131–1136.

УДК 519.21
DOI: 10.17223/19988605/47/9

Е.П. Полин, С.П. Моисеева, С.В. Рожкова

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ M|M|∞ В МАРКОВСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается неоднородная система массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, функционирующая в условиях изменяющейся внешней среды. На вход СМО поступает пуассоновский поток, интенсивность потока и дисциплина обслуживания поступающей заявки определяются состоянием внешней среды и имеют экспоненциальное распределение с соответствующими параметрами, не меняющими свои значения до окончания обслуживания. Решается задача исследования многомерного случайного процесса – числа заявок, обслуживаемых с разной интенсивностью в системе, методом асимптотического анализа. Доказано, что распределение вероятностей рассматриваемого процесса при условии эквивалентно растущего времени обслуживания является многомерным гауссовским.
Ключевые слова: бесконечнолинейная система массового обслуживания; случайная среда; метод асимптотического анализа.

Большинство современных технических систем, в том числе систем передачи информации и телекоммуникационных систем, функционирует в рамках изменяющейся внешней среды, причем ее изменения носят как регулярный, так и случайный характер. Влияние этих факторов на систему представляет значительный интерес в условиях быстро развивающихся технических возможностей современного мира. Поэтому исследование систем, работающих в случайной среде, является частью глобальной задачи исследования устойчивости систем к внешним воздействиям и представляется актуальным и интересным как в теоретическом, так и в прикладном плане.

Классические модели СМО, активно исследовавшиеся в середине прошлого столетия, не учитывали возможностей изменения параметров систем во времени, что существенно ограничивало область их применения. Со временем появлялись качественно новые системы управления и связи, возникала необходимость в более адекватном описании случайных процессов, имеющих место в этих системах.

Возникновение в последние несколько десятилетий новых практических задач, связанных с появлением систем гибкого автоматического производства, в которых возможны отключение, переподключение и переналадка оборудования, систем управления запасами и экономических систем, информационно-вычислительных сетей и сетей связи, дало существенный толчок к развитию исследований систем с изменяемыми параметрами [1, 2].

Такие системы в теории массового обслуживания называются системами массового обслуживания, функционирующими в случайной среде [3]. Эти СМО более адекватно по сравнению с классическими системами отображают реальные процессы, связанные с изменяющейся во времени внешней случайной средой и реакцией самой системы на такие изменения.

Одной из первых работ, посвященных исследованию систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде, была работа [4], в которой рассмотрена однолинейная система в предположении, что среда может находиться только в двух состояниях. Эта система была исследована также в работе [5], а затем обобщена на случай произвольного конечного числа состояний внешней среды [6]. Также имеется много работ, посвященных исследованию бесконечнолинейных систем как в марковских [7–9], так и полумарковских [10–12] случайных средах. В разных работах рассмотрены различные варианты реакции заявок на переход среды в новое состояние. Например, в работе [13] представлен случай, при котором в момент смены состояния среды все заявки немедленно покидают систему. В работе [14] исследован вариант, при котором в момент перехода среды в новое со-

стояние заявки, имеющиеся в системе, переходят на соответствующий новый режим обслуживания. В этой же работе рассматривается случай, предполагающий, что режим обслуживания заявок не меняется до тех пор, пока они не покинут систему.

Исследование систем с непуассоновскими входящими потоками [15] требует применения специальных методов. Например, в работе [16] получены числовые характеристики изучаемого процесса с помощью метода моментов. Для более детального исследования применяются асимптотические методы [17] при различных условиях.

В настоящей работе рассматривается неоднородная система массового обслуживания M|M|∞. Интенсивность входящего потока определяется состоянием случайной среды заявок. Отличительной особенностью является зависимость параметров обслуживания от состояния среды. Рассматривается случай, когда эти параметры не меняют свои значения до окончания обслуживания. Таким образом, приборы в рассматриваемой системе являются неоднородными (гетерогенными) [18], поэтому такую СМО будем называть неоднородной СМО, функционирующей в случайной среде.

1. Постановка задачи

Рассматривается неоднородная система массового обслуживания M|M|∞ с неограниченным числом приборов, функционирующая в случайной среде, имеющей конечное множество состояний $s = 1, ..., S$. Процесс изменения состояний внешней среды является цепью Маркова $s(t)$, которая задается матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = [q_{ik}]$, $i, k = 1, ..., S$. Дисциплина обслуживания определяется следующим образом: если заявка поступает с интенсивностью λ_n, $n = 1, ..., S$, то она обслуживается случайное время, распределенное по экспоненциальному закону $F_n(x) = 1 - e^{-\mu_n x}$, которое не меняется при изменении состояния среды. Таким образом, в системе одновременно обслуживаются заявки с разными параметрами обслуживания (рис. 1).

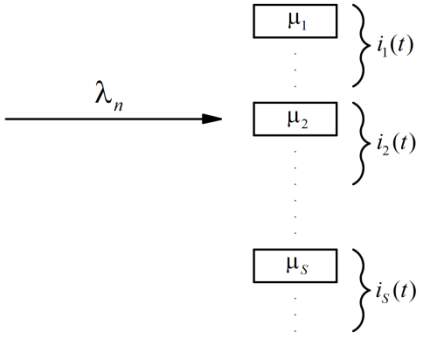


Рис. 1. Система массового обслуживания M|M|∞ в случайной среде
Fig.1. Queuing system M|M|∞ in a random environment

Обозначим $i_l(t)$ – число заявок, обслуживаемых с интенсивностью μ_l. Ставится задача исследования многомерного случайного процесса $\mathbf{i}(t) = [i_1(t), i_2(t), ..., i_S(t)]$.

Так как $\{i_1(t), i_2(t), ..., i_S(t)\}$ – немарковский случайный процесс, то будем рассматривать многомерную цепь Маркова $\{i_1(t), i_2(t), ..., i_S(t), s(t)\}$.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим $P(i_1, i_2, ..., i_S, n, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, ..., i_S(t) = i_S, s(t) = n\}$, $\mathbf{e}_1 = [1, 0, ..., 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, ..., 0]$, ..., $\mathbf{e}_n = [0, 0, ..., 1]$, тогда для стационарного распределения вероятностей $P(\mathbf{i}, n)$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$-\left(\lambda_n + \sum_{l=1}^{S} \mu_l i_l\right) P(\mathbf{i}, n) + \lambda_n P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_n, n) + \sum_{l=1}^{S} \mu_l (i_l + 1) P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_l, n) + \sum_{\nu} q_{\nu n} P(\mathbf{i}, \nu) = 0, \ \forall n = \overline{1, S}.$$

Тогда для частичных характеристических функций вида

$$H(u_1,u_2,...,u_S,n)=H(\mathbf{u},n)=\sum_{i_1}e^{ju_1i_1}\sum_{i_2}e^{ju_2i_2}...\sum_{i_S}e^{ju_Si_S}P(\mathbf{i},n),\ \forall n=\overline{1,S},$$

имеем следующую систему уравнений:

$$j\sum_{k=1}^{S}\mu_k\left(e^{-ju_k}-1\right)\frac{\partial H(\mathbf{u},n)}{\partial u_k}=\lambda_nH(\mathbf{u},n)\left(e^{ju_n}-1\right)+\sum_{\nu}q_{\nu n}H(\mathbf{u},\nu),\ \forall n=\overline{1,S}.$$

Систему уравнений для $H(\mathbf{u}, n)$ в матричном виде запишем следующим образом:

$$j\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u})\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}=\mathbf{h}(\mathbf{u})\left(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{u})+\mathbf{Q}\right),\tag{1}$$

где

$$\mathbf{h}(\mathbf{u})=\left[H(\mathbf{u},1),H(\mathbf{u},2),...,H(\mathbf{u},S)\right],\ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u})=\left[\mu_1(e^{-ju_1}-1),\mu_2(e^{-ju_2}-1),...,\mu_S(e^{-ju_S}-1)\right],$$

$$\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial H(\mathbf{u},1)}{\partial u_1} & ... & \frac{\partial H(\mathbf{u},S)}{\partial u_1}\\ ... & ... & ...\\ \frac{\partial H(\mathbf{u},1)}{\partial u_S} & ... & \frac{\partial H(\mathbf{u},S)}{\partial u_S}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}\lambda_1(e^{ju_1}-1) & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2(e^{ju_2}-1) & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_S(e^{ju_S}-1)\end{bmatrix}.$$

Полученная система уравнений является основной для дальнейших исследований. Предлагается провести анализ характеристик рассматриваемой СМО с помощью метода асимптотического анализа.

3. Метод асимптотического анализа

Предлагаемый метод асимптотического анализа реализуется в построении последовательности асимптотик возрастающего порядка, в котором асимптотика первого порядка, аналогично закону больших чисел, определяет асимптотическое среднее значение числа занятых приборов. Асимптотика второго порядка, аналогично центральной предельной теореме, позволяет построить гауссовскую аппроксимацию распределения вероятностей числа занятых приборов в системе.

3.1. Асимптотика первого порядка

Решение системы (1) будем находить в асимптотическом условии эквивалентно растущего времени обслуживания, т.е. при $\mu_i \to 0$, $i = 1, ... S$. Обозначим $\mu_i = q_i\varepsilon$ (ε – бесконечно малая величина) и в (1) выполним замены $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{x}$ (т.е. $u_i = \varepsilon x_i$), $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \varepsilon)$, получим уравнение для $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \varepsilon)$:

$$j\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\varepsilon)\frac{\partial\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial\mathbf{x}}=\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\left(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x},\varepsilon)+\mathbf{Q}\right),\tag{2}$$

где $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\varepsilon)=\left[\left(e^{-j\varepsilon x_1}-1\right)q_1,...,\left(e^{-j\varepsilon x_S}-1\right)q_S\right]$, $\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x},\varepsilon)=\mathrm{diag}\left[\lambda_i\left(e^{j\varepsilon x_i}-1\right)\right]$, $i=\overline{1,S}$.

В (2) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим, что $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x})\mathbf{Q}=\mathbf{0},$$

поэтому $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ будем искать в виде

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x})=\mathbf{r}\Phi_1(\mathbf{x}).\tag{3}$$

Здесь $\Phi_1(\mathbf{x}) = \Phi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ – неизвестная скалярная функция n переменных, $n = 1, ..., S$, $\mathbf{r}$ – вектор-строка стационарного распределения вероятностей значений цепи Маркова $s(t)$, определяемая системой уравнений

$$\mathbf{rQ}=\mathbf{0}$$

и условием нормировки $\mathbf{re} = 1$, где $\mathbf{e}$ – единичный вектор.

Разложив экспоненты в (2) в ряд Тейлора до первого порядка, получим

$$-j\left[x_1q_1,...,x_Sq_S\right]\frac{\partial\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial\mathbf{x}}=\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\begin{bmatrix}\lambda_1x_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2x_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_Sx_S\end{bmatrix}+O(\varepsilon^2)\,. \tag{4}$$

Домножив (4) на единичный вектор справа, имеем:

$$-j\left[x_1q_1,...,x_Sq_S\right]\begin{bmatrix}\sum_i\frac{\partial F_1(i,\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial x_1}\\ \sum_i\frac{\partial F_2(i,\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial x_2}\\ ...\\ \sum_i\frac{\partial F_2(i,\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\begin{bmatrix}\lambda_1x_1\\ \lambda_2x_2\\ ...\\ \lambda_Sx_S\end{bmatrix}+O(\varepsilon^2)\,. \tag{5}$$

В (5), положив $\varepsilon\to 0$ и подставив разложение (3), получим

$$-j\left[x_1q_1,...,x_Sq_S\right]\begin{bmatrix}\sum_i r_i\frac{\partial\Phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}\\ \sum_i r_i\frac{\partial\Phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}\\ ...\\ \sum_i r_i\frac{\partial\Phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_S}\end{bmatrix}=\Phi_1(\mathbf{x})\mathbf{r}\begin{bmatrix}\lambda_1x_1\\ \lambda_2x_2\\ ...\\ \lambda_Sx_S\end{bmatrix}.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных для $\Phi_1(\mathbf{x})$:

$$\sum_{i=1}^{S}x_iq_i\frac{\partial\Phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_i}=j\sum_{i=1}^{S}r_i\lambda_ix_i\Phi_1(\mathbf{x})\,. \tag{6}$$

Нетрудно показать, что решение уравнения (6) имеет вид:

$$\Phi_1(\mathbf{x})=C_2\exp\left\{j\left(\frac{r_1\lambda_1x_1}{q_1}+...+\frac{r_S\lambda_Sx_S}{q_S}\right)\right\}.$$

Учитывая начальное условие $\Phi_1(\mathbf{0})=1$, функция $\Phi_1(\mathbf{x})$ примет вид:

$$\Phi_1(\mathbf{x})=\exp\left\{j\left(\frac{r_1\lambda_1x_1}{q_1}+...+\frac{r_S\lambda_Sx_S}{q_S}\right)\right\},$$

тогда

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x})=\mathbf{r}\exp\left\{j\left(\frac{r_1\lambda_1x_1}{q_1}+...+\frac{r_S\lambda_Sx_S}{q_S}\right)\right\}.$$

Осуществив обратные замены $\frac{x_i}{q_i}=\frac{u_i}{\varepsilon q_i}=\frac{u_i}{\mu_i}$, получаем

$$\mathbf{h}(\mathbf{u})=\mathbf{r}\exp\left\{j\left(r_1u_1\frac{\lambda_1}{\mu_1}+...+r_Su_S\frac{\lambda_S}{\mu_S}\right)\right\}.$$

Домножив на единичный вектор $\mathbf{e}$, получим

$$H(\mathbf{u})=M\left\{e^{j(u_1i_1+...+u_Si_S)}\right\}=\exp\left\{j\sum_{i=1}^{S}r_iu_i\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right\}.$$

Данное равенство будем называть приближением характеристической функции первого порядка. Оно определяет среднее число занятых приборов каждого типа в системе.

3.2. Асимптотика второго порядка

Для более детального исследования проведем асимптотический анализ второго порядка.

Определим характеристическую функцию в виде

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}_2(\mathbf{u}) \exp\left\{ j \sum_{i=1}^{S} r_i u_i \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right\},$$

тогда из (1) получим систему дифференциальных уравнений вида

$$j\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{h}_2(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{h}_2(\mathbf{u})\big(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{u}) + \mathbf{Q}\big) + \mathbf{h}_2(\mathbf{u})\mathbf{A}(\mathbf{u}),$$

или

$$j\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{h}_2(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{h}_2(\mathbf{u})\big(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{u}) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{u})\big), \tag{7}$$

здесь

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{S} r_k \lambda_k \left(e^{-ju_k} - 1\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{S} r_k \lambda_k \left(e^{-ju_k} - 1\right) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{S} r_k \lambda_k \left(e^{-ju_k} - 1\right) \end{bmatrix}.$$

Выполнив в (7) замены $\mu_i = q_i\varepsilon^2$, $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{x}$ (т.е. $u_i = \varepsilon x_i$), $\mathbf{h}_2(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \varepsilon)$, получим матричное дифференциальное уравнение для $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \varepsilon)$:

$$j\varepsilon\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\varepsilon) \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}_2(\mathbf{x},\varepsilon)\big(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x},\varepsilon) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{x},\varepsilon)\big). \tag{8}$$

Осуществив предельный переход при $\varepsilon \to 0$, для $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{F}_2(\mathbf{x},\varepsilon)$ получим уравнение

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x})\mathbf{Q} = 0,$$

решение которого запишем в виде

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{r}\Phi_2(\mathbf{x}),$$

где функция $\Phi_2(\mathbf{x})$ будет определена ниже.

Решение $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \varepsilon)$ уравнения (8) будем искать в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\varepsilon) = \Phi_2(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{r} + j\varepsilon\mathbf{f}_2 \sum_{i=1}^{S} x_i \right\} + O(\varepsilon^2),$$

в котором естественно полагать выполнение условия $\mathbf{f}_2\mathbf{e} = 0$, и, подставив которое в (8), получим

$$j\varepsilon\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\varepsilon) \left\{ \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \left(\mathbf{r} + j\varepsilon\mathbf{f}_2 \sum_{i=1}^{S} x_i \right) + \Phi_2(\mathbf{x})\, j\varepsilon\mathbf{f}_2 \right\} =$$

$$= \Phi_2(\mathbf{x}) \left(\mathbf{r} + j\varepsilon\mathbf{f}_2 \sum_{i=1}^{S} x_i \right) \big(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x},\varepsilon) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{x},\varepsilon)\big) + O(\varepsilon^3),$$

$$j\varepsilon\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\varepsilon) \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{r} = \Phi_2(\mathbf{x}) \left(\mathbf{r} + j\varepsilon\mathbf{f}_2 \sum_{i=1}^{S} x_i \right) \big(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x},\varepsilon) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{x},\varepsilon)\big) + O(\varepsilon^2). \tag{9}$$

Для того чтобы определить неизвестный вектор $\mathbf{f}_2$, разложим в ряд экспоненты в равенстве (9):

$$\Phi_2(\mathbf{x}) \left(j\varepsilon\mathbf{r}\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}) + j\varepsilon\mathbf{f}_2\mathbf{Q} \sum_{i=1}^{S} x_i - j\varepsilon\mathbf{r}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \right) = O(\varepsilon^2), \tag{10}$$

где

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\lambda_1 x_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 x_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_S x_S\end{bmatrix},\ \mathbf{A}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{S} r_k\lambda_k x_k & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sum_{k=1}^{S} r_k\lambda_k x_k & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{S} r_k\lambda_k x_k\end{bmatrix},\ \mathbf{g}=\left[x_1q_1,\dots,x_Sq_S\right].$$

Далее поделим равенство (10) на ε и выполним предельный переход при ε → 0, получим уравнение

$$\mathbf{r}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})+\mathbf{f}_2\mathbf{Q}\sum_{i=1}^{S}x_i-\mathbf{r}\mathbf{A}(\mathbf{x})=0. \tag{11}$$

Равенство (11) запишем покомпонентно:

$$\left[r_1\lambda_1x_1,\dots,r_S\lambda_Sx_S\right]+\left[f_1q_{11}+\dots+f_Sq_{S1},\dots,f_1q_{1S}+\dots+f_Sq_{SS}\right]\left(x_1+\dots+x_S\right)-$$
$$-\left[r_1\left(r_1\lambda_1x_1+\dots+r_S\lambda_Sx_S\right),\dots,r_S\left(r_1\lambda_1x_1+\dots+r_S\lambda_Sx_S\right)\right]=0,$$

откуда получаем матричное уравнение для $\mathbf{f}_2$

$$\mathbf{f}_2\mathbf{Q}=\mathbf{r}\left(\mathbf{B}-\mathbf{\Lambda}\right), \tag{12}$$

где

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_S\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}r_1\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & r_2\lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & r_S\lambda_S\end{bmatrix}.$$

Перейдем к определению $\Phi_2(\mathbf{x})$.

