Вестник Томского государственного университета
Философия. Социология. Политология. 2019. № 48

УДК 165.4
DOI: 10.17223/1998863Х/48/3

В.В. Целищев, А.В. Хлебалин

ИНТЕНСИОНАЛЬНЫЙ МОДУС В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ДИСКУРСЕ: «ПРЫЖОК ВЕРЫ» И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПРАКТИКА[1]

Статья посвящена характеристике интенсионального модуса математической практики на примере анализа причин истинности геделева предложения. Показано, что допущение обоснованности или непротиворечивости формальной системы связано с неустранимым «прыжком» от размышлений о формальных теориях арифметики к эпистемологическим вопросам об обосновании веры математика в указанные характеристики формальной системы.
Ключевые слова: *интенсиональность математики, геделево предложение, непротиворечивость, вера.*

Интенсиональность в математическом дискурсе возникает, по крайней мере, в трех случаях. Во-первых, это необходимость придания смысла терминам в формальных конструкциях, первоначально мыслимых в качестве экстенсиональных. Важным случаем такой интенсиональности является формальное определение непротиворечивости при доказательстве второй теоремы Геделя о неполноте арифметики. Экстенсионально эквивалентные различные определения имеют разные смыслы, некоторые из них приводят к ложности теоремы. Требуется аккуратное определение непротиворечивости, которое в наибольшей степени отвечает концептуальному каркасу, в данном случае конкретной схеме арифметизации синтаксиса. Больше того, смысловые оттенки играют столь значительную роль, что выделяется единственная «каноническая формула» с подходящей интенсиональной структурой [1].

Во-вторых, это использование в математическом дискурсе модальных понятий. Оно также довольно разнообразно: от представления всей математики как модального исчисления [2] до моделирования семантики теории доказательств в виде логики доказательств GL [3]. В явном виде интенсиональный аспект проявляется при трактовке модальностей средствами семантики возможных миров. Но и без таких средств аналогия между интенсиональностью модальностей и интенсиональностью математических контекстов устанавливается довольно легко [4]. Следует отметить, что интенсиональность модальных контекстов является более общей концепцией, чем учет смыслов при формализации интуитивных понятий.

В-третьих, в математическом дискурсе есть интенсиональность предельно общего порядка, которая тесно связана с эпистемологией математического доказательства. В частности, речь идет о понятии веры в ту или иную харак-

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 19-011-00518).

теристику математических структур и объектов. Любой формализации предшествуют интуитивные понятия, образующие фон для сложных формальных конструкций. В такого рода конструировании участвует множество предположений и посылок, некоторые из них столь важны, что требуют особого осознания. Фактически это то, что называется верой в определенные закономерности эпистемологических процедур, такие как истинность, непротиворечивость, основательность суждений об определенном фрагменте действительности. Даже не впадая в платонизм, можно указать на неизбежность подобного рода вер на интуитивном уровне, образующих основу концептуального фона. Данная статья посвящена как раз такого рода интенсиональности математического дискурса.

В конечном счете вера в обоснованность концептуальных математических процедур оказывается тем базисом, который невозможно устранить полностью при формализации, что и позволяет говорить об интенсиональности математического дискурса. Например, предположение о непротиворечивости сложных математических или логических теорий является таким базисом. Экспликация базиса через формальное определение непротиворечивости во многих случаях позволяет доказать непротиворечивость формальной теории в рамках других теорий, более сильных или более выразительных. Вторая теорема Геделя говорит о том, что для достаточно богатых формальных теорий невозможно доказательство их непротиворечивости в рамках самих этих теорий. Но для многих теорий, например формальной системы Арифметика Пеано (PA) или аксиоматической теории множеств Цермело – Френкеля (ZF), вопрос об их непротиворечивости остается открытым. Важно, что обе теоремы Геделя о неполноте формулируются как условные утверждения, антецедентом которых является предположение о непротиворечивости системы. Коль скоро последняя не доказана, провозглашение ее в качестве условия есть настоящий акт веры. Интуитивные соображения и обширная математическая практика служат фундаментом для такой веры. Тем не менее, если иметь в виду, что математика в значительной степени представляет собой систему исчислений или формальных манипуляций с символами, апелляция к вере является несколько неожиданным элементом математического дискурса. Можно даже прибегнуть к более сильной формулировке: заимствуя знаменитую терминологию у Кьеркегора, можно сказать, что в данном случае мы имеем дело с *прыжком веры*, или, переходя на более точный язык, *прыжком в интенсиональность*. Соотнесение веры и интенсиональности здесь вполне оправданно, поскольку интуитивное понятие веры в математическом дискурсе мы постоянно стремимся эксплицировать формальными средствами с учетом смысловых категорий.