В (9) разложим экспоненты в ряд до второго порядка, получим

$$(-j\varepsilon)^2\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x})\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{r}=\Phi_2(\mathbf{x})\mathbf{r}\left(j\varepsilon\mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{x})+\frac{(j\varepsilon)^2}{2}\mathbf{\Lambda}_2(\mathbf{x})+\mathbf{Q}-j\varepsilon\mathbf{A}(\mathbf{x})+\right. \tag{13}$$
$$\left.+\frac{(j\varepsilon)^2}{2}\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\right)+\Phi_2(\mathbf{x})j\varepsilon\mathbf{f}_2\sum_{i=1}^{S}x_i\left(j\varepsilon\mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{x})+\mathbf{Q}-j\varepsilon\mathbf{A}(\mathbf{x})\right)+O(\varepsilon^3),$$

где

$$\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x})=\varepsilon\left[x_1q_1,\dots,x_Sq_S\right],\ \mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{x})=\mathrm{diag}\left[\lambda_ix_i\right],$$

$$\mathbf{\Lambda}_2(\mathbf{x})=\mathrm{diag}\left[\lambda_ix_i^2\right],\ \frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{r}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}r_1 & \dots & \frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}r_S\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_S}r_1 & \dots & \frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_S}r_S\end{bmatrix}.$$

Умножим выражение (13) на единичный вектор **e**:

$$\left(-j\varepsilon\right)^2\sum_{i=1}^{S}x_iq_i\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_i}=$$
$$=\Phi_2(\mathbf{x})\left\{j\varepsilon\sum_{i=1}^{S}r_i\lambda_ix_i+\frac{\left(j\varepsilon\right)^2}{2}\sum_{i=1}^{S}r_i\lambda_ix_i^2-j\varepsilon\sum_{i=1}^{S}r_i\lambda_ix_i+\frac{\left(j\varepsilon\right)^2}{2}\sum_{i=1}^{S}r_i\lambda_ix_i^2\right\}+ \tag{14}$$
$$+\Phi_2(\mathbf{x})\left\{\left(j\varepsilon\right)^2\sum_{i=1}^{S}x_i\sum_{j=1}^{S}f_j\lambda_jx_j+j\varepsilon\sum_{i=1}^{S}x_i\mathbf{f}_2\mathbf{Q}\mathbf{e}\right\}+O(\varepsilon^3).$$

Учитывая (11), из (14) получаем дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных для функции $\Phi_2(\mathbf{x})$:

$$\sum_{i=1}^{S} x_i q_i \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \Phi_2(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{i=1}^{S} r_i \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} x_i x_j f_j \lambda_j \right\} \tag{15}$$

Решение уравнения (15) имеет вид:

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i x_i^2}{q_i} + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} \frac{x_i x_j f_j \lambda_j}{q_i + q_j} \right\},$$

тогда

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{r} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i x_i^2}{q_i} + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} \frac{x_i x_j f_j \lambda_j}{q_i + q_j} \right\}.$$

Осуществив обратные замены $x_i^2 = \frac{u_i^2 q_i}{\mu_i}$, $x_i x_j = \frac{u_i u_j}{\varepsilon^2}$, $q_i + q_j = \frac{\mu_i + \mu_j}{\varepsilon^2}$, получаем

$$\mathbf{h}_2(\mathbf{u}) = \mathbf{r} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i u_i^2}{\mu_i} + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} \frac{u_i u_j f_j \lambda_j}{\mu_i + \mu_j} \right\},$$

откуда

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{r} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i u_i^2}{\mu_i} + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} \frac{u_i u_j f_j \lambda_j}{\mu_i + \mu_j} + j \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i u_i}{\mu_i} \right\}.$$

Домножив на единичный вектор **e**, получим

$$H(\mathbf{u}) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i u_i^2}{\mu_i} + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} \frac{u_i u_j f_j \lambda_j}{\mu_i + \mu_j} + j \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i u_i}{\mu_i} \right\}.$$

Асимптотическая характеристическая функция числа занятых приборов разного типа в системе имеет вид гауссовской характеристической функции с вектором математического ожидания и матрицей ковариации:

$$\mathbf{a} = \left[\frac{r_1 \lambda_1}{\mu_1}, \ldots, \frac{r_S \lambda_S}{\mu_S} \right], \ \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{r_1 \lambda_1}{\mu_1} & \frac{f_2 \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} & \ldots & \frac{f_S \lambda_S}{\mu_1 + \mu_S} \\ \frac{f_1 \lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} & \frac{r_2 \lambda_2}{\mu_2} & \ldots & \frac{f_S \lambda_S}{\mu_1 + \mu_S} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{f_1 \lambda_1}{\mu_1 + \mu_S} & \frac{f_2 \lambda_2}{\mu_1 + \mu_S} & \ldots & \frac{r_S \lambda_S}{\mu_S} \end{bmatrix}.$$

Заключение

В данной работе исследована математическая модель системы M|M|∞, функционирующей в условии изменяющейся внешней среды. С помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания доказано, что распределение вероятностей числа занятых приборов разного типа в системе является многомерным гауссовским.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеева С.П., Полин Е.П. Исследование математической модели бесконечнолинейной СМО с входящим MAP-потоком переменной интенсивности // Доклады 12-й Междунар. азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем». 12–16 декабря 2016 г. Новосибирск, 2016. С. 380–384.

2. Таташев А.Г. Система массового обслуживания с переменной интенсивностью входного потока // Автоматика и телемеханика. 1995. № 12. С. 78–84.
3. Дудин С.А., Дудина О.С. Многоканальная система обслуживания с марковским входным потоком нетерпеливых запросов, функционирующая в случайной среде // Информатика. 2015. № 1. С. 45–55.
4. Eisen M., Tainiter M. Stochastic variations in queueing processes // Opens. Res. 1963. V. 11. P. 922–927.
5. Naor P., Yechiali U. Queueing problems with heterogeneous arrivals and service // Opens. Res. 1971. V. 19, No. 3. P. 722–734.
6. Yechiali U. A queueing tipe birth and death process defined as a continuous time markov chain // Opens. Res. 1973. V. 21, No. 2. P. 604–629.
7. Baykal-Gursoy M., Xiao W. Stochastic Decomposition in M/M/∞ Queues with Markov Modulated Service Rates // Queueing Syst. 2004. V. 48. P. 75–88.
8. O'Cinneide C.A., Purdue P. The M/M/∞ Queue in a random environment // J. Appl. Prob. 1986. V. 23. P. 175–184.
9. Blom J., Kella O., Mandjes M., Thorsdottir H. Markov-Modulated Infinite-Server Queues with General Service Times // Queueing Syst. 2014. V. 76. P. 403-424.
10. D'Auria B. M/M/∞ queues in semi-Markovian random environment // Queueing Syst. 2008. V. 58. P. 221–237.
11. Falin G. The M/M/∞ Queue in Random Environment // Queueing Syst. 2008. V. 58. P. 65–76.
12. Fralix B.H., Adan I.J.B.F. An infinite-server queue influenced by a semi-markovian environment // Queueing Syst. 2009. V. 61. P. 65–84.
13. Linton D., Purdue P. An M/G/∞ Queue with m customer types subject to periodic clearing // Opsearch, 1979. V. 16. P. 80–88.
14. Назаров А.А., Баймеева Г.В. Исследование системы M/M/∞ в полумарковской случайной среде // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11/2. С. 198–203.
15. Моисеев А.Н., Моисеева С.П. Исследование входящего потока для GRID-системы с адаптируемым выделением вычислительных ресурсов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 81–87.
16. Полин Е.П. Исследование системы MMPP(n)|M(n)|∞ методом моментов // Труды Томского государственного университета. Т. 302. Сер. физико-математическая. Томск : Издательский Дом ТГУ, 2018. С. 306–311.
17. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
18. Убонова Е.Г., Панкратова Е.В. Гауссовская аппроксимация для системы массового обслуживания MMPP/M/∞ с разнотипным обслуживанием // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11/2. С. 225–230.

Поступила в редакцию 8 октября 2018 г.

Polin E.P., Moiseeva S.P., Rozhkova S.V. (2019) ASIMPTOTIC ANALYSIS OF HETEROGENEOUS QUEUING SYSTEM M|M|∞ IN A MARKOV RANDOM ENVIRONMENT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Jounal of Control and Computer Science]. 47. pp. 75–83

DOI: 10.17223/19988605/47/9

In this paper, an inhomogeneous queuing system with an unlimited number of servers operating in a random environment is considered.

The arrival process is a Poisson Process, the process of changing the state of the environment is a Markov chain, which is given by the matrix of infinitesimal characteristics. The service discipline is defined as follows: if the customer comes with some intensity, then it is served by a random time distributed according to an exponential distribution with the corresponding parameter, which does not change when, the state of the environment changes.

We proposed the characteristic functions method and the asymptotic analysis method to study the system. Using partial characteristic functions, we obtained the matrix equation which allows us to determine the main characteristics of the system». Applying the asymptotic analysis method, we obtained the solution of this equation under the condition of an infinitely growing servicing time. It determines the average number of occupied servers of each type in the system.

For a more detailed study, we used an asymptotic analysis of the second order, as a result we showed that the asymptotic characteristic function of the number of occupied servers of each type in the system has the form of a Gaussian characteristic function and the probability distribution of the number of occupied servers of each type in the system under the condition of an infinitely growing service time is a multidimensional Gaussian distribution.

Keywords: infinite-server queue; asymptotic analysis method; random environment.

POLIN Evgeny Pavlovich (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: polin_evgeny@mail.ru
MOISEEVA Svetlana Petrovna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: smoiseeva@mail.ru

ROZHKOVA Svetlana Vladimirovna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: rozhkova@tpu.ru

REFERENCES

1. Moiseeva, S.P. & Polin, E.P. (2016) [Investigation of the mathematical model of an infinite-linear queuing system with an incoming MAP arrival process of variable intensity]. *Problemy optimizatsii slozhnykh sistem* [Problems of Optimization of Complex Systems]. Proc. of the 12th International Seminar. Novosibirsk. December 12–16, 2016. Novosibirsk. pp. 380–384. (In Russian).
2. Tatashev, A.G. (1995) Queuing system with arrival process of variable intensity. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 12. pp. 78–84. (In Russian).
3. Dudin, S.A. & Dudina O.S. (2015) Multi-channel queuing system with a Markov arrival process of impatient requests, operating in a random environment. *Informatika*. 1. pp. 45–55. (In Russian).
4. Eisen, M. & Tainiter, M. (1963) Stochastic variations in queueing processes. *Operations Research.* 1(11). pp. 922–927. DOI: 10.1287/opre.11.6.922
5. Naor, P. & Yechiali, U. (1971) Queueing problems with heterogeneous arrivals and service. *Operations Research*. 19(3). pp. 722–734. DOI: 10.1287/opre.19.3.722
6. Yechiali, U. (1973) A queueing tipe birth and death process defined as a continuous time markov chain. *Operations Research.* 21(2). pp. 604–629. DOI: 10.1287/opre.21.2.604
7. Baykal-Gursoy, M. & Xiao, W. (2004) Stochastic decomposition in M/M/∞ queues with markov modulated service rates. *Queueing Systems.* 48. pp. 75–88. DOI: 10.1023/B:QUES.0000039888.52119.1d
8. O'Cinneide, C.A. & Purdue, P. (1986) The M/M/∞ queue in a random environment. *Journal of Applied Probability.* 23(1). pp. 175–184. DOI: 10.2307/3214126
9. Blom, J., Kella, O., Mandjes, M. & Thorsdottir, H. (2014) Markov-modulated infinite-server queues with general service times. *Queueing Systems.* 76. pp. 403–424. DOI: 10.1007/s11134-013-9368-4
10. D'Auria, B. (2008) M/M/∞ queues in semi-Markovian random environment. *Queueing Systems.* 58. pp. 221–237. DOI: 10.1007/s11134-008-9068-7
11. Falin, G. (2008) The M/M/∞ Queue in Random Environment. *Queueing Systems*. 58. pp. 65–76. DOI: 10.1007/s11134-007-9059-0
12. Fralix, B.H. & Adan, I.J.B.F. (2009) An infinite-server queue influenced by a semi-Markovian environment. *Queueing Systems.* 61. pp. 65–84. DOI: 10.1007/s11134-008-9100-y
13. Linton, D. & Purdue, P. (1979) An M/G/∞ queue with m customer types subject to periodic clearing. *Opsearch*. 16 pp. 80–88.
14. Nazarov, A.A. & Baymeeva, G.V. (2015) Issledovanie sistemy M/M/∞ v polumarkovskoy sluchaynoy srede [Investigation of the system M/M/∞ in a semi-Markov random environment]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 58(11/2). pp. 198–203.
15. Moiseev, A.N. & Moiseeva, S.P. (2012) Investigation of input flow for the GRID-system with adaptive providing of computing resources. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(20). pp. 81–87. (In Russian).
16. Polin, E.P. (2018) Issledovanie sistemy MMPP(n)|M(n)|∞ metodom momentov [Investigation of the MMPP(n)|M(n)|∞ system by the method of moments]. *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universi-teta. Ser. fiziko-matematicheskaya*. 302. pp. 306–311.
17. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analysis in queuing theory]. Tomsk: NTL.
18. Ubonova, E.G. & Pankratova, E.V. (2015) Gaussovskaya approksimatsiya dlya sistemy massovogo obsluzhivaniya MMPP/M/∞ s razno-tipnym obsluzhivaniem [Gaussian approximation for the MMPP/M/∞ queuing system with a heterogeneous service]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 58(11/2). pp. 225–230.

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

УДК 519.6
DOI: 10.17223/19988605/47/10

Б.М. Шумилов

МУЛЬТИВЕЙВЛЕТЫ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНАМ

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ и Администрации Томской области, грант № 16-41-700400 р_а.

Представлена конструкция мультивейвлетов на основе эрмитовых сплайнов произвольной нечетной степени на конечном отрезке. Мультивейвлеты ортогональны многочленам той же степени и имеют наименьший носитель. Предложен алгоритм мультивейвлет преобразования с применением метода блочной матричной прогонки. Исследована устойчивость на больших сетках. Дан численный пример аппроксимации и сжатия данных для случая мультивейвлетов седьмой степени.
Ключевае слова: эрмитовы сплайны; мультивейвлеты; ортогональность многочленам.

Вейвлетом называется короткая или быстро затухающая волновая функция (всплеск), множество сжатий и смещений которой порождает пространство измеримых функций на всей числовой оси [1–3]. Основой для построения вейвлетов является наличие набора аппроксимирующих пространств … $V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1}$ …, таких, что каждая базисная функция в V_{L-1} может быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций в V_L. В частности, таким свойством обладают сплайны – гладкие функции, склеенные из кусков многочленов степени m, на вложенной последовательности сеток. Если порядок склейки равен $m - 1$, то классические полуортогональные вейвлеты (элементы пространства V_L, ортогональные пространству V_{L-1}) имеют довольно большой носитель из $2m + 1$ шагов сетки. В случае аппроксимации на конечном интервале ситуация усугубляется, так как приходится учитывать краевые эффекты. Это препятствует их широкому использованию для решения задач математического моделирования. В отличие от этого эрмитовы сплайны нечетной степени $m = 2r + 1$ (соответствующие склейке порядка r) приводят к вейвлетам с носителем из трех шагов сетки, что, несомненно, предпочтительнее. Поскольку в базисе таких функций несколько, они называются мультивейвлетами [4–8]. В [9, 10] были предложены методы построения вейвлетов, ортогональных многочленам, с уменьшенными носителями. Идея уменьшения носителя вейвлета за счет замены свойства ортогональности пространству сплайнов на прореженной сетке ортогональностью многочленам представляется привлекательной. Действительно, с точки зрения скорости приближения гладких функций [3] данные типы вейвлетов эквивалентны, а ортогональность многочленам обеспечивает локально максимальную «похожесть» на наилучшее среднеквадратическое приближение.

В данной работе мы излагаем результаты исследования мультивейвлетов произвольной нечетной степени с носителем [0, 2], ортогональных многочленам той же степени, на конечном отрезке.

1. Построение системы базисных мультивейвлетов произвольной нечетной степени на конечном отрезке

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана вложенная последовательность равномерных сеток Δ^L: $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \ldots, 2^L$, $h = (b - a)/2^L$, $L \geq 0$. Мультивейвлеты возникают тогда, когда с каждым узлом сетки связано более одной базисной функции [4]. В частности, если базисные функции $N^L_{i,k}(x) = \varphi_k(v - i)$, $k = 0, 1, \ldots, r$ $\forall i$, где $v = (x - a)/h$, с центрами в целых числах, порождены сжатиями и сдвигами $r + 1$ функций вида [11. С. 82]:

$$\varphi_k(t)=\begin{cases}(-1)^k\,\omega_k(-t) & \text{при } -1\le t\le 0,\\ \omega_k(t) & \text{при } 0\le t\le 1,\\ 0, & t\notin[-1,1],\end{cases}$$

где $\omega_k(t)=(1-t)^{r+1}\sum\limits_{\beta=0}^{r-k}\frac{(r+\beta)!}{k!\beta!r!}t^{k+\beta}$, $k=0,1,\ldots,r$, то при условии отсечения выступающих за концы отрезка половинок функций $\varphi_0(t)$, …, $\varphi_r(t)$ полученное пространство V_L является пространством эрмитовых сплайнов степени $2r + 1$ гладкости C^r.

На любой сетке Δ^L, $L \ge 0$, интерполяционный эрмитов сплайн $(2r + 1)$-й степени может быть представлен как

$$\mathrm{S}^L(x)=\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=0}^{2^L}C_i^{L,k}\,\mathrm{N}_{i,k}^L(x),\quad a\le x\le b, \tag{1}$$

где коэффициенты $C_i^{L,k}$, $k = 0, \ldots, r$, являются значениями и соответствующими производными аппроксимируемой функции $f(x)$, помноженными на h в соответствующей степени: $\{f^{(k)}(i\cdot h)\cdot h^k$, $k = 0, \ldots, r$, $i = 0, \ldots, 2^L\}$, в узлах сетки.

Поскольку сетка Δ^{L-1}, $L \ge 1$, получена из Δ^L посредством удаления каждого второго узла, то соответствующее пространство V_{L-1} с базисными функциями $\mathrm{N}^{L-1}_{i,k}$, с носителями, в два раза большими по ширине, и центрами в четных целых числах, вложено в V_L. Остаток W_{L-1} от разности пространств V_L и V_{L-1}, размерности $(r + 1)\cdot(2^L + 1 - 2^{L-1} - 1) = (r + 1)2^{L-1}$, называется пространством вейвлетов.

В классической теории вейвлетов базисные функции W_{L-1} ортогональны всем базисным сплайнам на прореженной сетке V_{L-1} по отношению к некоторому скалярному произведению. Это означает, что пространство V_L представляет прямую сумму V_{L-1} и W_{L-1}: $V_L = V_{L-1} \oplus W_{L-1}$. В отличие от этого, будем искать вейвлеты $\mathrm{M}^L_{i,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r\ \forall i$, как линейные комбинации базисных эрмитовых сплайнов на сетке Δ^{L+1}, удовлетворяющие условиям ортогональности многочленам $(2r + 1)$-го порядка [12]

$$\int_a^b \mathrm{M}_{i,k}^L(x)x^m dx=0,\ \ k=0,1,\ldots,r\ \forall i\ (m=0,1,\ldots,2r+1) \tag{2}$$

и имеющие минимальные из возможных носителей.

Теорема. Система функций $\mathrm{M}^L_{i,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r$, $i = 1, 2, \ldots, 2^L$, удовлетворяющих условиям (2) с носителями не более чем из двух шагов сетки Δ^L, существует и образует базис в пространстве W_L.

Доказательство.

а) Пусть $L \ge 1$, и носители вейвлетов $[x_{2i-1}, x_{2i+p+1}]$, $p \ge 1$, полностью располагаются внутри отрезка аппроксимации $[a, b]$. При $p \ge 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 2^L - 1 - [p/2]$ имеем разложение

$$\mathrm{M}_{i,k}^L(x)=\sum_{l=0}^{r}\sum_{j=0}^{p}\alpha_j^l\varphi_l(t-j),\ t=(x-x_{2i})/h,\quad -1\le t\le p+1. \tag{3}$$

Разложение (3) подставим в (2) и вычислим все необходимые интегралы, учитывая при этом, что подынтегральные выражения обращаются в нуль вне носителей вейвлетов. Условия ортогональности (2) определяют однородную систему $2r + 2$ уравнений относительно коэффициентов вейвлета $\mathrm{M}_{i,k}^L(x)$. В силу линейной независимости на интервалах $[x_{2i-1}, x_{2i+p+1}]$ базисных функций $\mathrm{N}_{2i+l,k}^{L+1}(x)$, $l = 0, \ldots, r$, $j = 0, 1, \ldots, p$, и поверочных функций x^m, $m = 0, 1, \ldots, 2r + 1$ [1], ранг полученной системы равняется $\min[2r + 2, (r + 1)(p + 1)]$. Если предположить, что носитель вейвлета равен трем шагам сетки Δ^{L+1}, т.е. $p = 1$, то однородная система становится квадратной и, будучи невырожденной, может иметь только тривиальное решение. Поэтому будем далее считать, что носитель вейвлета равен четырем шагам сетки Δ^{L+1}, те вейвлет построен из $3r + 3$ базисных сплайнов. В этом случае ранг матрицы равен $2r + 2$. Поэтому однородная система $2r + 2$ уравнений с $3r + 3$ неизвестными имеет $r + 1$ линейно независимых частных решений. Длина носителей, полученных для каждого номера i вейвлетов, равна длине носителей базисных сплайнов на сетке Δ^L. Их линейная независимость вытекает

из того факта, что они представляют собой множество сдвигов ненулевых функций с компактными носителями. При этом количество вейвлетов, полностью лежащих внутри отрезка аппроксимации, равно $(r + 1)(2^L - 2) = (r + 1)2^L - 2(r + 1)$, что на $2(r + 1)$ меньше разности между размерностями пространств V_{L+1} и V_L: $(r + 1)(2^{L+1} + 1) - (r + 1)(2^L + 1) = (r + 1)2^L$.

Вблизи концов отрезка интервалы интегрирования не выходят за пределы отрезка. Поэтому с учетом того, что по краям отрезка $[a, b]$ от выступающих за концы отрезка функций $\varphi_0(t)$, …, $\varphi_r(t)$ остается по половинке, граничные вейвлеты отличаются от вейвлетов, предложенных выше, при условии ортогональности многочленам $(2r + 1)$-й степени. Аналогичные рассуждения приводят к двум системам линейно независимых функций $w_0(t)$, …, $w_r(t)$ отдельно на левом и на правом концах, дополняющих до базиса построенную выше вейвлет-систему.

б) Пусть $L = 0$. Вычисления снова дают $r + 1$ линейно независимых частных решений, которые дают базис в пространстве $V_1 - V_0$ с размерностью $(r + 1)\cdot 3 - (r + 1)\cdot 2 = (r + 1)$. Теорема доказана.

В соответствии с правилами линейной алгебры сформулируем следующий алгоритм построения эрмитовых мультивейвлетов нечетной степени.

Следствие. Введем в рассмотрение три матрицы размерности $(2r+2)\times(r+1)$ с элементами

$$R^j_{m,l} = \int_{j-1}^{j+1} \varphi_l(2t-j)t^m dt,\ j=0,1,2,\ l=0,1,\ldots,r,\ m=0,1,\ldots,2r+1$$

и составим из них блочную квадратную матрицу $(2r + 2)$-го порядка вида $[R^0|R^2]$. Тогда при условии, что коэффициенты разложения (3) $\alpha^l_1 = \{1, l=k; 0, l\neq k\}$, каждый из $r + 1$ столбцов матрицы $\left[\mathrm{A}_0^{\text{inner}} / \mathrm{A}_2^{\text{inner}}\right] = -[R^0 \mid R^2]^{-1} R^1$ дает значения коэффициентов $\alpha^l_j,\ j=0,2,\ l=0,1,\ldots,r,$ соответствующего k-го базисного вейвлета, полностью лежащего внутри отрезка аппроксимации. На левом конце отрезка элементы матрицы R^0 вычисляются по укороченному интервалу:

$$R^0_{m,l} = \int_0^1 \varphi_l(2t)t^m dt,\ l=0,1,\ldots,r,\ m=0,1,\ldots,2r+1,$$

а коэффициенты разложения (3) $\alpha^l_j,\ j=1,2,\ l=0,1,\ldots,r,$ соответствующего k-го базисного вейвлета даются значениями столбцов матрицы $\left[\mathrm{A}_1^{\text{left}} / \mathrm{A}_2^{\text{left}}\right] = -[R^1 \mid R^2]^{-1} R^0$ при условии, что коэффициенты $\alpha^l_0 = \{1, l=k; 0, l\neq k\}$. Аналогично на правом конце отрезка аппроксимации элементы матрицы R^2 вычисляются по укороченному интервалу:

$$R^2_{m,l} = \int_1^2 \varphi_l(2t-2)t^m dt,\ l=0,1,\ldots,r,\ m=0,1,\ldots,2r+1,$$

а коэффициенты разложения (3) $\alpha^l_j,\ j=0,1,\ l=0,1,\ldots,r,$ соответствующего k-го базисного вейвлета даются значениями столбцов матрицы $\left[\mathrm{A}_0^{\text{right}} / \mathrm{A}_1^{\text{right}}\right] = -[R^0 \mid R^1]^{-1} R^2$ при условии, что коэффициенты $\alpha^l_2 = \{1, l=k; 0, l\neq k\}$. При $L = 0$ все интегралы вычисляются по интервалу [0, 2], а граничных вейвлетов не возникает: $\left[\mathrm{A}_0^{\text{center}} / \mathrm{A}_2^{\text{center}}\right] = -[R^0 \mid R^2]^{-1} R^1$ при условии, что $\alpha^l_1 = \{1, l=k; 0, l\neq k\}$.

2. Построение и обращение блока фильтров

Если упорядочить базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки, $\varphi^L = \left[N^L_{0,0}, N^L_{0,1}, \ldots, N^L_{0,r}, N^L_{1,0}, N^L_{1,1}, \ldots, N^L_{2^L,r}\right]$, то можно записать функции φ^{L-1} в виде линейных комбинаций функций φ^L: $\varphi^{L-1} = \varphi^L P^L$. Здесь блоки матрицы P^L составлены из коэффициентов масштабных (калибровочных) соотношений [13]:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{2} H_k \begin{bmatrix} \varphi_0(2t-k) \\ \varphi_1(2t-k) \\ \vdots \\ \varphi_r(2t-k) \end{bmatrix},$$

где $H_2 = U^{-1}\Lambda U$, $\Lambda = \mathrm{diag}\left(2^{-r-1},...,2^{-2r-1}\right)$, матрица U размерности $(r+1)\times(r+1)$ задана элементами $U_{k,j} = (-1)^{r+1+k-j}\dfrac{(r+1+k)!}{(r+1+k-j)!}, k, j = 0,1,\ldots,r$, $H_1 = \mathrm{diag}\left(1,2^{-1},...,2^{-r}\right)$, $S = \mathrm{diag}\left(1,-1,...,(-1)^{-r}\right)$, $H_0 = SH_2S^{-1}$.

Аналогично запишем базисные вейвлет-функции ($2r$ + 1)-й степени на уровне масштабирования L в виде матрицы-строки: $\psi^L = \left[M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, \ldots, M_{1,r}^L, ..., M_{2^L,r}^L\right]$. Тогда для уровня L – 1 можно выразить функции ψ^{L-1} в виде линейных комбинаций функций φ^L, т.е. $\psi^{L-1} = \varphi^L Q^L$, где блоки матрицы Q^L составлены из коэффициентов разложения (3). Соответствующие коэффициенты сплайна будем собирать в вектор $C^L = \left[C_0^{L,0}, C_0^{L,1}, \ldots, C_0^{L,r}, C_1^{L,0}, ..., C_{2^L}^{L,r}\right]^{\mathrm{T}}$, а соответствующие вейвлет-коэффициенты – в вектор $D^L = \left[D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, \ldots, D_1^{L,r}, ..., D_{2^L}^{L,r}\right]^{\mathrm{T}}$ (здесь символ ^{T} обозначает операцию транспонирования). С использованием обозначений для блочных матриц процесс получения C^L из C^{L-1} и D^{L-1} может быть записан как [14]

$$C^L = [P^L \,|\, Q^L]\left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}}\right]. \tag{4}$$

Ниже представлены примеры матриц $[P^L \,|\, Q^L]$, соответствующих L = 1, 2, 3:

$$[P^1 \,|\, Q^1] = \begin{bmatrix} H_1 & O & \mathrm{A}_0^{\mathrm{center}} \\ H_2^T & H_0^T & I \\ O & H_1 & \mathrm{A}_2^{\mathrm{center}} \end{bmatrix}, [P^2 \,|\, Q^2] = \begin{bmatrix} H_1 & O & O & I & O \\ H_2^T & H_0^T & O & \mathrm{A}_1^{\mathrm{left}} & O \\ O & H_1 & O & \mathrm{A}_2^{\mathrm{left}} & \mathrm{A}_0^{\mathrm{right}} \\ O & H_2^T & H_0^T & O & \mathrm{A}_1^{\mathrm{right}} \\ O & O & H_1 & O & I \end{bmatrix},$$

$$[P^3 \,|\, Q^3] = \begin{bmatrix} H_1 & O & O & O & O & I & O & O & O \\ H_2^T & H_0^T & O & O & O & \mathrm{A}_1^{\mathrm{left}} & O & O & O \\ O & H_1 & O & O & O & \mathrm{A}_2^{\mathrm{left}} & \mathrm{A}_0^{\mathrm{inner}} & O & O \\ O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & I & O & O \\ O & O & H_1 & O & O & O & \mathrm{A}_2^{\mathrm{inner}} & \mathrm{A}_0^{\mathrm{inner}} & O \\ O & O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & I & O \\ O & O & O & H_1 & O & O & O & \mathrm{A}_2^{\mathrm{inner}} & \mathrm{A}_0^{\mathrm{right}} \\ O & O & O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & \mathrm{A}_1^{\mathrm{right}} \\ O & O & O & O & H_1 & O & O & O & I \end{bmatrix}.$$

Здесь O обозначает матрицу (r + 1)-го порядка с нулевыми коэффициентами, тогда как I – единичная матрица (r + 1)-го порядка. Обратный процесс разбиения коэффициентов C^L на более грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} состоит в решении системы линейных уравнений (4). Разрешимость данной системы гарантирована линейной независимостью базисных функций.

Процедуру разбиения C^L на часть C^{L-1}, соответствующую низшему масштабу, и уточняющие коэффициенты D^{L-1} можно применить рекурсивно и к самой этой части C^{L-1}. Следовательно, исход-

ные значения можно представить в виде иерархии грубых версий с масштабами C^0, C^1, …, C^{L-1} и уточняющих деталей D^0, D^1, …, D^{L-1}. Результирующее вейвлет-разложение эрмитового сплайна $(2r + 1)$-й степени $S^L(x)$ может быть записано в виде:

$$S^L(x) = \sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{i=0}^{1} C_i^{0,k}\,\mathrm{N}_{i,k}^{0}(x) + \sum_{j=0}^{L-1}\sum_{i=0}^{2^j} D_i^{j,k}\,\mathrm{M}_{i,k}^{j}(x)\right), \quad a \le x \le b.$$

При этом по величине вейвлет-коэффициентов D^j, $j = 0, 1,\ldots, L - 1$, можно судить о значимости соответствующих уточняющих деталей. Незначимые убираются с целью сжатия информации.

3. Проблема устойчивости мультивейвлет-преобразования

При больших L матрицу $[P^L \mid Q^L]$ следует сделать блочной трехдиагональной, изменив порядок неизвестных так, чтобы блоки матриц P^L и Q^L перемежались (см. [15]):

$$[P^L \mid Q^L] = \begin{pmatrix} H_1 & I & 0 & \cdots & 0 \\ H_2^T & A_1^{\text{left}} & H_0^T & \ddots & \vdots \\ 0 & A_2^{\text{left}} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_1^{\text{right}} & H_0^T \\ 0 & \cdots & 0 & I & H_1 \end{pmatrix}, L > 1.$$

Тогда можно применить для решения системы (4) алгоритм блочной матричной прогонки [16]. Введем для $L > 1$ обозначения $\mathbf{L}$ = blocktridiag$\{H_2^T, 0, 0; A_2^{\text{left}}, 0, 0; H_2^T, 0, 0; A_2^{\text{inner}}, 0, 0; \ldots ; I, 0, 0\}$; $\mathbf{U}$ = blocktridiag$\{0, 0, I; 0, 0, H_0^T; 0, 0, A_0^{\text{inner}}; \ldots ; 0, 0, A_0^{\text{right}}; 0, 0, H_0^T\}$; $\mathbf{T}$ = blockdiag$\{T_i, i = 0, 1,\ldots , 2^L\}$. В результате получим

$$[P^L \mid Q^L] = (\mathbf{L}+\mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{U}+\mathbf{T}), \tag{5}$$

где для блоков T_i справедливы выражения [17]

$$\begin{gathered} T_1 = H_1; T_2 = A_1^{\text{left}} - H_2^T T_1^{-1}; T_3 = H_1 - A_2^{\text{left}} T_2^{-1} H_0^T; \\ T_i = I - H_2^T T_{i-1}^{-1} A_0^{\text{inner}}; T_{i+1} = H_1 - A_2^{\text{inner}} T_i^{-1} H_0^T \ (i = 4, 6, \ldots, 2^L - 2); \\ T_{2^L} = A_1^{\text{right}} - H_2^T T_{2^L-1}^{-1} A_0^{\text{right}};\ T_{2^L+1} = H_1 - T_{2^L}^{-1} H_0^T. \end{gathered} \tag{6}$$

Аналогично для $L = 1$ имеют место $T_1 = H_1; T_2 = I - H_2^T T_1^{-1} A_0^{\text{center}}; T_3 = H_1 - A_2^{\text{center}} T_2^{-1} H_0^T$.

Если ввести обозначения $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{U}+\mathbf{T})\left[C_0^{L-1}, D_1^{L-1}, \ldots, D_{2^{L-1}}^{L-1}, C_{2^{L-1}}^{L-1}\right]^{\mathrm{T}} = z,\ C_i^L = \left[C_i^{L,0}, C_i^{L,1}, \ldots, C_i^{L,r}\right]$, $D_i^L = \left[D_i^{L,0}, D_i^{L,1}, \ldots, D_i^{L,r}\right]$, то процесс решения системы (4) разбивается на два этапа:

$$(\mathbf{L}+\mathbf{T})z = C^L; (\mathbf{I}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U})\left[C_0^{L-1}, D_1^{L-1}, \ldots, D_{2^{L-1}}^{L-1}, C_{2^{L-1}}^{L-1}\right]^{\mathrm{T}} = z.$$

Покомпонентно каждый из них можно записать в следующем виде: для решения $(\mathbf{L}+\mathbf{T})z = C^L$ последовательно выполняются действия

$$\begin{gathered} z_1 = T_1^{-1}\left(C_0^L\right)^{\mathrm{T}}; z_2 = T_2^{-1}\left(\left(C_1^L\right)^{\mathrm{T}} - H_2^{\mathrm{T}} z_1\right); z_3 = T_3^{-1}\left(\left(C_2^L\right)^{\mathrm{T}} - A_2^{\text{left}} z_2\right); \\ z_i = T_i^{-1}\left(\left(C_{i-1}^L\right)^{\mathrm{T}} - H_2^{\mathrm{T}} z_{i-1}\right); z_{i+1} = T_{i+1}^{-1}\left(\left(C_i^L\right)^{\mathrm{T}} - A_2^{\text{inner}} z_i\right) (i = 4, 6, \ldots, 2^L - 2); \\ z_{2^L} = T_{2^L}^{-1}\left(\left(C_{2^L-1}^L\right)^{\mathrm{T}} - H_2^{\mathrm{T}} z_{2^L-1}\right); z_{2^L+1} = T_{2^L+1}^{-1}\left(\left(C_{2^L}^L\right)^{\mathrm{T}} - z_{2^L}\right), \end{gathered} \tag{7}$$

а для вычисления $(\mathbf{I}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U})\left[C_0^{L-1}, D_1^{L-1}, \ldots, D_{2^{L-1}}^{L-1}, C_{2^{L-1}}^{L-1}\right]^{\mathrm{T}} = z$ можно воспользоваться рекуррентными формулами:

$$\begin{gathered}\left(C_{2^{L-1}}^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_{2^L+1};\left(D_{2^{L-1}}^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_{2^L} - T_{2^L}^{-1}H_0^{\mathrm{T}}\left(C_{2^{L-1}}^{L-1}\right)^{\mathrm{T}};\\ \left(C_{2^{L-1}-1}^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_{2^L-1} - T_{2^L-1}^{-1}A_0^{\mathrm{right}}\left(D_{2^{L-1}}^{L-1}\right)^{\mathrm{T}};\left(D_i^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_{2i} - T_{2i}^{-1}H_0^{\mathrm{T}}\left(C_i^{L-1}\right)^{\mathrm{T}};\\ \left(C_i^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_{i-1} - T_{i-1}^{-1}A_0^{\mathrm{inner}}\left(D_i^{L-1}\right)^{\mathrm{T}}\ (i = 2^{L-1}-1, 2^{L-1}-2, \ldots, 2);\\ \left(D_1^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_2 - T_2^{-1}H_0^{\mathrm{T}}\left(C_1^{L-1}\right)^{\mathrm{T}};\left(C_0^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_1 - T_1^{-1}\left(D_1^{L-1}\right)^{\mathrm{T}}.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь z_i суть подвекторы порядка $r + 1$.

Нетрудно убедиться, что при $L > 1$, кроме первой и последней строк, условия даже слабого диагонального преобладания [16] не выполняются. Объективное представление об устойчивости или неустойчивости алгоритма вычисления мультивейвлет-преобразования дает наблюдение за поведением чисел обусловленности в эвклидовой норме прогоночных матриц T_i (таблица).

Значения стандартной функции MathCad'a cond2(T_i), i = 1, 2, …, 33, r = 1, …, 5

1	2	3	4	5	6
i \ cond2(T_i)	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
1	2	4	8	16	32
2	64,759	2,695e+004	2,799e+007	2,142e+011	8,333e+014
3	2,513	157,2	5,832e+004	8,799e+007	3,717e+010
4	2,953	60,32	7 805	2,468e+006	8,122e+008
5	3,493	478,7	1,817e+005	7,345e+007	7,162e+010
6	2,835	52,05	7 124	1,999e+006	7,353e+008
7	3,56	492,9	1,864e+005	7,264e+007	8,126e+010
8	2,831	51,79	7 102	1,991e+006	7,328e+008
9	3,563	493,4	1,865e+005	7,263e+007	8,158e+010
10	2,831	51,79	7 102	1,991e+006	7,327e+008
11	3,563	493,4	1,865e+005	7,263e+007	8,159e+010
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
32	533,592	3,61e+005	1,379e+009	5,382e+011	3,713e+017
33	84,003	2,933e+004	1,965e+007	7,101e+009	1,308e+015

Таким образом, можно полагать, что для любого уровня разрешения L они являются невырожденными, что на практике означает корректность представленного выше монотонного варианта алгоритма матричной прогонки (6)–(8). Для $r = 1$ (случай приближения кубическими мультивейвлетами) это согласуется с тем фактом, что на бесконечной числовой оси L_2-устойчивость базиса гарантирована существованием оценок констант Ритца $0{,}414076 < A < B < 0{,}414265$ [10], таких что

$$A\sum_{k=0}^{r}\sum_{j}\sum_{i}\left|D_i^{j,k}\right|^2 \le \left\|\sum_{k=0}^{r}\sum_{j}\sum_{i}D_i^{j,k}\,\mathrm{M}_{i,k}^{j}(x)\right\|_{L_2(\mathrm{R})}^2 \le B\sum_{k=0}^{r}\sum_{j}\sum_{i}\left|D_i^{j,k}\right|^2.$$

В случае приближения на конечном интервале обусловленность мультивейвлет-базиса может быть сделана весьма близкой к обусловленности базиса на бесконечной оси наложением дополнительно однородных краевых условий Дирихле [18, 19]. Однако, как следует из таблицы, с повышением степени мультивейвлета численная устойчивость будет неизбежно ухудшаться.

4. Пример для $r = 3$ (случай мультивейвлетов седьмой степени)

Мультивейвлеты седьмой степени можно применять в тех случаях, когда требуется аппроксимировать функцию или ее производные до пятого порядка с более высокой точностью по сравнению с вейвлетами степеней 3, 5. Кроме того, с помощью вейвлетов седьмой степени можно аппроксимировать на промежутках между узлами $x_i \in \Delta^L$ производные шестого и седьмого порядков – для вейвлетов степеней 3, 5 они равны нулю. Это может быть использовано при решении дифференциальных уравнений высокого порядка, например методом коллокации.