Интерес к исследованию проблем интенсиональности математического дискурса в последнее время в значительной степени мотивирован особенностями доказательства второй теоремы Геделя о неполноте. Неразрешимое геделево предложение, являющееся формальным выражением неформального понятия непротиворечивости, так называемое G2, может иметь различные формы выражения с различным смыслом. Необходимый учет такого рода интенсиональности в обычно экстенсиональных метаматематических утверждениях связан со структурными особенностями конструирования геделева предложения. В этом отношении представляют интерес некоторые общие характеристики геделевской конструкции, объединяющей как геделево предложение G1 первой теоремы Геделя о неполноте, так и G2. В частности, установление истинности геделева предложения G1 оказывается связанным с природой интенсиональности математического дискурса в той же степени, что и в случае G2. Анализ эпистемологических аспектов интенсиональности первой теоремы возможен через исследование условий истинности геделева предложения G1. Эти эпистемологические следствия включают рассмотрение проблемы веры в некоторые базисные эпистемологические установки математического дискурса.

В текущей литературе по вопросам установления причин истинности геделева предложения существуют три распространённые точки зрения [5]. Первая из них является в определенной степени стандартной: геделево предложение G1 утверждает о себе самом, что оно недоказуемо. Математически доказуемо, что оно действительно недоказуемо. Таким образом, оно является истинным. Этот аргумент имеет долгую историю и опирается на понятие самореференции, которое является признанным источником интенсиональности. Вторая точка зрения на истинность геделева предложения принадлежит М. Даммиту; в этом случае решающую роль играет то обстоятельство, что мы имеем дело со стандартной интерпретацией квантификации над числами [6]. Третья точка зрения состоит в том, что истинность геделева предложения устанавливается тем фактом, что в расширенной формальной системе, получающейся присоединением к исходной системе неразрешимого предложения в качестве аксиомы, мы получаем непротиворечивую систему [7].

Каждая из этих точек зрения встречает серьезные возражения. Так, в ряде работ подвергнут критике взгляд о роли самореференции в геделевом предложении, поскольку, строго говоря, в нем нет прямой самореференции. Действительно, есть геделев номер, который есть число, указывающее на предложение, которое есть синтаксический объект. В этом отношении аспект самореференции геделева предложения оказывается в существенной степени уязвимым. Это возражение относится скорее к эпистемологическим сторонам дела, поскольку в любом случае самореференция какого-то рода имеет место при конструировании диагональных предложений согласно математической Диагональной лемме [8].

Концепция М. Даммита подвергается серьезным атакам, связанным с дуальной природой геделева предложения, которое интерпретируется и как метаматематическое утверждение, и как арифметическое утверждение. Ряд авторов, особенно Г. Серени, указывают на тот факт, что установление истинности геделева предложения как арифметического утверждения радикально отлично от установления этой истинности в случае метаматематической интерпретации [9]. Отличие лежит, главным образом, в эпистемологических аспектах предложения, в частности в непостижимости огромной сложности арифметического предложения, представленного геделевым предложением.

Наконец, выход за пределы исходной системы связан с так называемым семантическим аргументом в рамках дефляционной концепции истины. Не вдаваясь в подробности, следует сказать, что в данном случае философская мотивация при установлении истинности геделева предложения является еще более сильной, чем во втором случае. Таким образом, мы имеем в некотором роде иерархию резонов, от чисто математических ко все более философским. Но хотя первая точка зрения на истинность G опирается на самореференцию как математический прием при диагонализации, он все-таки апеллирует к понятиям, трактуемым и в философии, в частности к парадоксу лжеца.