В частности, при $L \geq 1$ внутри отрезка аппроксимации получаем (все вычисления проводились в системе MathCad, дробные числа там, где они затрудняют восприятие результата, приводятся округленно в виде конечной десятичной дроби)

$$\mathrm{A}_0^{\text{inner}} = \begin{bmatrix} 1{,}1168 & -0{,}082 & 0{,}0159 & -0{,}0004 \\ 7{,}894 & -0{,}2968 & 0{,}0915 & -0{,}001 \\ -67{,}9076 & 6{,}9996 & -1{,}1658 & 0{,}039 \\ -1792{,}4185 & 129{,}5384 & -26{,}3043 & 0{,}6684 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A}_2^{\text{inner}} = \begin{bmatrix} 1{,}1168 & 0{,}082 & 0{,}0159 & 0{,}0004 \\ -7{,}894 & -0{,}2968 & -0{,}0915 & -0{,}001 \\ -67{,}9076 & -6{,}9996 & -1{,}1658 & -0{,}039 \\ 1792{,}4185 & 129{,}5384 & 26{,}3043 & 0{,}6684 \end{bmatrix}.$$

На левом конце отрезка аппроксимации имеем

$$\mathrm{A}_1^{\text{left}} = \begin{bmatrix} -27{,}3194 & -2{,}1593 & -0{,}115 & -0{,}0032 \\ -202{,}3878 & -18{,}5595 & -1{,}1415 & -0{,}0368 \\ 2442{,}3182 & 192{,}6016 & 10{,}2045 & 0{,}2832 \\ 61774{,}985 & 5405{,}3691 & 322{,}4923 & 10{,}2122 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A}_2^{\text{left}} = \begin{bmatrix} 15{,}9089 & 1{,}2448 & 0{,}0667 & 0{,}0019 \\ -12{,}3588 & -0{,}7126 & -0{,}0257 & -0{,}0004 \\ -1984{,}0775 & -158{,}6934 & -8{,}679 & -0{,}2531 \\ 30335{,}1818 & 2401{,}4609 & 130{,}1543 & 3{,}7654 \end{bmatrix}.$$

На правом конце отрезка аппроксимации значения совпадают с точностью до знака и перестановки.

При этом $H_1 = \mathrm{diag}(8,4,2,1)/8$,

$$H_0 = \frac{1}{768}\begin{pmatrix} 384 & 840 & 0 & -5040 \\ -132 & -228 & 360 & 2520 \\ 18 & 24 & -84 & -360 \\ -1 & -1 & 6 & 18 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{768}\begin{pmatrix} 384 & -840 & 0 & 5040 \\ 132 & -228 & -360 & 2520 \\ 18 & -24 & -84 & 360 \\ 1 & -1 & -6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Для $x \in [0, 1]$, полагая на верхнем уровне разрешения $L = 5$, находим длину шага сетки $h = 2^{-5} = 1/32$. В соотношениях уточнения (4) при выполнении вейвлет-преобразования в качестве исходных используются значения функции и трех производных, всего 132 числа. Рассматривая в качестве тестовой функции многочлен седьмой степени $f(x) = (2 - x)^3(x^2 - 1)^2$, находим на последнем этапе рекуррентного алгоритма вейвлет-разложения восемь значений сплайна $S^0(x)$ и трех его производных в концах отрезка $C^0 = [8, -12, -20, 138, 0, 0, 8, -48]^{\mathrm{T}}$. При этом все вейвлет-коэффициенты пренебрежимо малы и могут быть обнулены, обеспечивая в данном случае коэффициент сжатия $K = 132/8 = 16{,}5$.

Заключение

В работе представлена общая схема построения и вычисления мультивейвлетов на основе эрмитовых сплайнов и свойства ортогональности многочленам. Исследована устойчивость и даны результаты численного эксперимента по восстановлению функции, заданной многочленом. Дополнительные возможности для оптимизации методов обработки численной информации состоят в построении сглаживающей сплайн-аппроксимации, альтернативной методу наименьших квадратов, и в сжатии дискретных данных на участках гладкости функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам : пер. с англ. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 332 с.
2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты : пер. с англ. М. : Мир, 2001. 412 с.
3. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М. : Физматлит, 2006. 616 с.
4. Strela V. Multiwavelets: regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform // Stud. Appl. Math. 1997. V. 98, No. 4. P. 335–354.
5. Strela V., Heller P.N., Strang G., Topivala P., Heil C. The application of multiwavelet filterbanks to image processing // IEEE Trans. Signal Processing. 1999. V. 8, No. 4. P. 548–563.
6. Warming R., Beam R. Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets // SIAM J. Sci. Comp. 2000. V. 22, No. 1. P. 269–317.
7. Dahmen W., Han B., Jia R.-Q., Kunoth A. Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines // Constr. Approx. 2000. V. 16. P. 221–259.

8. Han B. Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets // J. Approxim. Theory. 2001. V. 110. P. 18–53.
9. Koro K., Abe K. Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2001. V. 25. P. 149–164.
10. Han B., Kwon S.-G., Park S.S. Riesz multiwavelet bases // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2006. V. 20. P. 161–183.
11. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980. 352 с.
12. Шумилов Б.М. Мультивейвлеты эрмитовых сплайнов третьей степени, ортогональные кубическим многочленам // Математическое моделирование. 2013. № 4. С. 17–28.
13. Strang G., Strela V. Short wavelets and matrix dilation equations // IEEE Trans. Signal Processing. 1995. V. 43, No. 1. P. 108–115.
14. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике : пер. с англ. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 272 с.
15. Шумилов Б.М. Алгоритм матричной прогонки вычисления мультивейвлетов нечетной степени, ортогональных многочленам // Автометрия. 2015. Т. 51, № 2. С. 83–92.
16. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М. : Наука, 1978. 591 с.
17. Васильева Е.А. Достаточные условия корректности метода матричной прогонки // Известия КГТУ. 2011. № 20. С. 103–108.
18. Schneider A. Biorthogonal cubic Hermite spline multiwavelets on the interval with complementary boundary conditions // Results in Mathematics. 2009. V. 53, is. 3. P. 407–416.
19. Cerna D., Finek V. Construction of optimally conditioned cubic spline wavelets on the interval // Adv. Comput. Math. 2011. V. 34. P. 519–552.

Поступила в редакцию 1 ноября 2018 г.

Shumilov B.M. (2019) MULTIWAVELETS OF ODD DEGREE, ORTHOGONAL TO POLYNOMIALS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 84–92

DOI: 10.17223/19988605/47/10

For the space of Hermitian splines of $2r$ + 1-st degree of a kind $\mathrm{S}^L(x)=\sum_{k=0}^{r} h^k \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,k}\,\mathrm{N}_{i,k}^L(x),\quad a\le x\le b,$ where the coefficients $C_i^{L,k}$, $k = 0, \ldots, r$, are values and corresponding derivatives of the approximated function in the knots of uniform net Δ^L: $u_i = a + (b - a)\, i / 2^L$, $i = 0, 1,\ldots, 2^L$, $L \ge 0$, and basic functions are $\mathrm{N}_{i,k}^L(u_j)=\delta_i^j\delta_k^l, l=0,1,\ldots,r$, with the centers in integers, it is offered to use as wavelets the functions $\mathrm{M}^L_{i,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r\ \forall i$, with the centers in odd integers, the linear combinations of basic Hermitian splines with the grid Δ^{L+1}, that are orthogonal to polynomials of $2r$ + 1-st order $\int_a^b \mathrm{M}_{i,k}^L(x)x^m dx=0,\ k=0,1,\ldots,r\forall i\ (m=0,1,\ldots,2r+1)$. If the corresponding spline-coefficients are collected in the vector, $C^L=\left[C_0^{L,0}, C_0^{L,1},\ldots, C_0^{L,r}, C_1^{L,0},\ldots, C_{2^L}^{L,r}\right]^{\mathrm{T}}$, and the corresponding wavelet-coefficients – in the vector, $D^L=\left[D_1^{L,0}, D_1^{L,1},\ldots, D_1^{L,r},\ldots, D_{2^L}^{L,r}\right]^{\mathrm{T}}$, then with use of designations for block matrices the formulas for evaluation of spline-coefficients C^{L-1} on the thinned grid Δ^{L-1} and wavelet-coefficients D^{L-1} in the form of the solution of sparse system of linear algebraic equations are proved:

$$[P^L \mid Q^L]\begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix} = C^L.$$

Here blocks of the matrix P^L are composed from coefficients of the scale relations for basic splines and blocks of the matrix Q^L are composed from coefficients of the decomposition for basic wavelets $\mathrm{M}^L_{i,k}(x)$. For the purpose of using of the rarefied structure of a matrix $[P^L \mid Q^L]$ there is offered to make it block tri-diagonal, having changed an order of unknowns so that blocks of matrixes P^L and Q^L been alternated, to be able to apply an algorithm of a block matrix sweeping to the solution of the received system. The problem of stability of algorithm of multiwavelets-transformation on big grids by means of observation of behavior of condition numbers in Euclidean norm of sweeping matrixes is investigated. The numerical example of approximation and compression of data for a case of Hermitian splines of the 7th degree is given.

Keywords: Hermitian splines; multiwavelets; orthogonal to polynomials.

SHUMILOV Boris Mikhailovich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: sbm05@yandex.ru

REFERENCES

1. Daubechies, I. (2001) *Desyat' lektsiy po veyvletam* [Ten lectures on wavelets]. Translated from English. Izhevsk: RKhD.
2. Chui, C.K. (2001) *Vvedenie v veyvlety* [An introduction to wavelets]. Translated from English. Moscow: Mir.
3. Novikov, I.Ya., Protasov, V.Yu. & Skopina, M.A. (2006) *Teoriya vspleskov* [Wavelet theory]. Moscow: Fizmat.
4. Strela, V. (1997) Multiwavelets: regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform. *Studies of Applied Mathematics*. 98(4). pp. 335–354.
5. Strela, V., Heller, P.N., Strang, G., Topivala, P. & Heil, C. (1999) The application of multiwavelet filterbanks to image processing. *IEEE Trans. Signal Processing*. 8(4). pp. 548–563. DOI: 10.1109/83.753742
6. Warming, R. & Beam, R. (2000) Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets. *SIAM J. Sci. Comp*. 22(1). pp. 269–317. DOI: 10.1137/S1064827597315236
7. Dahmen, W., Han, B., Jia, R.-Q. & Kunoth, A. (2000) Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines. *Constructive Approximation*. 16. pp. 221–259. DOI: 10.1007/s003659910010
8. Han, B. (2001) Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets. *Journal of Approximation Theory*. 110. pp. 18–53. DOI: 10.1006/jath.2000.3545
9. Koro, K. & Abe, K. (2001) Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 25. pp. 149–164. DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00036-4
10. Han, B., Kwon, S.-G. & Park, S.S. (2006) Riesz multiwavelet bases. *Appl. Comput. Harmon. Anal*. 20. pp. 161–183. DOI: 10.1016/j.acha.2005.10.002
11. Zavyalov, Yu.S., Kvasov, B.I. & Miroshnichenko, V.L. (1980) *Metody splayn-funktsiy* [Spline function methods]. Moscow: Nauka.
12. Shumilov, B.M. (2013) Multiwavelets of the third-degree hermitian splines orthogonal to cubic polynomials. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 5(6). pp. 17–28. DOI: 10.1134/S2070048213060100
13. Strang, G. & Strela, V. (1995) Short wavelets and matrix dilation equations. *IEEE Trans. Signal Processing*. 43(1). pp. 108–115. DOI: 10.1109/78.365291.
14. Stollnitz, E.J., DeRose, T.D. & Salesin, D.H. (2002) *Veyvlety v komp'yuternoy grafike* [Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications]. Translated from English. Izhevsk : Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika.
15. Shumilov, B.M. (2015) Matrix sweep algorithm for computing multiwavelets of odd order orthogonal to polynomials. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 51(2). pp. 174–183. DOI: 10.3103/S8756699015020119
16. Samarsky, A.A. & Nikolaev, E.S. (1978) *Metody resheniya setochnykh uravneniy* [Methods of solving grid equations]. Moscow: Nauka.
17. Vasilieva, E.A. (2011) Dostatochnye usloviya korrektnosti metoda matrichnoy progonki [Ample conditions of existence of the complete block decomposition]. *Izvestiya KGTU*. 20. pp. 103–108.
18. Schneider, A. (2006) Biorthogonal cubic Hermite spline multiwavelets on the interval with complementary boundary conditions. *Results in Mathematics*. 53(3). pp. 407–416. DOI: 10.1007/s00025-008-0352-y
19. Černá, D. & Finěk, V. (2011) Construction of optimally conditioned cubic spline wavelets on the interval. *Advances in Computational Mathematics*. 34. pp. 519–552. DOI: 10.1007/s10444-010-9152-5

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.75
DOI: 10.17223/19988605/47/11

Е.Н. Перышкова, М.Г. Курносов

УЧЕТ КОНКУРЕНТНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ КАНАЛОВ СВЯЗИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПОДСИСТЕМ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КЛАСТЕРАХ НА БАЗЕ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ УЗЛОВ

Работа выполнена в рамках государственного задания № 0306-2019-0019, а также при частичной финансовой поддержке фонда РФФИ, грант № 18-07-00624.

Выполнена реализация тестовых программ для оценки времени передачи сообщений при разделении каналов связи на уровне стандарта MPI. Проведен экспериментальный анализ падения производительности коммуникационной сети при образовании очередей передачи сообщений для вычислительных систем с SMP/NUMA-архитектурой вычислительных узлов. Разработана система прогнозирования времени выполнения операции All-to-all на заданной подсистеме процессорных ядер при одновременном использовании канала связи множеством процессов.

Ключевые слова: параллельное мультипрограммирование; организация функционирования; вычислительные системы.

Одним из важнейших архитектурных свойств современных вычислительных систем (ВС) с распределенной памятью является глубокая иерархия средств доступа к оперативной памяти процессорных ядер. Коммуникационные сети большинства высокопроизводительных систем списка Top500 имеют как минимум двухуровневую организацию. Первый уровень – коммуникационная сеть связи между элементарными машинами (ЭМ, вычислительными узлами): Cray Gemini, IBM PERCS, Fujitsu Tofu, Gigabit Ethernet, InfiniBand [1–3]; второй уровень – оперативная память, разделяемая процессорными ядрами одной ЭМ. Если принять во внимание использование коммуникационных сетей на базе составных коммутаторов (например, топология fat tree) [4], а также наличие внутрисистемных шин для объединения процессоров в ЭМ с архитектурой NUMA, то количество уровней в иерархической структуре увеличивается. В частности, в системе Sunway TaihuLight пять уровней в коммуникационной среде: оперативная память ядра – Network on Chip – Sunway network – Supernode network – Switch network. Основное назначение коммуникационной сети – реализация передачи сообщений между процессами параллельных программ. На протяжении последних 20 лет доминирующее положение среди средств разработки параллельных программ занимают стандарт MPI и библиотеки, реализующие его (MPICH, MVAPICH, Open MPI).

Топологии коммуникационных сетей, используемых в ВС, по технико-экономическим причинам не являются полносвязными, поэтому при реализации параллельными программами глобальных схем информационных обменов возникает одновременное совместное использование некоторых каналов связи (network contention) [5]. Следствием этого является образование очередей передачи сообщений в библиотеках стандарта MPI, сетевых адаптерах, коммутаторах и падение производительности коммуникационной сети [6]. В данной работе выполнена реализация тестовых программ для оценки времени передачи сообщений при разделении каналов связи на уровне стандарта MPI. Проведен экспериментальный анализ падения производительности коммуникационной сети при образовании очередей передачи сообщений для вычислительных систем с SMP/NUMA-архитектурой вычис-

лительных узлов. Рассмотрено три уровня коммуникационной среды: оперативная память одной ЭМ; внутрисистемная шина, объединяющая процессоры в ЭМ с архитектурой NUMA; сеть связи между ЭМ (InfiniBand и Gigabit Ethernet).

Множество используемых при передаче сообщений между параллельными процессами MPI-программ каналов связи определяется начальным распределением процессов по процессорным ядрам ЭМ системы. Например, на рис. 1, *a* показан пример взаимодействия MPI-процессов, размещенных на двух ядрах одного процессора SMP-узла. В этом случае обмен осуществляется через оперативную память узла. В аналогичной ситуации для NUMA-узлов два процесса выполняют обмен через оперативную память NUMA-узла, на ядрах процессора которого они выполняются. При взаимодействии ядер, размещенных на разных процессорах NUMA-узла, сообщения передаются через внутрисистемную шину, например Intel QuickPath Interconnect (QPI), как показано на рис. 1, *b*. Если взаимодействующие ядра размещены на процессорах, находящихся на разных ЭМ, обмен осуществляется через сетевой адаптер.

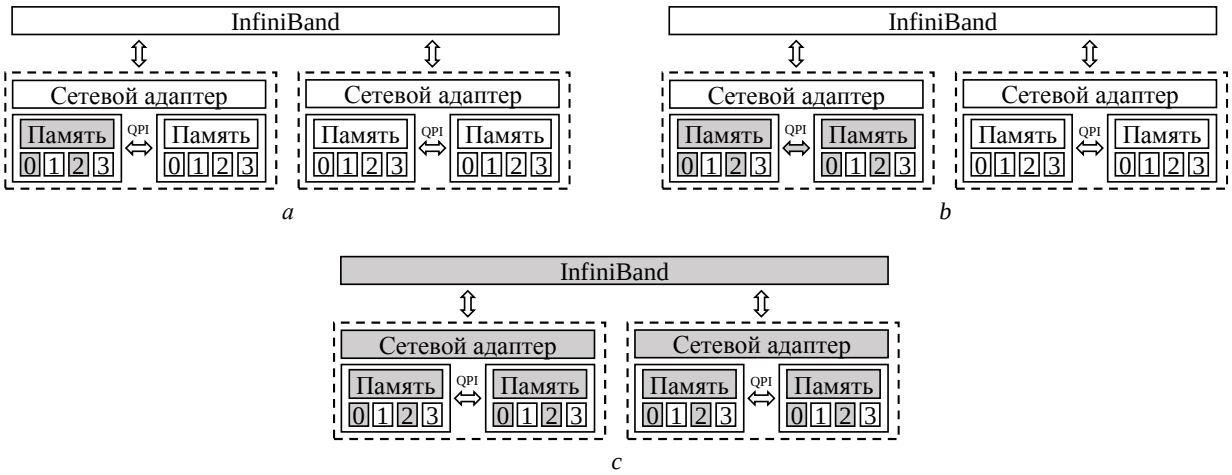


Рис. 1. Возникновение конкуренции за разделяемые ресурсы:
a – контроллер памяти; *b* – шина Intel QPI; *c* – сетевой адаптер
Fig. 1. Shared resources:
a – memory controller; *b* – Intel QPI bus; *c* – network adapter

В системах управления ресурсами ВС возникает задача формирования подсистемы из p процессорных ядер. В ВС на базе многопроцессорных узлов данная задача имеет множество решений. Например, симметричная подсистема ранга 8 может быть сформирована тремя способами: 1 вычислительный узел с 8 процессорными ядрами (1×8), два узла по 4 ядра (2×4) и четыре узла по 2 ядра (4×2). Время выполнения глобальных коммуникационных операций на этих подсистемах будет различным. Поэтому практический интерес представляет разработка алгоритмов формирования подсистем ЭМ, учитывающих структуру информационных обменов целевой программы. Для операции All-to-all выполнено экспериментальное исследование влияние конфигурации подсистемы ЭМ на время выполнения операции. Выбор операции All-to-all обусловлен ее широким распространением в пакетах суперкомпьютерного моделирования. Разработана тестовая программа для оценки времени выполнения коллективной операции All-to-all при различных начальных распределениях процессов по процессорным ядрам ЭМ. Проведено исследование зависимости времени выполнения операции All-to-all от размера передаваемых сообщений и количества процессов, одновременно разделяющих канал связи. Разработана система прогнозирования времени выполнения операции All-to-all на заданной подсистеме ЭМ по результатам предварительной экспериментальной оценки падения производительности операций MPI_Send/Recv при одновременном использовании канала связи множеством процессов. Полученные результаты будут использованы для разработки структурно-ориентированных алгоритмов формирования подсистем ЭМ.

1. Конкурентное использование каналов связи при реализации MPI-программ

Наиболее распространенные типы ЭМ современных высокопроизводительных ВС представлены на рис. 2.

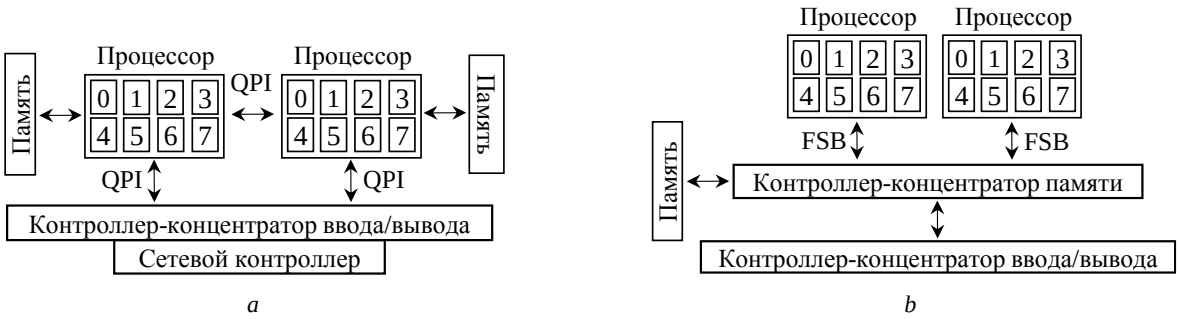


Рис. 2. Типы элементарных машин современных высокопроизводительных ВС:
a – NUMA-узел: два 8-ядерных процессора; *b* – SMP-узел: два 8-ядерных процессора
Fig. 2. Types of architectures computer nodes:
a – NUMA architecture: two 8 cores processers; *b* – SMP architecture: two 8 cores processers

На рис. 2, *a* изображена техническая реализация ЭМ NUMA-узла, включающая два 8-ядерных процессора Intel, объединенных шиной Intel QuickPath Interconnect (QPI). На рис. 2, *b* представлен пример технической реализации ЭМ SMP-узла, состоящей из двух 8-ядерных процессоров Intel, объединенных системной шиной Intel Front Side Bus (FSB). Можно выделить три уровня коммуникационной среды, на которых возникает одновременное совместное использование каналов связи: контроллер памяти, внутрисистемная шина, объединяющая процессоры в ЭМ с архитектурой NUMA, и сетевой контроллер.

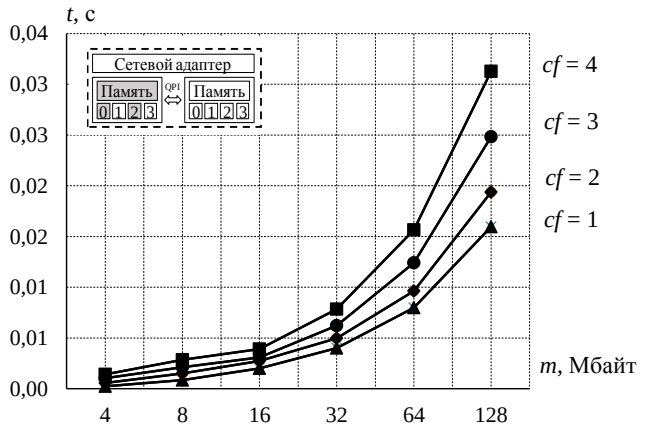
Для определения влияния конкуренции за сетевые ресурсы на время выполнения информационных обменов разработана тестовая MPI-программа, реализующая вызов каждым процессом операции MPI_Recv и MPI_Send. Ниже приведен его псевдокод. Время выполнения операции обмена оценивается путем измерения среднего времени *n* выполнений операций MPI_Recv и MPI_Send в цикле. На каждой итерации цикла реализуется ожидание завершения обменов всех ветвей параллельной программы. За время *t* выполнения информационного обмена принимается среднее время одного запуска.

```
function Benchmark(sbuf, rbuf, size, nruns)
   Irecv(rbuf, size, reqarray[0])              /* Инициализация */
   Isend(sbuf, size, reqarray[1])
   Waitall(2, reqarray)
   for i = 1 to nruns do
      t -= wtime()
      Irecv(rbuf, size, reqarray[0])
      Isend(sbuf, size, reqarray[1])
      Waitall(2, reqarray)
      t += wtime()
   end for
   t = t / (2 * nruns)
end function
```

Экспериментальная часть работы выполнена на вычислительных кластерах с NUMA/SMP-узлами. Кластер с NUMA-узлами укомплектован 6 вычислительными серверами на базе платформы Intel S5520UR. На каждом узле размещено два процессора Intel Xeon E5620, оперативная память – 24 Гбайт (DDR3), сетевой адаптер InfiniBand QDR Mellanox MT26428. Кластер с SMP-узлами уком-

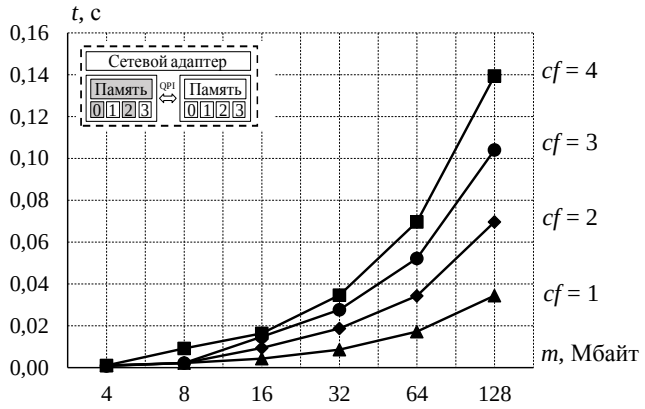
плектован 18 вычислительными серверами на базе платформы Intel SR2520SAF. На каждом узле размещено два процессора Intel Xeon E5420, оперативная память – 8 Гбайт (DDR2), сетевой адаптер Gigabit Ethernet Intel PRO/1000 EB. Вычислительные кластера функционируют под управлением операционной системы (ОС) GNU/Linux. При компиляции MPI-программы использовались коммуникационные библиотеки MPICH 3.2.1 и MVAPICH2 2.2.

Тестовая программа запускалась с разным количеством процессов для передачи информационных сообщений размером *m* Мбайт. Каждый процесс привязывался к выделенному процессорному ядру при помощи подсистемы numactl. На рис. 3–5 показаны зависимости *t*(*m*, *cf*) времени передачи сообщения размером *m* байт от количества *cf* (contention factor) процессов, одновременно разделяющих общий канал связи. В экспериментах рассматривалось три уровня коммуникационной среды: оперативная память NUMA/SMP узлов (рис. 3, *a*, *b*), внутрисистемная шина Intel QPI, объединяющая процессоры NUMA-узлов (рис. 4) и сеть связи между ЭМ (адаптеры InfiniBand QDR на рис. 5, *a* и Gigabit Ethernet на рис. 5, *b*).



m, Мбайт	Коэффициент падения производительности *t*(*m*, *cf*)/*t*(*m*, 1)			
	cf = 1	*cf* = 2	*cf* = 3	*cf* = 4
128	1	1,21	1,55	1,96
64	1	1,20	1,55	1,96
32	1	1,25	1,56	1,96
16	1	1,36	1,55	1,95
8	1	1,75	2,47	3,31
4	1	2,48	4,42	6,05

a



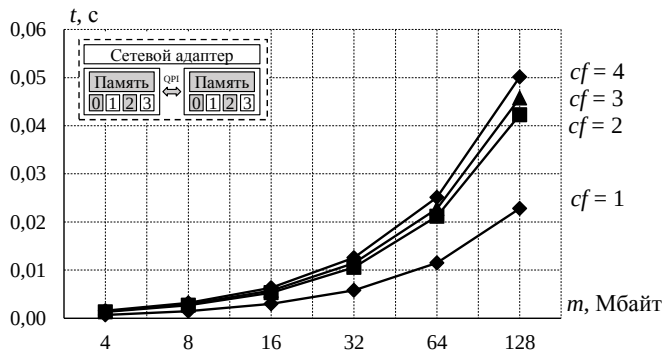
m, Мбайт	Коэффициент падения производительности *t*(*m*, *cf*)/*t*(*m*, 1)			
	cf = 1	*cf* = 2	*cf* = 3	*cf* = 4
128	1	2,03	3,03	4,06
64	1	2,00	3,04	4,06
32	1	2,17	3,23	4,03
16	1	2,17	3,43	3,80
8	1	1,01	1,01	4,27
4	1	0,86	0,82	0,96

b

Рис. 3. Измерение времени *t* передачи сообщения *m* и количества *cf* процессов MPI-программы, разделяющих общий канал связи: *a* – контроллер памяти NUMA-узла; *b* – контроллер памяти SMP-узла

Fig. 3. Measured transmission time of *m*-byte message and the number *cf* of processes sharing the common communication channel: *a* – NUMA node memory controller; *b* – SMP memory controller

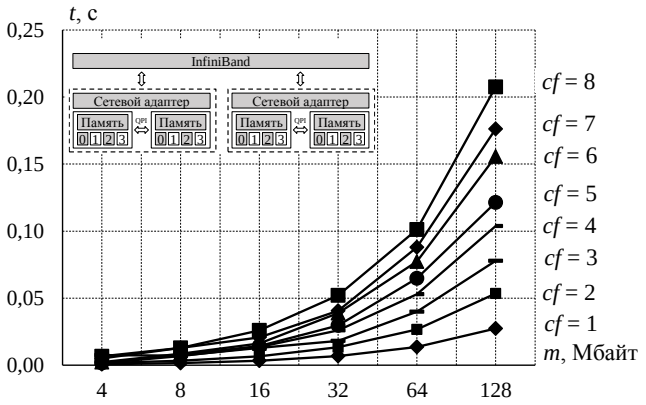
В таблицах серым фоном отмечены установленные комбинации размеров сообщений и числа процессов *cf*, при которых наблюдается резкое падение производительности канала связи (более *cf* раз). Такие значения *m* и *cf* могут быть использованы для определения оптимального числа процессов, запускаемых на одном вычислительном узле ВС при формировании подсистем ЭМ с учетом структуры информационных обменов целевой программы.



m, Мбайт	Коэффициент падения производительности $t(m, cf)/t(m, 1)$			
	cf = 1	*cf* = 2	*cf* = 3	*cf* = 4
128	1	1,85	2,01	2,20
64	1	1,85	1,98	2,19
32	1	1,82	1,97	2,16
16	1	1,78	1,91	2,12
8	1	1,83	1,96	2,16
4	1	1,99	2,09	2,38

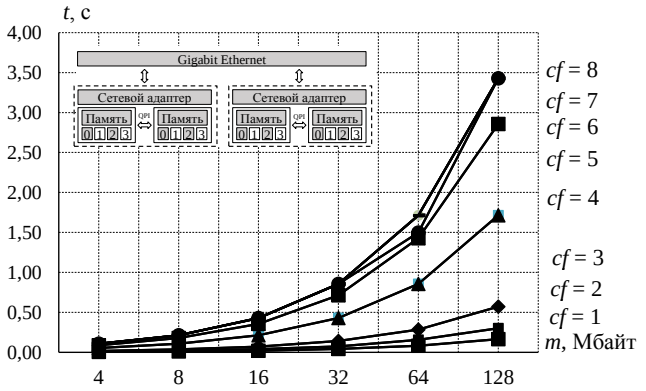
Рис. 4. Измерение времени *t* передачи сообщения *m* и количества *cf* процессов MPI-программы, разделяющих внутрисистемную шину Intel QPI

Fig. 4. Measured transmission time of *m*-byte message and the number *cf* of processes sharing the processor interconnect Intel QPI in NUMA node



m, Мбайт	Коэффициент падения производительности $t(m, cf)/t(m, 1)$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
128	1	2,0	2,8	3,8	4,4	5,7	6,4	7,6
64	1	2,0	2,9	3,9	4,8	5,7	6,5	7,4
32	1	2,0	2,7	3,8	4,4	5,7	6,0	7,7
16	1	2,0	3,8	4,0	4,2	4,8	6,1	7,6
8	1	2,0	4,3	4,1	4,7	5,0	7,6	7,6
4	1	2,1	9,8	2,2	2,1	3,0	6,5	8,5

a



m, Мбайт	Коэффициент падения производительности $t(m, cf)/t(m, 1)$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
128	1	0,3	3,0	0,5	5,0	6,0	6,0	6,0
64	1	0,3	3,0	0,5	5,0	5,2	6,0	6,0
32	1	0,3	3,0	0,5	5,0	6,0	6,0	6,0
16	1	0,3	3,0	0,6	5,0	6,0	6,0	6,0
8	1	0,3	3,0	0,6	5,0	6,0	6,0	5,9
4	1	0,3	3,0	0,5	4,9	5,9	5,9	5,9

b

Рис. 5. Измерение времени *t* передачи сообщения *m* и количества *cf* процессов MPI-программы, разделяющих общий канал связи: *a* – сетевой контроллер InfiniBand; *b* – сетевой контроллер Gigabit Ethernet

Fig. 5. Measured transmission time of *m*-byte message and the number *cf* of processes sharing the common communication channel: *a* – InfiniBand QDR; *b* – Gigabit Ethernet

2. Формирование подсистемы ЭМ с учетом деградации каналов связи

В системах управления ресурсами ВС возникает задача формирования подсистемы из *p* процессорных ядер. В ВС на базе многопроцессорных узлов данная задача имеет множество решений. Известные системы управления ресурсами IBM LoadLeveler, Altair PBS Pro, SLURM, TORQUE используют различные модели и методы управления очередями задачи и формирования подсистем

ВУ [7]. Широко используются методы приоритетного обслуживания задач, алгоритмы внеочередного выполнения задач (backfiling), приоритетное обслуживание с вытеснением задач (job preemption). Рассмотрим несколько эвристических алгоритмов формирования подсистем ЭМ: формирование подсистемы из минимального числа ЭМ («жадный» алгоритм), формирование подсистемы из максимально возможного числа ЭМ. Время выполнения глобальных коммуникационных операций на сформированных подсистемах будет различным. Существующие СУР не учитывают возможного падения производительности сетевой подсистемы при одновременном использовании ее компонентов параллельными процессами, поэтому практический интерес представляет разработка алгоритмов формирования подсистем ЭМ, учитывающих структуру информационных обменов целевой программы.

Авторами разработана система прогнозирования времени выполнения коллективной операции All-to-all на заданной подсистеме ЭМ. Функциональная структура системы прогнозирования представлена на рис. 6.

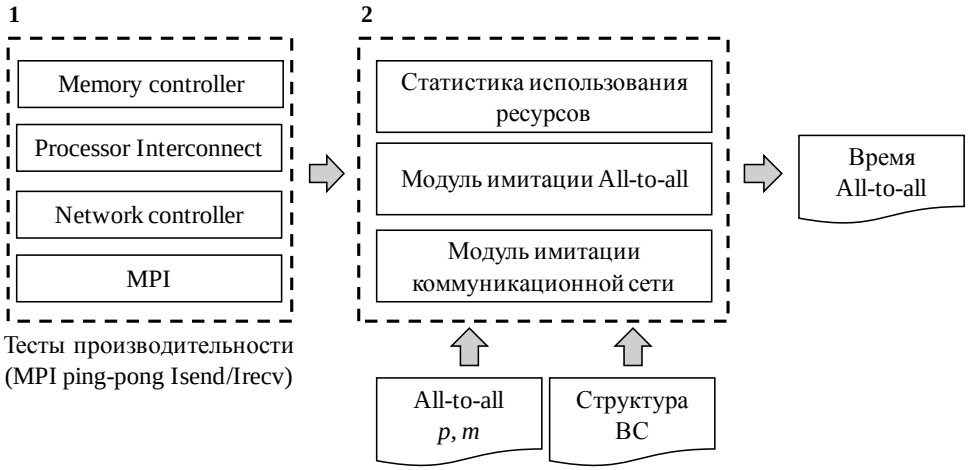


Рис. 6. Функциональная структура системы прогнозирования
Fig. 6. Prediction system

Модуль 1 служит для тестирования производительности подсистемы ЭМ при различном количестве одновременных взаимодействий по каналу связи. Модуль реализован в виде параллельной программы в стандарте MPI и основан на обменах с использованием операций MPI_Send и MPI_Recv. В состав модуля 1 входит подсистема запуска тестов с различным уровнем *cf* одновременного использования заданного канал связи. Результатом работы модуля являются таблицы с оценкой времени передачи сообщений для различных значения *cf* и размеров *m* сообщений. Построенные таблицы в дальнейшем используются для динамического построения оценок времени реализации алгоритмов.

Модуль 2 состоит из трех блоков: модуль сбора статистики одновременного использования ресурсов, модуль имитации блочного алгоритма All-to-all и модуль имитации иерархической коммуникационной сети. Модуль сбора статистики предназначен для подсчета числа *cf* одновременных использований каналов связи при реализации одного шага конкретного алгоритма (шаблона) информационных обменов параллельной программы (например, All-to-all, One-to-all, All-to-one). В текущей версии реализован модуль имитации блочного алгоритма коллективной операции All-to-all, которая наиболее часто встречается в параллельных программах, требовательных к производительности коммуникационной сети, например в MPI-реализациях алгоритмов на графах (Graph500), реализациях быстрого преобразования Фурье (HPCC FFT) и методах параллельного решения из первых принципов (ab initio) задач квантовой химии (Quantum Espresso). Ниже приведен его псевдокод. Каждый процесс выполняет *p* операций передачи и приема сообщений, где *p* – число процессов в программе. При этом операции send/recv группируются в блоки из *block* коммуникационных операций для сокращения накладных расходов. Входными параметрами модуля являются размер *m* передаваемого сообщения и требуемое количество *p* процессов.

```
function AllToAll(sbuf, scount, rbuf, rcount, block)
   for ii = 0 to p do
      ss = block
      if p - ii < block then
          ss = p - ii
      for i = 0 to ss do
         dst = (rank + i + ii) % p
         Irecv(rbuf + dst * rcount, rcount, dst, reqarray[i])
      end for
      for i = 0 to ss do
         dst = (rank - i - ii + p) % p
         Isend(sbuf + dst * scount, scount, dst, reqarray[i + ss])
      end for
      Waitall(2 * ss, reqarray)                  /* Запуск 2 * ss  опе-
раций */
      ii = ii + block
   end for
end function
```

Модуль имитации иерархической коммуникационной среды логически реализует коммуникационные уровни ВС, задает нумерацию ЭМ и распределение процессов программы по ним (cpu affinity). Результатом работы системы моделирования является оценка времени выполнения коллективной операции All-to-all на заданной конфигурации подсистемы ЭМ. После получения оценки времени выполнения коллективной операции All-to-all для различных конфигураций подсистем ЭМ одного ранга устанавливается отношение порядка выбора подсистемы ЭМ исходя из минимума времени реализации информационных обменов. Система моделирования может быть дополнена шаблонами информационных обменов параллельной программы в стандарте MPI. В таблице представлены результаты работы системы моделирования и время выполнения операции All-to-all в зависимости от выбора подсистемы ВС. Размер передаваемого сообщения равен 1 Мбайт.

Время выполнения операции All-to-all (MVAPICH, InfiniBand QDR)
и оценка времени системой прогнозирования

Ранг подсистемы	**Время выполнения операции All-to-all, с**		
2	**1 ВУ, 2 ядра**	**2 ВУ, 1 ядро**	
Прогноз (с)	0,00016	0,00033	
Экспериментальный запуск (с)	0,00044	0,00061	
Установленный порядок	1	2	
4	**1 ВУ, 4 ядра**	**2 ВУ, 2 ядра**	**4 ВУ, 1 ядро**
Прогноз (с)	0,0019	0,0021	0,0018
Экспериментальный запуск (с)	0,0031	0,0036	0,0029
Установленный порядок	2	3	1
8	**1 ВУ, 8 ядер**	**2 ВУ, 4 ядер**	**4 ВУ, 2 ядер**
Прогноз (с)	0,00384	0,19	0,0058
Экспериментальный запуск (с)	0,00754	0,09	0,0076
Установленный порядок	1	3	2

Заметим, что система моделирования не дает точного совпадения времени с результатами выполнения All-to-all на реальной ВС. Последнее обусловлено простотой модели и наличием асинхронных событий в ЭМ ВС. Важно отметить, что точного совпадения не требуется, основная задача – установить отношение порядка на множестве подсистем одного ранга. Из таблицы видно, что для рассмотренного примера данная задача решается успешно.

Заключение

В данной работе выполнена реализация тестовых программ для оценки времени передачи сообщений при разделении каналов связи на уровне стандарта MPI. Проведен экспериментальный анализ падения производительности коммуникационной сети при образовании очередей передачи сообщений для вычислительных систем с SMP/NUMA-архитектурой вычислительных узлов. Рассмотрено три уровня коммуникационной среды: оперативная память одной ЭМ, внутрисистемная шина, объединяющая процессоры в ЭМ с архитектурой NUMA, сеть связи между ЭМ (InfiniBand и Gigabit Ethernet).