Расхождение интересов философов и математиков в данном вопросе очевидно [10]. В этой связи представляет большой интерес мотивация чисто математического порядка, приводящая к аргументации об истинности геделева предложения, радикально отличной от упомянутых выше трех вариантов. П. Смит дал совсем новую трактовку проблемы, освободив первый самореферентный вариант объяснения истинности G от каких-либо философских посылок [11]. Ход его мысли вкратце таков.

Мы начинаем с элементарных арифметических операций и функций, которые являются п.р. (примитивно-рекурсивными). Их формализация подразумевает такую интерпретацию, при которой истинность формальных утверждений не вызывает ни малейших сомнений (как при совершении элементарных действий арифметики). Затем мы переходим к образованию все более сложных функций и, стремясь к конструированию геделева предложения, строим с помощью процедуры диагонализации такие функции, как *duag* и *Gld*. Способ построения таков, что обе функции являются п.р., и их истинность при принятой интерпретации столь же бесспорна, как и в отношении более простых функций. При формализации этого дискурса (с соблюдением условий представимости и пр.) мы получаем формулы формальной системы, скажем PA, которые истинны при соответствующей интерпретации. Хотя, по признанию Смита, G выглядит довольно экзотическим в качестве арифметического предложения, нет ничего странного в понятии истинности G. Действительно, он не усматривает никакого разрыва в способах присвоения истинности элементарным предложениям арифметики, таком же присвоении истинности при все более усложняющихся функциях (при сохранении их примитивно-рекурсивного характера) и, наконец, в присвоении истинности все также примитивно рекурсивным функциям *diag* и *Gld*.

Однако разрыв есть, и очень серьезный. Функции *diag* и *Gld* получаются диагонализацией, которая включает кодирование синтаксических элементов в арифметические, и при таком кодировании интуитивное понимание таких операций является затруднительным. Очевидно, что непрерывность в процедуре присвоения истинности функциям и выражениям теряется. И мы возвращаемся к проблеме, в каком смысле геделево предложение G можно считать арифметическим утверждением вообще, исходя из убеждения об интуитивной постижимости арифметических истин. Таким образом, этот путь установления истинности геделева предложения апеллирует скорее к математической интуиции, игнорируя при этом философские аспекты всего предприятия.

Таким образом, «простой» путь к установлению истинности геделева предложения упирается в проблемы интуитивного постижения процедуры диагонализации, поднимающих, в свою очередь, значительное число проблем относительно следствий кодирования в свете тезиса Д. Исааксона [12]. Очевидно, поэтому П. Смит предлагает два других варианта объяснения истинности геделева предложения. Первый из них связан с тем, что можно назвать «прыжком веры» в логико-математическом дискурсе, а второй с более тонкими мотивами о роли принципа рефлексии в метаматематике. В данной статье будет рассмотрен лишь первый вариант.

П. Смит обращает особое внимание на известное обстоятельство, что доказательство существования неразрешимого предложения зависит от посылок об обоснованности или непротиворечивости формальной системы. Предположение этих концепций придает различную силу формальным конструкциям, но в любом случае, говоря об истинности формальной системы, мы должны иметь гарантию либо обоснованности, либо непротиворечивости. Прежде всего П. Смит апеллирует к интуиции в отношении этих посылок. Оказывается, что интуиция подобного рода является на самом деле соответствующей верой математиков, на которой зиждется математическая практика. Это вполне обыденный прием в математическом дискурсе; скажем, вопросы о непротиворечивости в формальных системах PA или ZF действительно требуют обращения к уверенности математиков в этой непротиворечивости. Тогда более тщательное исследование вопроса об истинности геделева предложения требует анализа понятия веры, точнее, конкретных примеров этой веры, что является делом уже чисто эпистемологическим. Прибегая к типично философской метафоре, следует говорить о «прыжке веры». Этот термин Кьеркегора вполне уместен, поскольку тут действительно совершается прыжок от размышлений о формальных теориях арифметики к эпистемологическим вопросам об обосновании веры, или ее резонам. Последнее утверждение более уместно, потому что сама проблематика обоснования веры слишком обширна. Поэтому имеет смысл проанализировать конкретные аргументы обоснованности веры, подкрепленные аналогами из эпистемологии.