Разработана система прогнозирования времени выполнения операции All-to-all на заданной подсистеме ЭМ по результатам предварительной экспериментальной оценки падения производительности операций MPI_Send / MPI_Recv при одновременном использовании канала связи множеством процессов. Полученные результаты будут использованы для разработки структурно-ориентированных алгоритмов формирования подсистем ЭМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alverson R., Roweth D., Kaplan L. The Gemini System Interconnect // Proc. 18th IEEE Symposium on High Performance Interconnects. Washington, DC : IEEE Press, 2010. P. 83–87.
2. Chen D., Eisley N.A., Heidelberger P., Senger R. et al. The IBM Blue Gene/Q interconnection network and message unit // Proc. 2011 International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis. New York : ACM Press, 2011. DOI: 10.1145/2063384.2063419.
3. Ajima Y., Inoue T., Hiramoto S., Shimizu T., Takagi Y. The tofu interconnect // IEEE Micro 32(1). 2012. P. 21–31.
4. Корнеев В.В. Вычислительные системы. М. : Гелиос АРВ, 2004. 512 с.
5. Prisacari B., Rodriguez G., Minkenberg C., Hoefler T. Bandwidth-optimal all-to-all exchanges in fat tree networks // Proc. 27th international ACM conference on International conference on supercomputing, June 10–14, Eugene, Oregon,. USA. 2013.
6. Steffenel L.A. Modeling network contention effects on all-to-all operations. IEEE Press, 2006.
7. Hovestadt M., Kao O., Keller A., Streit A. Scheduling in HPC resource management systems: Queuing vs. Planning // Proc. 9th Workshop on Job Scheduling Strategies for Parallel Processing (JSSPP), LNCS #2862, 2003. P. 1–20.

Поступила в редакцию 10 мая 2018 г.

Peryshkova E.N., Kurnosov M.G. (2018) MODELING NETWORK CONTENTION EFFECTS ON PROCESS ALLOCATION IN COMPUTER SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 93–101

DOI: 10.17223/19988605/47/11

Interconnection networks of modern high-performance distributed computer systems have at least a two-level hierarchical organization. The first level of the communication network is formed by the switch-based network (InfiniBand, Ethernet). The second level is represented by a shared memory of SMP/NUMA-computer nodes. In such systems a communication time between processors depends on their replacement in the system.

In this paper, we present a benchmark for estimating the message passing time when MPI-processes share the communication channels. We analyze the degradation of the communication network performance when message passing queues are formed for computer systems with NUMA/SMP computer nodes. We consider three levels of communication environment: shared memory of a computer node, processor interconnect in NUMA nodes, network interconnect between nodes (InfiniBand and Gigabit Ethernet).

The Resource and Jobs Management Systems (RJMS) form a subsystem of *p* processor cores. If computer systems consist of multiprocessor nodes, this problem has many solutions. For example, a symmetric set of nodes that has the rank equal to eight can be formed in three ways: one computational node with eight processor cores (1x8), two nodes with four cores (2x4) and four nodes with two cores (4x2). A completion time of collective communication operations on these subsystems will be different. Therefore, the development of algorithms that determine nodes allocation taking into account a message passing structure of the target program has practical interest.

Authors have developed a software for predicting the execution time of the All-to-all operation on the given subsystem of nodes. A software uses the results of an experimental estimate of the performance degradation for the MPI_Send/MPI_Recv operations during simultaneous use of the communication channel by a set of processes.

Keywords: collective communications; network contention; computer clusters.

PERYSHKOVA Eugene Nikolaevna (Senior teacher, Siberian State University of Telecommunications and Information; Engineer, Rzhanov Institute of Semiconductor Physics of SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation).
E-mail: e.peryshkova@gmail.com

KURNOSOV Mikhail Georgievich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences; Senior Research Scientist, Rzhanov Institute of Semiconductor Physics of SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation).
E-mail: mkurnosov@gmail.com

REFERENCES

1. Alverson, R., Roweth, D. & Kaplan, L. (2010) The gemini system interconnect. *Proc. 18th IEEE Symposium on High Performance Interconnects.* Washington, DC: IEEE Press. pp. 83–87. DOI: 10.1109/HOTI.2010.23
2. Chen, D., Eisley, N.A., Heidelberger, P., Senger, R. et al. (2011) The IBM Blue Gene/Q interconnection network and message unit. *Proc. 2011 International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*. New York: ACM Press. pp. 1–2. DOI 10.1145/2063384.2063419
3. Ajima, Y., Inoue, T., Hiramoto, S., Shimizu, T. & Takagi, Y. (2012) The tofu interconnect. *IEEE Micro 32(1)*. pp. 21–31. DOI: 10.1109/MM.2011.98
4. Korneev, V. (2004) *Vychislitel'nye sistemy* [Computer systems]. Moscow: Gelios ARB.
5. Prisacari, B., Rodriguez, G., Minkenberg, C. & Hoefler, T. (2013) Bandwidth-optimal all-to-all exchanges in fat tree networks. *Proc. 27th international ACM conference on International conference on supercomputing*. New York: ACM Press. pp. 139–148. DOI: 10.1145/2464996.2465434
6. Luiz, A.S. (2006) Modeling network contention effects on all-to-all operations. *IEEE Press.*
7. Hovestadt, M., Kao, O., Keller, A. & Streit, A. (2003) Scheduling in HPC resource management systems: Queuing vs. Planning. *Proc. 9th Workshop on Job Scheduling Strategies for Parallel Processing (JSSPP)*. pp. 1–20. DOI: 10.1007/10968987_1

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

УДК 519.7
DOI: 10.17223/19988605/47/12

С.А. Поттосина

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРАТЧАЙШЕМ ПОКРЫТИИ ПРИ ТЕСТИРОВАНИИ ПРОГРАММНОГО ПРОДУКТА

Рассматриваются две задачи тестирования программного продукта. Одна из них связана с нахождением минимального набора тестов при регрессионном тестировании функционала программы. Другая задача относится к нахождению минимального диагностического теста при классификации дефектов в программном продукте. Показано, как обе эти задачи сводятся к нахождению кратчайшего столбцового покрытия некоторой булевой матрицы.
Ключевые слова: регрессионное тестирование; задача о покрытии; дефекты программного продукта; диагностический тест; матрица различий.

Многие комбинаторные оптимизационные задачи сводятся к задаче о кратчайшем покрытии, которая ставится следующим образом. Пусть даны некоторое множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и совокупность его подмножеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$, т.е. $B_i \subseteq A$, $i = 1, 2, \ldots, m$, причем $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m = A$. Требуется среди данных подмножеств выделить такую совокупность $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_k}$ с минимальным k, чтобы каждый элемент из A попал хотя бы в одно из B_{i_j} ($j = 1, 2, \ldots, k$), т.е. $B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \ldots \cup B_{i_k} = A$.

Удобно рассматривать матричную формулировку данной задачи, при которой совокупность $B_1, B_2, \ldots, B_m$ задается в виде булевой матрицы, строки которой соответствуют подмножествам из данной совокупности, а столбцы – элементам множества A. Элемент i-й строки и j-го столбца имеет значение 1, если и только если $a_j \in B_i$. В этом случае говорят, что i-я строка покрывает j-й столбец. Требуется найти такое множество строк данной матрицы, чтобы каждый ее столбец имел единицу хотя бы в одной строке из этого множества, и при этом мощность выбранного множества должна быть минимальной. В такой интерпретации имеем дело с задачей поиска кратчайшего строчного покрытия булевой матрицы.

Задача о кратчайшем покрытии булевой матрицы нашла применение в теории графов, в теории логического проектирования дискретных устройств, при решении задач технической диагностики, в некоторых алгоритмах минимизации логических функций [1]. Встал вопрос, может ли успешно применяться данная задача при тестировании программного обеспечения.

Проблема качества программных продуктов (ПП) становится сегодня все более острой, особенно по мере расширения использования информационных технологий и роста сложности ПП, при работе большой команды разработчиков. Высокое качество продуктов дает разработчикам не только конкурентные преимущества и кредит доверия клиентов, но и облегчает сопровождение и развитие ПП. Одним из ключевых элементов обеспечения качества ПП является тестирование [2, 3]. Для тестирования ПП необходима разработка тестов. Разработчики ПП проводят тестирование своих продуктов в несколько этапов, которые отличаются видами выполняемых работ и привлекаемыми ресурсами. Фактически тестирование начинается еще в процессе кодирования очередной версии программы.

Затраты на тестирование вносят существенный вклад в общую стоимость сопровождения программы. Выборочный подход к регрессионному тестированию измененной программы требует исключения некоторых тестов из существующего набора, что приводит к уменьшению затрат. При проведении тестирования важно выбрать подмножество тестов минимальной мощности, обеспечивающее достижение целей регрессионного тестирования.

В научной литературе подчеркивается важность комплексного подхода [2, 3]. Под комплексным подходом к управлению качеством ПП имеется в виду необходимость поиска и устранения дефектов на каждом этапе жизненного цикла ПП [4]. Основными методами поиска дефектов являются отладка и тестирование. Методы поиска дефектов имеют различную эффективность и стоимость. Классификация дефектов по типам позволит отправлять их на устранение определенным разработчикам, что приведет к уменьшению затрат.

Для проведения регрессионного тестирования реальных проектов и устранения в них дефектов можно предложить две задачи, решение которых сводится к нахождению кратчайшего покрытия некоторой булевой матрицы. Одна из них связана с нахождением минимального набора тестов при регрессионном тестировании функционала программы. Вторая задача позволяет получить минимальный диагностический тест при классификации дефектов в программном продукте. Обе задачи решаются с помощью минимаксного алгоритма, одним из приближенных методов решения задачи о кратчайшем покрытии.

1. Задача о нахождении минимального набора тестов при регрессионном тестировании функционала программы

Регрессионное тестирование – это выборочное тестирование, позволяющее убедиться, что изменения не вызвали нежелательных побочных эффектов или что измененная система по-прежнему соответствует требованиям. После каждой модификации программы необходимо удостовериться, что на функциональность программы не оказал влияния модифицированный код. Регрессионное тестирование – дорогостоящий род деятельности: процесс регрессионного тестирования может включать исполнение достаточно большого количества тестов на скорректированной программе, даже если изменений очень мало. Несмотря на то, что усилия, требуемые для внесения небольших изменений, как правило, минимальны, они могут требовать достаточно больших усилий для проверки качества измененной программы. Тем не менее проведение регрессионного тестирования необходимо. Надежная и эффективная разработка и дальнейшее сопровождение программного обеспечения невозможны без регрессионного тестирования. Выполнить полное регрессивное тестирование вряд ли возможно. По мере роста и расширения становится все сложнее тестировать отдельные части системы программного обеспечения. Эта проблема усложняется из-за частоты создания сборок программ. Необходимо тестировать предыдущую функциональность, чтобы обеспечить возможность тестирования новых исправлений и новых функций.

В настоящее время выделяют следующие методы отбора тестов для регрессионного тестирования: случайные методы; безопасные методы; методы минимизации; методы, основанные на покрытии кода. Каждый из представленных методов имеет свои достоинства и недостатки [4].

Применение задачи о кратчайшем покрытии булевой матрицы для отбора тестов при проведения регрессионного тестирования безопасным выборочным методом позволяет сократить временные затраты на проведение регрессионного тестирования без потери качества программного продукта.

В качестве булевой матрицы выступает матрица R, строки которой соответствуют тестируемым функционалам программы, а столбцы соответствуют тестам, предназначенным для этого. Элемент матрицы r_{ij} равен 1, если для тестирования функционала f_i пригоден тест t_j, иначе элемент $r_{ij.}$ матрицы R равен 0.

В качестве примера рассмотрен реальный проект «Сайт-платформа сравнения цен на услуги по страхованию автомобиля». Для этого выделены 17 ключевых элементов системы (тестируемый функционал), безотказная работа которых была критична для данного приложения. К ним относятся:
a – вход на сайт; b – выход; c – регистрация; d – идентифицированный пользователь; e – пользователь-студент; f – работающий пользователь; g – безработный пользователь; h – пользователь с дополнительным водителем; i – анонимный пользователь; k – пользователь с истекшим временем покупки; m – проверка уведомлений об ошибке; n – пользователь, вернувшийся на сайт после 11 месяцев;

o – активный пользователь; *p* – пользователь с дополнительной работой; *r* – индивидуальный предприниматель; *s* – страница с результатами покупки; *t* – рассылка информации на почту.

Далее был создан тестовый набор регрессионного тестирования, который содержал проверки заявленной функциональности (14 тестов): 1 – «приходящий через 11 месяцев»; 2 – анонимный посетитель; 3 – дополнительный водитель; 4 – базовый тест; 5 – граничный тест; 6 – редактирование; 7 – пользовательский отчет; 8 – встроенный вход; 9 – навигация по сайту; 10 – сброс пароля; 11 – страница с результатами; 12 – повторный покупатель; 13 – проверка ошибок, 14 – рассылка на почту.

Затем была построена диагностическая матрица (таблица). Строки матрицы соответствуют функциональным модулям программы, а столбцы – тестам. Элемент матрицы С на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца имеет значение 1, если для тестирования *i*-го модуля необходим *j*-й тест. В противном случае элемент матрицы равен 0. Далее к данной матрице был применен алгоритм поиска кратчайшего столбцового покрытия. Результаты оказались достаточно успешными: удалось сократить тестовый набор на 14,3% без потери процента покрытия функциональных возможностей программы. Два теста, а именно тесты с номерами 3 и 4, оказались излишними.

Диагностическая матрица

Функционал	Тесты													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
c			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
d							1	1		1	1	1	1	1
e				1		1			1		1			
f			1				1		1		1			
g					1	1								1
h			1			1		1		1		1		
i		1												
k							1							
m														1
n	1													
o			1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1
p	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1
r		1					1							
s						1			1		1	1		
t														1

Аналогично данный метод был применен для другого проекта – «Сайта страхования недвижимости». По реализуемой задаче оба приложения похожи и имеют небольшое количество отличительных черт. Поэтому и тестовый набор во многом одинаков. Во втором случае удалось добиться уменьшения первоначального тестового набора на 21,4%.

2. Задача о нахождении минимального диагностического теста при классификации дефектов в программном продукте

Автоматизированное тестирование подразумевает под собой разработку и использование специального программного обеспечения для запуска и контроля выполнения тестовых сценариев и сравнения реальных и запланированных результатов согласно спецификации. При организации автоматизации тестирования больших проектов, когда необходимо разделение специалистов по тестированию на определенные группы, появляется задача о классификации дефектов.

Опишем распределение ролей в достаточно крупной команде специалистов, занимающихся автоматизацией тестирования. Сама по себе автоматизация крайне редко применяется на краткосрочных или часто изменяющихся проектах, что связано с постоянно растущими затратами на поддержку и написание автоматических тестов. Проект с применением автоматизации имеет большое количе-

ство вариантов использования. Это можем быть работа, связанная с тестированием интерфейсов (внешнего отображения), сервисов, производительности и нагрузки, стрессовым тестированием, тестированием взаимодействия с внешними приложениями по отношению к данному и т.д. Само собой разумеется, что и за дефекты, возникающие в процессе тестирования и работы приложения, будут отвечать специалисты, занимающиеся поддержкой данной деятельности на проекте и являющиеся в ней наиболее квалифицированными. Работа многих систем отслеживания и устранения дефектов организована при помощи данных классификаций дефекта [5].

Используется следующая классификация дефектов с точки зрения степени влияния (Severity) на работоспособность программы:

– блокирующий (Blocker). Блокирующая ошибка, приводящая приложение в нерабочее состояние, в результате чего дальнейшая работа с тестируемой системой или ее ключевыми функциями становится невозможной. Решение проблемы необходимо для дальнейшего функционирования системы;

– критический (Critical). Критическая ошибка, неправильно работающая ключевая бизнес-логика, дыра в системе безопасности, проблема, приведшая к временному падению сервера или приводящая в нерабочее состояние некоторую часть системы, без возможности решения проблемы, используя другие входные точки. Решение проблемы необходимо для дальнейшей работы с ключевыми функциями тестируемой системой;

– значительный (Major). Значительная ошибка, часть основной бизнес-логики работает некорректно. Ошибка не критична или есть возможность для работы с тестируемой функцией, используя другие входные точки;

– незначительный (Minor). Незначительная ошибка, не нарушающая бизнес-логику тестируемой части приложения, очевидная проблема пользовательского интерфейса;

– тривиальный (Trivial). Тривиальная ошибка, не касающаяся бизнес-логики приложения, плохо воспроизводимая проблема, малозаметная посредствам пользовательского интерфейса, проблема сторонних библиотек или сервисов, проблема, не оказывающая никакого влияния на общее качество продукта.

Градация дефектов с точки зрения приоритетности исправления (Priority):

– высокий (High): ошибка должна быть исправлена как можно быстрее, так как ее наличие является критической для проекта;

– средний (Medium): ошибка должна быть исправлена, ее наличие не является критичной, но требует обязательного решения;

– низкий (Low): ошибка должна быть исправлена, ее наличие не является критичной и не требует срочного решения.

В зависимости от того, какой методологии придерживаются на проекте, распределение зарегистрированных дефектов между специалистами может быть различным. Однако на данный момент одним из наиболее распространенных и приоритетных способов является наличие одной общей «доски с дефектами», куда помещаются все найденные дефекты. Далее специалист по автоматизации открывает «доску» и смотрит на список дефектов, расположенных там. Разумеется, сложно с первого взгляда определить, к какому типу относится дефект и какому специалисту лучше поручить работу над ним. Поэтому на процесс анализа, классификации и дальнейшего устранения дефектов тратится достаточно большой объем времени. В подобных условиях применение автоматизированной классификации дефектов является не только рациональным, но желательным для организации эффективной деятельности команды. Это позволит уменьшить время простоев, которые неминуемо возникают в случае ошибочной передачи дефекта. Задача о нахождении минимального диагностического теста, предложенная в [1], может оказаться весьма полезной.

Рассмотрим множества $D = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Множество D является множеством возможных дефектов, множество B – множеством внешних признаков (симптомов), которые возникают вследствие обнаружения дефекта. Симптом – свойство дефекта, позволяющее классифицировать дефекты по их типичному проявлению. Строится булева диагностическая матрица $\boldsymbol{C}$, которая показывает, какими признаками характеризуется тот или иной дефект. Элемент матрицы c_{ij} равен 1,

если дефект D_i влечет симптом b_j, иначе элемент c_{ij} матрицы $\boldsymbol{C}$ равен 0. Для матрицы $\boldsymbol{C}$ строится матрица различий $\boldsymbol{R}$, строки которой соответствуют парам строк диагностической матрицы и показывают, какими компонентами отличаются строки в этих парах; при этом будем использовать покомпонентную операцию сложения по модулю два, выполняя ее над всеми парами строк диагностической матрицы.

Для полученной матрицы различий можно найти кратчайшее столбцовое покрытие. Множество признаков, соответствующих столбцам найденного покрытия, будет искомым решением задачи. При этом каждый дефект можно однозначно определить соответствующей строкой подматрицы $\boldsymbol{C}'$ матрицы $\boldsymbol{C}$. Это позволяет наиболее рациональным образом классифицировать дефекты на момент их возникновения по данным признакам.

В качестве примера рассмотрен реальный проект – веб-приложение для МТБанка «Halva.by», в котором были выделены такие симптомы дефектов, как:

1. Косметический симптом – визуально заметный недостаток интерфейса, не влияющий на функциональность приложения.
2. Некорректная операция – некорректное выполнение некоей операции.
3. Нереализованная функциональность – некая функция приложения не выполняется или не может быть вызвана.
4. Низкая производительность – выполнение неких операций занимает недопустимо большое время.
5. Крах системы – приложение прекращает работу или теряет способность выполнять свои ключевые функции.
6. Неожиданное поведение – в процессе выполнения некоторой типичной операции приложение ведет себя необычным образом.
7. Недружественное поведение – поведение приложения создает пользователю неудобства в работе.
8. Расхождение с требованиями – приложение ведет себя не так, как указано в требованиях.
9. Предложение по улучшению – приложение ведет себя согласно требованиям, но у специалиста по тестированию есть обоснованное мнение о том, как ту или иную функциональность можно улучшить.

При проведении тестирования в программном продукте найдены следующие дефекты:

D_1: отсутствует логотип компании при авторизации в системе.

D_2: отображается страница «Акции» при клике на раздел «Аксессуары».

D_3: отсутствует раздел «Избранные магазины».

D_4: не загружается страница «Техника» со списком соответствующих магазинов при одновременном пользовании сайтом количеством человек, равным 10 000.

D_5: крах плагина Adobe Flash при попытке просмотра видеозаписи.

D_6: номер телефона технической поддержки не удается набрать в мобильном браузере.

Для нахождения минимального диагностического теста построим диагностическую матрицу $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{c} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ниже представлена матрица различий $\boldsymbol{R}$, строки которой соответствуют парам строк диагностической матрицы и показывают, какими компонентами отличаются строки в этих парах; при этом будем использовать покомпонентную операцию сложения по модулю два, выполняя ее над всеми парами строк диагностической матрицы. Столбцы матрицы соответствуют симптомам.

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ D_1D_2 \\ D_1D_3 \\ D_1D_4 \\ D_1D_5 \\ D_1D_6 \\ D_2D_3 \\ D_2D_4 \\ D_2D_5 \\ D_2D_6 \\ D_3D_4 \\ D_3D_5 \\ D_3D_6 \\ D_4D_5 \\ D_4D_6 \\ D_5D_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Используя минимаксный алгоритм поиска кратчайшего столбцового покрытия матрицы $\boldsymbol{R}$, получаем одно их возможных кратчайших покрытий $\Pi = (1, 2, 3, 4, 6)$. Действительно, множество симптомов Π однозначно диагностирует каждый дефект данного программного продукта, поскольку все строки подматрицы $\boldsymbol{C}'$ различны:

$$\boldsymbol{C}' = \begin{array}{c} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Так, дефект D_1 характеризуется только симптомом 1, дефект D_2 характеризуется наличием симптомов 2, 6 и отсутствием симптомов 1, 3, 4 и т.д.

Что касается практического применения данного подхода, то каждому из признаков (симптомов) дефекта может соответствовать определенная метка, которая будет однозначно идентифицировать дефект на «доске». проекта. Последнее ускорит поиск и распределение дефектов между специалистами, а в дальнейшем эффективно скажется на работе всего проекта. Также это имеет и обратную связь: в случае, если после исправления дефекта он снова был обнаружен, поиск причин такого поведения системы будет организован гораздо легче и быстрее.

Заключение

Для автоматизации процесса мониторинга и контроля дефектов, регрессионного тестирования при разработке программных продуктов создана система управления задачами и отслеживанием ошибок, в которой представлены программные модули для реализации решения рассмотренных выше задач. Система может применяться, например, в начинающих организациях, которые не обладают средствами для обеспечения себя дорогостоящими продуктами, такими как JIRA, Trello, Yodiz. Бюджетные программные средства, использующиеся на данный момент организациями, имеют ограниченные возможности и не обладают достаточным набором функций.

Система выполняет следующие функции и задачи:

– добавление, изменение, просмотр и удаление проектов, задач, дефектов, а также сотрудников команды, работающей над созданием программного продукта;

– осуществление поиска задачи, дефектов, сотрудника по различным параметрам;

– отображение личного кабинета сотрудника компании;

– разграничение функционала в зависимости от роли: проектный менеджер (администратор) и специалист по тестированию или обнаружению дефектов (пользователь);

– определение минимального диагностического теста и минимального тестового набора при регрессионном тестировании.

Система реализована в виде распределенного приложения на языке Java с использованием технологий и фреймворков разработки веб-приложений. Веб-приложение представлено в виде клиент-серверного приложения, в котором клиентом выступает браузер, а сервером – веб-сервер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Закревский А.Д., Поттосин Ю.В., Черемисинова Л.Д. Логические основы проектирования дискретных устройств. М. : Физматлит, 2007. 592 с.
2. Бейзер Б. Тестирование черного ящика. Технологии функционального тестирования программного обеспечения и систем : пер. с англ. СПб. : Питер, 2004. 318 с.
3. Wang Sh., Wu Yu., Lu M., Li H. Software reliability accelerated testing method based on test // Proceedings «Annual Reliability and Maintainability Symposium». Lake Buena Vista, FL, USA. 24–27 Jan. 2011.
4. Котляров В.П. Основы тестирования программного обеспечения : учеб. пособие. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 285 с.
5. Куликов С.С. Тестирование программного обеспечения : базовый курс. Минск : Четыре четверти, 2017. 312 с.

Поступила в редакцию 28 августа 2018 г.

Pottosina S.A. (2019) APPLICATION OF THE SHORTEST COVER PROBLEM IN TESTING A SOFTWARE PRODUCT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 102–109

DOI: 10.17223/19988605/47/12

The combinatorial problem of shortest cover can be applied successfully in testing software. Two tasks whose solution is reduced to finding a shortest column cover of a Boolean matrix are considered in the paper. Both the tasks can be solved with the minimax algorithm.

The first task is connected with minimization of a test set in regression testing of a program functional. As a Boolean matrix, there is matrix $\boldsymbol{R}$ whose rows correspond to the program functionals being tested and columns to the tests intended for it. An element r_{ij} of the matrix $\boldsymbol{R}$ is equal to 1 if the test t_j is suitable for testing the functional f_i, otherwise it is equal to 0.

As an example, the real project of “Site-platform of comparing costs for services on automobile insurance” was considered. For this purpose, the key elements of the system (the tested functional) are extracted whose faultless work was critical for this application. Those are the following: enter to a site; exit; registration; recognized user; user-student; user working; user unemployed; user with additional driver; anonymous user; user with elapsed time of a purchase; check of notification on a mistake; user with additional work; individual business owner; page with results of purchase; distribution of information to post. Then, a test set of regression testing was created that contained checks of declared functionality (11 tests). As a result of the search of a shortest cover of matrix $\boldsymbol{R}$, it was found that the initial test set could be 14.3% decreased (2 tests) without lost of cover percentage of the functional. Similarly, this method was applied for another project; it was “Site of property insurance”. According to the solving problem, both the applications resemble and have a little number of distinctive features. Therefore the test set is the same in much. At the second case, the decrease of the initial test set was by 21.4%.

The second task concerns to the search for the minimal diagnostic test that can qualify defects in a software product. It is useful for automation of testing large products when testers are divided into certain groups. Let us consider two sets $D = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ and $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. The set D is the set of possible defects and B is the set of outward signs (symptoms) that appear as a result of disclosure of a defect. A symptom is a characteristic of a defect that can help to qualify defects according to their typical exposure. The diagnostic Boolean matrix $\boldsymbol{C}$ is constructed that shows what characters one or another defect is characterized. Then, the distinction matrix $\boldsymbol{R}$ is constructed whose rows correspond to the row pairs of the diagnostic matrix and show by what components those pairs differ. At that, the component-wise operation of modulo 2 addition is used executing it over all the row pairs of the diagnostic matrix.

Let {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} be the set of symptoms. The defect D_1 is characterized by the symptoms 1 and 8 and negates the rest. The defect D_2 is characterized by the symptoms 2, 6, 7, 8 and negates the rest. Then the first row of the distinction matrix is D_1D_2 = (1 1 0 0 0 1 1 0 0).

For the obtained distinction matrix, a shortest column cover is found. The set of characters corresponding to the columns in the found cover is the desired solution of the problem of searching for a minimum unconditional diagnostic test. At that, any defect is defined unambiguously by the corresponding row of the obtained submatrix. It helps to classify the defects in the most rational way at the moment of their appearance according to the given characters. This problem can be useful when the automation of testing large projects is organized and it is necessary to divide the test experts into certain groups. Then the problem of defect classification appears.

Keywords: regression testing; short cover problem; defects of a software product; diagnostic test; distinction matrix.

POTTOSINA Svetlana Anatolievna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Belorussian State University of Informatics and Radio-Electronics, Minsk, Belarus).

REFERENCES

1. Zakrevskiy, A.D., Pottosin, Yu.V. & Cheremisinova, L.D. (2007) *Logicheskie osnovy proektirovaniya diskretnykh ustroystv* [Logical Fundamentals of Design of Digital Devices]. Mosocw: Fizmatlit.
2. Beizer, B. (2004) *Testirovanie chernogo yashchika. Tekhnologii funktsional'nogo testirovaniya programmnogo obespecheniya i sistem* [Black-box testing. Techniques for functional testing of software and systems]. Translated from English. ST. Petersburg: Piter.
3. Wang, Sh., Wu, Yu., Lu, M. & Li, H. (2011) Software reliability accelerated testing method based on test. *Annual Reliability and Maintainability Symposium*. Proc of the Conference. Lake Buena Vista, FL, USA. January 24–27, 2011.
4. Kotlyarov, V.P. (2006) *Osnovy testirovaniya programmnogo obespecheniya* [Fundamentals of software testing]. Moscow: BINOM.
5. Kulikov, S.S. (2017) *Testirovanie programmnogo obespecheniya* [Software testing]. Minsk: Chetyre chetverti.

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/47/13

А.В. Лапутенко, Е.М. Винарский

СИНТЕЗ ТЕСТОВ ДЛЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ НА ВЫСОКОМ И НИЗКОМ УРОВНЯХ АБСТРАКЦИИ

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РНФ, грант № 16-49-03012.

Исследуется задача построения тестов с гарантированной полнотой для последовательностных цифровых систем. Рассматриваются тесты, нацеленные как на обнаружение в логических схемах низкоуровневых неисправностей различных типов, так и на более высокий функциональный уровень. Для построения тестов по модели логической схемы используется мутационный подход. При построении тестов с гарантированной полнотой для автоматной модели, т.е. модели более высокого уровня, тесты, построенные по логической схеме, дополняются последовательностями, которые позволяют покрыть ранее не покрытые переходы соответствующего конечного автомата. Расширенные тесты являются полными как относительно мутантов логической схемы, так и относительно автоматных ошибок. Приводятся результаты компьютерных экспериментов с описаниями последовательностных логических схем и соответствующими им конечными автоматами, подтверждающие эффективность предложенного подхода.
Ключевые слова: последовательностная цифровая система; конечный автомат; тестовые последовательности; мутационный подход; обход графа переходов.

Уровень производства цифровых устройств и использования их в различных сферах человеческой деятельности постоянно растет. Соответственно, задача эффективной проверки правильности функционирования подобных устройств на различных этапах не теряет своей актуальности, особенно для критических систем. Существует несколько подходов к построению верификационных тестов для цифровых устройств на различных уровнях абстракции [1, 2] с использованием различных моделей. Одной из наиболее ранних моделей является модель логической схемы, константные неисправности в которой достаточно полно описывали неисправности в релейно-контактных схемах [3]; тесты, построенные на основе этой модели, активно использовались, в том числе для проверки качества БИС [2, 4].

Однако почти сразу было отмечено, что тесты, построенные для обнаружения константных неисправностей логической схемы, не являются достаточно качественными при тестировании СБИС и ПЛИС, и множество константных неисправной постоянно расширялось другими моделями неисправностей [5]. Как показывают результаты экспериментов, проведенных различными исследователями (см., напр.: [6]), тесты, построенные по логическим схемам, покрывая при символьном тестировании достаточно большое количество простых путей в расширенном автомате, тем не менее оставляют непокрытыми, т.е. непроверенными, достаточно большое количество различных переходов в исходной логической схеме. С другой стороны, построение теста обходом графа переходов не расширенного, а конечного автомата, построенного по исходной логической схеме, может потребовать построения слишком большого автомата (state explosion problem). Поэтому в настоящей работе мы предлагаем так называемый гибридный подход к построению проверяющего теста для цифровой схемы. На первом шаге по заданной логической схеме строится тест, обнаруживающий три типа неисправностей [5].

На втором шаге, если по логической схеме можно построить автомат, тест достраивается до обхода графа переходов построенного автомата или любого другого автоматного теста с гарантированной полнотой; как известно, такой тест обнаруживает большое количество функциональных ошибок в реализации системы [7]. Если построение конечного автомата по логической схеме не представляется возможным, то устанавливается модель неисправности, относительно которой построенный тест является полным.

Логические схемы являются одной из наиболее популярных моделей для проектирования и анализа цифровых устройств. Распространенным способом проектирования логических схем является создание описания схемы на одном из языков логического проектирования (Hardware Description Language, HDL). Примерами таких языков являются языки Verilog, VHDL [8], BLIF, BENCH. При построении тестов для логических схем успешно применяется мутационный подход. Для имеющейся эталонной схемы рассматривается область неисправности, состоящая из описаний эталонной логической схемы с внесенными в нее неисправностями определенных типов. Распространенными типами неисправностей являются одиночные константные неисправности, проявляющиеся в том, что выход одного из вентилей схемы «залипает» на значение логического нуля или единицы. Также используется модель неисправности, содержащая неисправности типа перемычек, возникающие при ошибочном соединении выхода одного логического элемента со входом другого. Третьим типом неисправностей, рассматриваемых нами, являются трудно обнаружимые неисправности, которые появляются при замене одного вентиля схемы другим.

В предыдущих работах [5] было показано, что тесты, направленные на обнаружение одного вида неисправностей, имеют достаточно невысокий процент обнаружения неисправностей двух других типов. Из этого следует, что для построения полных тестов относительно трех перечисленных моделей неисправностей необходимо строить множество тестовых последовательностей, обнаруживающих каждую неисправную схему. Полный мутационный тест получается объединением всех таких последовательностей, возможно, с последующей минимизацией теста, т.е. удалением последовательностей, обнаруживающих одно и то же множество мутантов.

Другим подходом к построению тестов для логических схем является рассмотрение поведенческой модели более высокого уровня, функционально соответствующей данной логической схеме, и применение известных методов синтеза тестов по данной модели. В работе [6] в качестве такой модели рассматривается расширенный автомат, а качество теста оценивается покрытием простых путей в расширенном автомате. В этом случае тесты, построенные по логической схеме расширенного автомата, оказываются достаточно качественными, однако критерий покрытия путей не является достаточным для обнаружения многих функциональных ошибок. Для построения тестов, обнаруживающих большее количество функциональных ошибок, в качестве модели высокого уровня можно использовать конечный автомат. Как показано в наших предыдущих работах [9], тесты, построенные на высоком уровне абстракции (по модели конечного автомата), имеют достаточно высокий процент покрытия относительно трех типов неисправностей в логических схемах, но, тем не менее, не достигают 100%.

В данной работе предлагается подход для построения тестов для последовательностных схем, которые бы являлись полными относительно неисправностей трех рассматриваемых типов логической схемы, а также относительно выходных ошибок в конечном автомате, соответствующем данной логической схеме. Если конечный автомат, построенный по логической схеме, оказывается слишком большим, то для построенного теста устанавливается, относительно какой автоматной модели неисправности тест является полным. Таким образом, тесты, построенные предложенным методом, являются достаточно качественными для проверки отсутствия в цифровых системах функциональных ошибок как на низком, так и на высоком уровнях абстракции.

1. Основные определения

Данная работа является продолжением работ [5, 7, 9, 10], и, соответственно, мы используем основные определения из этих работ.

Под *конечным автоматом* понимается инициальный детерминированный автомат **S**, т.е. (S, I, O, $next_state_s$, out_s, s_0), где S – конечное непустое множество состояний с выделенным начальным состоянием s_0; I и O – конечные входные и выходные алфавиты; $next_state_s(S, I)$ – функция переходов автомата **S**, отображающая множество $S \times I$ в множество состояний S, $out_s(S, I)$ – функция выходов автомата **S**, отображающая множество $S \times I$ в выходной алфавит O. В текущем состоянии автомат принимает на вход входной символ, выдает соответствующий выходной символ и переходит в следующее состояние.

Комбинационная схема состоит из логических элементов, реализующих соответствующую булеву функцию. *Последовательностные схемы* (схемы с памятью) включают как комбинационную часть (комбинационную схему), так и элементы задержки (триггеры).

Конечный автомат, моделирующий поведение логической схемы, можно построить путем моделирования выходных реакций схемы во всех состояниях в ответ на входные воздействия. В данном случае множество S состояний конечного автомата состоит из булевых векторов (при необходимости хешированных целыми числами), представляющих комбинации значений элементов задержки, достижимых из начальной комбинации (начального состояния). Соответственно множество I входных символов автомата содержит булевы векторы, которые могут быть поданы на входы схемы.

В качестве примера на рис. 1 приведена последовательностная схема из работы [7]; конечный автомат, моделирующий ее поведение, приведен на рис. 2.

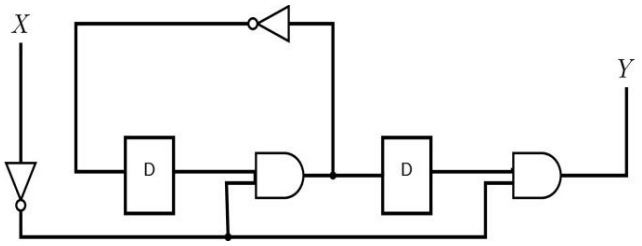


Рис. 1. Пример последовательностной схемы
Fig 1. An example of a sequential circuit

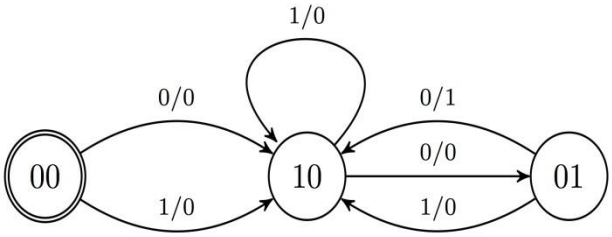


Рис. 2. Конечный автомат, описывающий поведение схемы на рис. 1
Fig 2. An FSM describing the circuit at the Fig. 1

Логическая схема имеет один вход, два элемента задержки и один выход. Конечный автомат, моделирующий ее поведение, имеет два входных символа, два выходных символа и три состояния. Начальное состояние каждого элемента задержки устанавливается в 0, поэтому начальное состояние автомата равно (00). Заметим, что состояние (11) недостижимо из начального состояния, следовательно, оно не входит в множество S = {(00), (01), (10)} состояний автомата.

Подобно работам [5, 7, 9, 10] мы рассматриваем следующие типы неисправностей, вносимых в цифровые схемы:

– *схема с одиночной константной неисправностью*, когда выход одного из вентилей схемы «залипает» на логическое значение «0» или «1»;

– *схема с одиночной неисправностью перемычки*, когда выход одного из логических элементов ошибочно соединяется с входом другого элемента;

– *схема с трудно обнаружимой неисправностью*, когда один из вентилей заменяется на вентиль, реализующий другую булеву функцию.

Проверяющий тест, полный относительно множества описанных выше неисправностей, является достаточно качественным [2, 4] и обнаруживает большое количество различных функциональных ошибок в тестируемой цифровой системе. Однако, как показывают проведенные нами эксперименты, этот тест «проходит» в среднем только по половине переходов соответствующего конечного автомата, т.е. остальные переходы системы остаются непроверенными.

2. Модели неисправности и полные проверяющие тесты

Для конечных автоматов существуют различные методы синтеза тестов с гарантированной полнотой. Однако практически в каждом методе присутствует обход графа переходов автомата. Если число элементов задержки и / или внешних входов логической схемы не меньше 20 [9], то построить соответствующий автомат и его граф переходов достаточно затруднительно. В этом случае можно построить проверяющий тест по логической схеме с использованием мутантов, описанных выше, и оценить полноту построенного теста для конечного автомата, описывающего поведение логической схемы.

Пусть поведение логической схемы описывается автоматом **S**, в котором множество состояний S есть подмножество всех двоичных наборов длины n, где n – число элементов задержки, и входной алфавит I содержит все двоичные наборы длины p, где p – число внешних входов логической схемы. Для каждой неисправности логической схемы построим соответствующий мутант; различающая последовательность для эталонной логической схемы и мутанта (если существует) строится с использованием одной из систем логического синтеза и верификации [11]. Построенные последовательности собираются в единый тест TS, который можно дополнительно оптимизировать [10]. Поведение логической схемы моделируется на последовательностях теста TS, и строится соответствующий конечный автомат $M_{LC}(TS)$.

В общем случае автомат $M_{LC}(TS)$ детерминированный и частично определенный. Построим разбиение π множества $S \times I$ на классы таким образом, что каждый класс множества содержит некоторую пару «состояние, входной символ», для которой определено поведение автомата $M_{LC}(TS)$. Рассмотрим модель неисправности $<\mathbf{S}, \cong, FD_\pi>$, где $\mathbf{S} = (S, I, O, next_state_s, out_s, s_0)$ – полностью определенный автомат-спецификация, $\cong$ – отношение эквивалентности. Область неисправности FD_π содержит каждый полностью определенный автомат **P** с входным алфавитом I, множество P состояний которого есть подмножество множества S и в котором возможны только выходные ошибки относительно эталонного автомата **S**, причем для каждого класса b из π справедливо: либо выходной символ в автомате **P** «правильный» для всех пар класса, либо для каждой пары класса в автомате **P** есть ошибка в выходном символе.

Теорема. Проверяющий тест TS обнаруживает каждый автомат из класса FD_π, не эквивалентный эталонному автомату **S**, т.е. является полным проверяющим тестом относительно модели неисправности $<\mathbf{S}, \cong, FD_\pi>$.

Доказательство. Пусть автомат $\mathbf{P} = (P, I, O, next_state_p, out_p, p_0) \in FD_\pi$, т.е. **P** является полностью определенным детерминированным автоматом, функция переходов которого совпадает с функцией переходов автомата-спецификации **S** для каждой пары $(p, i) \in P \times I$. Функция выходов автомата **P** может отличаться от функции выходов автомата **S**, однако для каждого класса b разбиения π множества $S \times I$ справедливо, что $\forall\ (p, i) \in b(out_p(p, i) = out_s(p, i))$ или $\forall\ (p, i) \in b(out_p(p, i) \neq out_s(p, i))$, т.е. значения функции выходов для **P** и **S** совпадают для каждой пары $(p, i) \in b$ или отличаются для всех пар $(p, i) \in b$.

Пусть в автомате **P** присутствует выходная ошибка, т.е. для некоторой пары $(p, i) \in P \times I$ имеет место $out_p(p, i) \neq out_s(p, i)$, и пара принадлежит классу b разбиения π. Тогда, по определению области неисправности, для любой пары $(p', i) \in b$ справедливо, что $out_p(p', i) \neq out_s(p', i)$. Согласно правилам

построения теста, тест *TS* содержит входную последовательность α, которая «проходит» по некоторой паре $(p', i) \in b$. По определению области неисправности FD_π, в автомате **S** рассматриваются только выходные ошибки. Соответственно, значения функции переходов в автоматах **P** и **S** совпадают для каждой пары (p, i), и последовательность α «проходит» по паре (p', i), т.е. выходные последовательности автоматов **P** и **S** на последовательность α будут различными, поскольку $out_p(p', i) \neq out_s(p', i)$. Таким образом, тест *TS* обнаружит автомат **P** с выходной ошибкой.

Следствие. Если автомат $M_{LC}(TS)$ является полностью определенным, то тест *TS* является полным относительно всех выходных неисправностей в логической схеме.

Заметим, что при необходимости тест *TS* можно достроить относительно критических переходов в достижимых состояниях, моделируя поведение логической схемы на дополнительных входных наборах. При построении полного автомата, моделирующего поведение схемы (если такое построение возможно), полученный тест является обходом графа переходов и обнаруживает большое количество функциональных ошибок на высоком (автоматном) уровне [12], а также обнаруживает и ошибки на более низком уровне, а именно на уровне логической схемы, которую далее можно реализовать в виде цифровой схемы по технологии FPGA.

В работе [9] иллюстрируется, что обход графа переходов не покрывает все ошибки, возможные в логической схеме. В следующем разделе мы иллюстрируем, что тест, построенный на основе мутантов логической схемы, не покрывает все переходы соответствующего конечного автомата, и, таким образом, объединение полученного теста с тестом, построенным обходом графа переходов автомата, дает возможность обнаружить значительно больше функциональных ошибок. Согласно проведенным экспериментам, тест, построенный по логической схеме, в среднем удлиняется примерно на 45%, если автомат имеет порядка 10 входных символов и не более 20 состояний. При увеличении размеров автомата длина теста может возрасти в 2–4 раза.

3. Описание компьютерных экспериментов

При проведении компьютерных экспериментов нами были использованы программные инструменты для генерации конечных автоматов и построения тестов обходом графа переходов [13], генерации трех множеств схем с неисправностями для эталонной схемы, представленной в BLIF описании, построении различающей последовательности для эталонной и мутированной схем [11], построении модели в виде BLIF описания по данному конечному автомату, а также скрипты на языке Perl [14] для автоматического запуска указанных инструментов и обработки результатов их работы. Часть из указанных инструментов находится в свободном доступе, часть была создана непосредственно в процессе работы.

В экспериментах использовались случайно сгенерированные автоматы с количеством состояний от 5 до 20, с числом входов от 2 до 16, а также соответствующие каждому автомату логические схемы в формате BLIF.

В первой части экспериментов было вычислено среднее значение количества мутантов логической схемы, обнаруженных тестом, построенным как обход графа переходов соответствующего конечного автомата. Результаты представлены в табл. 1.

Как видно из данной таблицы, тест, построенный обходом графа переходов соответствующего автомата, обладает достаточно высокой полнотой относительно мутаций трех типов в логических схемах, хотя полнота и не достигает 100%.

Таблица 1

Полнота конечно-автоматного теста относительно мутаций в логической схеме

Число состояний автомата	Обнаруженные мутанты соответствующей логической схемы, %
5	91,80
10	95,94
15	97,06
20	96,50

Далее были построены полные тесты относительно рассмотренных ранее видов неисправностей в логических схемах. В табл. 2 приведены средние значения длины мутационного теста для логической схемы, построенной по заданному конечному автомату.

Таблица 2

Средняя длина мутационного теста для схем, соответствующих случайно сгенерированным автоматам

Число состояний автомата	Число входных и выходных символов			
	2	4	8	16
5	19,00	26,67	37,67	83,67
10	49,33	79,00	108,67	106,00
15	46,00	55,33	101,33	114,00
20	64,67	89,00	183,00	157,33

На данном этапе экспериментов проверяющий тест строился следующим образом.

1. По случайно сгенерированному конечному автомату была построена соответствующая логическая схема в формате BLIF.

2. Для построенной логической схемы был сгенерирован тест TS_M относительно трех типов неисправностей, рассмотренных выше.

3. Поведение автомата моделировалось на тесте TS_M и определялось множество T_N переходов автомата, которые тестом не покрываются.

4. Тест TS_M дополнялся последовательностями, покрывающими переходы из множества T_N.

5. Вычислялась длина теста как сумма длин всех тестовых последовательностей.

Данная последовательность шагов была применена ко всем автоматам, построенным случайным образом на предыдущем этапе экспериментов, и в табл. 3 приведены средние значения длин тестов, полученных с использованием описанного выше алгоритма.

Таблица 3

Средняя длина теста, дополненного автоматными последовательностями

Число состояний соответствующего автомата	Число входных и выходных символов в соответствующем автомате			
	2	4	8	16
5	23,33	40,00	76,67	158,00
10	55,00	110,33	170,33	279,67
15	81,00	131,33	222,67	405,33
20	106,33	163,67	316,33	600,00

Как видно из табл. 3, для относительно небольших автоматов построенный таким образом тест в среднем имеет длину на 45% больше по сравнению с тестом, построенным при мутационном тестировании схемы, соответствующей конечному автомату, и дает возможность обнаружить значительно больше функциональных ошибок в тестируемой системе. При увеличении размеров автомата длина теста увеличивается в несколько раз, на некоторых автоматах в 2–4 раза.

Если автомат, соответствующий логической схеме, не удается построить ввиду его громоздкости, то можно либо довольствоваться полнотой теста из раздела 2, либо достраивать тест до покрытия тех переходов, которые достаточно просто промоделировать. При этом, согласно проведенным экспериментам, после увеличения длины теста в 2–4 раза можно полагать, что большое количество переходов в автомате окажется покрытым.

Заключение

Полученные экспериментальные результаты позволяют заключить, что возможно эффективное использование мутационного подхода при синтезе качественных тестов для последовательностных схем: тест, построенный относительно мутаций логической схемы, дополняется последовательностями, покрывающими непокрытые переходы соответствующего конечного автомата, пока длина исходного теста не увеличится в 2–4 раза. Согласно результатам экспериментов, можно ожидать, что тест, расширенный подобным образом, будет полным относительно большого количества ошибок на

функциональном уровне и, соответственно, тесты, построенные с помощью такого подхода, могут быть использованы в качестве проверки правильности функционирования систем как на высоком, так и на низком уровнях абстракции.

Авторы выражают благодарность доценту ТГУ М.Л. Громову за предоставленные программные инструменты, использованные в данной работе, а также постдоку университета Телеком Южный Париж Хорхе Лопезу и профессору ТГУ Н.В. Евтушенко за ценные дискуссии при подготовке данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vasilevskii M. Failure Diagnosis of Automata // Kibernetika. 1973. V. 4. P. 98–108.
2. Пархоменко П.П., Согомонян Е.С. Основы технической диагностики. М. м: Энергоиздат, 1981. 319 с.
3. Яблонский С.В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. М. : Наука, 1988. Вып. 1. С. 5–25.
4. Матросова А.Ю., Останин С.А., Бухаров А.В., Кириенко И.Е. Поиск всех тестовых наборов для неисправности логической схемы и представление их ROBDD-графом // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 82–89.
5. Кушик Н.Г., Лопез Х.Е., Евтушенко Н.В. Исследование корреляции тестовых последовательностей при проверке надежности функционирования цифровых компонентов физических систем // Известия вузов. Физика. 2016. Т. 59, № 8. С. 134–139.
6. Smolov S.A., López J., Kushik N., Yevtushenko N., Chupilko M.M., Kamkin A.S. Testing logic circuits at different abstraction levels: an experimental evaluation // Proc. of the IEEE East-West Design & Test Symposium. EWDTS. Yerevan, 2016. P. 189–192.
7. Vinarskii E., Laputenko A., López J., Kushik N. Testing Digital Circuits: Studying the Increment of the Number of States and Estimating the Fault Coverage // EDM 2018 : Proc. of the 19th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices, 2018. P. 220–224.
8. Бибило П.Н. Основы языка VHDL : учеб. пособие. М. : ЛИБРОКОМ, 2016. 328 с.
9. Lopez J., Vinarsky E., Laputenko A. On the Fault Coverage of High-level Test Derivation Methods for Digital Circuits // EDM 2017 : Proc. of the 18th International Conference on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices, 2017. P. 184–189.
10. Лапутенко А.В., Лопез Х.Е., Евтушенко Н.В. Обработка экспериментальных данных при верификации компонентов физических систем: оценка качества тестовых последовательностей // Известия вузов. Физика. 2017. Т. 60, № 11. С. 146–151.
11. Brayton R., Mishchenko A. ABC: An Academic Industrial-Strength Verification Tool // Computer Aided Verification : Proc. of the 22nd International Conference, 2010. P. 24–40.
12. Прокопенко С.А. Минимизация проверяющих тестов для систем логического управления методами теории конечных автоматов : дис. … канд. техн. наук. Томск, 2000. 117 с.
13. Shabaldina N., Gromov M. FSMTest-1.0: a manual for researches // Proc. of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2015). Batumi. Georgia. September 26–29, 2015. P. 216–219.
14. Wall L., Christiansen T., Orwant J. Programming Perl. 3nd ed. Sebastopol, CA : O'Reilly & Associates, Inc, 2000. 1104 p.

Поступила в редакцию 27 сентября 2018 г.

Laputenko A.V., Vinarskii E.M. (2019) DERIVING TESTS FOR DIGITAL CIRCUITS AT LOWER AND HIGHER ABSTRACTION LEVELS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 110–117

DOI: 10.17223/19988605/47/13

In this paper, we propose an approach for deriving complete test suites for logic circuits, which detect both low-level faults and high-level faults. For deriving low level tests, we consider logic circuits described in BLIF format and a mutation approach is used for the test derivation. First, logic circuit mutants with respect to considered faults are derived and test sequences, for distinguishing the reference and mutated circuits are then constructed (if such a sequence exists). For deriving a distinguishing sequence, a logic synthesis and verification software tool called ABC is used. Three types of faults in logic circuits are considered: those are Single Stuck-At Faults (SSF) considered in many references. We also consider Single Bridge Faults (SBF), which occur when one of the intermediate inputs becomes wrongly wired. The last considered faults type is a Hardly Detectable Faults (HDF) when a single gate of the circuit is replaced with another gate that has slightly different behavior. Test suite is derived by covering all such mutants. For deriving higher level tests, we use a finite state machine (FSM) and according to our experiments test suites derived based on logic circuits cover 64% of transitions of the corresponding FSM on average. We propose to complete logic circuit based test suites with sequences, which allow to cover previously uncovered transitions of the corresponding FSM and specify the fault model for which augmented test suites are complete. Correspondingly, augmented tests are complete with respect to the mutations of a logic circuit as well as with respect to output faults of a higher-level FSM model.

Keywords: sequential circuits; finite state machines; test sequences; mutation approach; transition tour.

LAPUTENKO Andrey Vladimirovich (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: laputenko.av@gmail.com

VINARSKII Evgenii Maximovich (Student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation).
E-mail: vinevg2015@gmail.com

REFERENCES

1. Vasilevskii, M. (1973) Failure Diagnosis of Automata. *Kibernetika*. 4. pp. 98–108.
2. Parkhomenko, P.P. & Sogomonyan, E.S. (1981) *Osnovy tekhnicheskoy diagnostiki* [The basic of technical diagnostics]. Moscow: Energoizdat.
3. Yablonskiy, S.V. (1988) Nekotorye voprosy nadezhnosti i kontrolya upravlyayushchikh sistem [Some problems of control systems reliability and management]. In: Yablonskiy, S.V. (ed.) *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. Vol. 1. Moscow: Nauka. pp. 5–25.
4. Matrosova, A.Yu., Ostanin, S.A., Bukharov, A.V. & Kirienko, I.E. (2014) Generating all test patterns for a given stuck-at fault of a logical circuit and its ROBDD implementation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vy-chislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 82–89. (In Russian).
5. Kushik, N.G., López, J.E. & Evtushenko, N.V. (2016) Studying the correlation of test sequences in checking reliability of digital components of physical systems. *Russian Physics Journal*. 59(12). pp. 134–139.
6. Smolov, S.A., López, J., Kushik, N., Yevtushenko, N., Chupilko, M.M. & Kamkin, A.S. (2016) Testing logic circuits at different abstraction levels: an experimental evaluation. *Proceedings of the IEEE East-West Design & Test Symposium. EWDTS*. Yerevan. pp. 189–192. DOI: 10.1109/EWDTS.2016.7807687
7. Vinarskii, E., Laputenko, A., López, J. & Kushik, N. (2018) Testing Digital Circuits: Studying the Increment of the Number of States and Estimating the Fault Coverage. *EDM 2018*. Proc. of the 19th International Conference of Young Specialists on Micro / Nanotech-nologies and Electron Devices. pp. 220–224. DOI: 10.1109/EDM.2018.8435051
8. Bibilo, P.N. (2016) *Osnovy yazyka VHDL* [The basics of VHDL language]. Moscow: LIBROKOM.
9. Lopez, J., Vinarskii, E. & Laputenko, A. (2017) On the Fault Coverage of High-level Test Derivation Methods for Digital Circuits. *EDM 2017*. Proc. of the 18th International Conference on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices. pp. 184–189. DOI: 10.1109/EDM.2017.7981736
10. Laputenko, A.V., Lopez, J.E. & Evtushenko, N.V. (2017) Processing of experimental data in the verification of physical system components: evaluation of the quality of test sequences. *Russian Physics Journal*. 60(11). pp. 146–151.
11. Brayton, R. & Mishchenko, A. (2010) ABC: An Academic Industrial-Strength Verification Tool. *Computer Aided Verification*. Proc. of the 22nd International Conference. pp. 24–40.
12. Prokopenko, S.A. (2000) *Minimizatsiya proveryayushchikh testov dlya sistem logicheskogo upravleniya metodami teorii konechnykh avtomatov* [Minimization of verification tests for logic control systems using finite state machine methods]. Engineering Cand. Diss. Tomsk.
13. Shabaldina, N. & Gromov, M. (2015) FSMTest-1.0: a manual for researches. *Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2015)*. Batumi. Georgia. September 26–29, 2015. pp. 216–219.
14. Wall, L., Christiansen, T. & Orwant, J. (2000) *Programming Perl*. 3nd ed. Sebastopol, CA: O'Reilly & Associates, Inc.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ВИНАРСКИЙ Евгений Максимович – студент факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (г. Москва). E-mail: vinevg2015@gmail.com

ВИНС Дмитрий Владимирович – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории системного моделирования и оптимизации Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (г. Новосибирск). E-mail: vins@sscc.ru

ГОРЦЕВ Александр Михайлович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: a-gortsev@mail.ru

ДИМИТРОВ Митко Цанов – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики факультета прикладной информатики и статистики Университета национальной и мировой экономики (г. София, Болгария). E-mail: mcdimitrov@abv.bg

ДМИТРИЕВ Юрий Глебович – доцент, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: dmit@mail.tsu.ru

ДОБРОНЕЦ Борис Станиславович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры систем искусственного интеллекта Сибирского федерального университета (г. Красноярск). E-mail: BDobronets@yandex.ru

ДОМБРОВСКИЙ Владимир Валентинович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информационных технологий и бизнес-аналитики Института экономики и менеджмента Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

ЗЕНКОВ Андрей Геннадьевич – инженер Инженерной школы ядерных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: zenkov@tpu.ru

ЗЕНКОВА Жанна Николаевна – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: zhanna.zenkova@mail.tsu.ru

КИМ Константин Станиславович – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: kks93@rambler.ru

КОРЕЛИН Иван Андреевич – старший преподаватель департамента ИТ и автоматики Института радиоэлектроники и информационных технологий Уральского федерального университета им. первого президента России Б.Н. Ельцина (г. Екатеринбург). E-mail: korelin.ivan@gmail.com

КУРНОСОВ Михаил Георгиевич – доцент, доктор технических наук, заведующий кафедрой вычислительных систем факультета информатики и вычислительной техники Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики; старший научный сотрудники лаборатории вычислительных систем Института физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН (г. Новосибирск). E-mail: mkurnosov@gmail.com

ЛАПУТЕНКО Андрей Владимирович – аспирант кафедры информационных технологий в исследовании дискретных структур радиофизического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: laputenko.av@gmail.com

МИГОВ Денис Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории системного моделирования и оптимизации Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (г. Новосибирск). E-mail: mdinka@rav.sscc.ru

МОИСЕЕВА Светлана Петровна – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: smoiseeva@mail.ru

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

ПАШИНСКАЯ Татьяна Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и бизнес-аналитики Института экономики и менеджмента Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

ПЕРЫШКОВА Евгения Николаевна – старший преподаватель кафедры вычислительных систем факультета информатики и вычислительной техники Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики; инженер лаборатории вычислительных систем Института физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН (г. Новосибирск). E-mail: e.peryshkova@gmail.com

ПОЛИН Евгений Павлович – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и кибернетических наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: polin_evgeny@mail.ru

ПОПОВА Ольга Аркадьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры систем искусственного интеллекта Сибирского федерального университета (г. Красноярск). E-mail: OlgaArc@yandex.ru

ПОРШНЕВ Сергей Владимирович – профессор, доктор технических наук, директор Учебно-научного центра «Информационная безопасность» Уральского федерального университета им. первого президента России Б.Н. Ельцина (г. Екатеринбург). E-mail: sergey_porshnev@mail.ru

ПОТТОСИНА Светлана Анатольевна – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономической информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (г. Минск, Беларусь). E-mail: s.pottosina@gmail.com

РОЖКОВА Светлана Владимировна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математической физики физико-технического факультета Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: rozhkova@tpu.ru

СМАГИН Валерий Иванович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: vsm@mail.tsu.ru

ШУМИЛОВ Борис Михайлович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики общеобразовательного факультета Томского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: sbm05@yandex.ru

Научный журнал

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

2019. № 47

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 24.06.2019 г. Формат 60x84 1/8.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 13,95.
Тираж 50 экз. Заказ № 3858. Цена свободная.

Дата выхода в свет 28.06.2019 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: http://publish.tsu.ru; E-mail: rio.tsu@mail.ru