Коль скоро вера обычно ассоциируется с интенсиональностью контекста, вера в непротиворечивость и обоснованность формальной системы может полагаться интенсиональным аспектом первой теоремы Геделя о неполноте арифметики. Интересной особенностью такой интенсиональности является то, что вера в упомянутые вещи может зиждиться на разнообразных обстоятельствах математического дискурса, проще говоря, на разных резонах математической практики в пользу истинности такой веры. Такой подход противоречит как собственно метаматематическим соображениям, так и эпистемологическим аспектам понимания геделева предложения. Смит рассматривает четыре случая демонстрации истинности такого предложения.

Для чистоты эксперимента в качестве формальной системы рассматривается относительно слабая формальная система *Арифметика Робинсона Q*, в которой обнаруживаются неразрешимые утверждения (геделевы предложения G_Q). Эта система вбирает все элементарные арифметические истины, так что ее аксиомы можно считать общими истинами арифметики. Лежащая в основе системы Q логика первого порядка сохраняет истинность, так что Q – тривиально обоснованная теория. Далее, важно то, что неполнота Q, т.е. аргумент о недоказуемости GQ, является семантическим, отсюда следует, что вывод об истинности GQ, по выражению Смита, «банальный». Если же аргументация о недоказуемости GQ является синтаксической, истинность GQ не столь очевидна. При такого рода разночтениях следует прибегнуть к «продвинутому» варианту.

Сама по себе система Q не представляет интереса, помимо своего особого места в иерархии все более сильных формальных систем арифметики, приближающихся в своих выразительных возможностях к реальным математическим теориям. В качестве такого рода приближения можно рассмотреть систему Q (Г), которая получается добавлением к Q гипотезы Гольдбаха в качестве аксиомы. Эта гипотеза (любое четное число есть сумма двух простых чисел) является знаменитой пока не доказанной догадкой, для веры в истинность которой есть много оснований. Если гипотеза действительно истинна, тогда геделево предложение новой системы $G_{Q(\Gamma)}$ будет истинным в силу предыдущего случая. Этот пример представляет особый интерес, потому что истинность геделева предложения здесь является актом веры в истинность гипотезы Гольдбаха. Этот акт веры в некотором (неформальном) смысле обоснован двумя факторами: во-первых, чисто эмпирическим обстоятельством, что до сих пор не найдено контрпримера гипотезе; во-вторых, социологически обоснованным оптимизмом по поводу обнаружения в будущем ее доказательства. Но принимая во внимание эмпирический и социологический факторы, вряд ли можно считать истинное геделево предложение $G_{Q(\Gamma)}$ аналитическим, что, безусловно, требуется от истинных логических утверждений. Правда, есть сомнения в том, считать ли $G_{Q(\Gamma)}$ логическим (в силу его искусственности) или же математическим (в силу добавления к логическим конструкциям какого-то математического содержания). В любом случае вера в истинность геделева предложения не опирается на чисто логико-математические соображения.

Очевидно, осознавая некоторую слабость подобного рода аргументации, П. Смит представляет аналогичную систему $Q_{(\Phi)}$, только уже с добавлением знаменитой теоремы Ферма. Теперь речь идет не об обоснованности, а о непротиворечивости, потому что теорема Ферма уже доказана. Раз эта система непротиворечива, мы образуем в ней геделево предложение $G_{Q(\Phi)}$. Теперь его истинность не есть следствие просто непротиворечивости $Q_{(\Phi)}$, а зависит опять-таки от понимания истинности канонического геделева предложения [11. P. 171–173].

Этот аргумент не совсем корректен, потому что в серии предлагаемых Смитом примеров мы только подходим к пониманию истинности «канонического» геделева предложения, а здесь нам предлагается прямо обратиться к такому пониманию. Далее, как отмечается Смитом, ситуация осложняется тем, что доказательство теоремы Ферма включает разного рода инфинитарные элементы, далеко выходящие за пределы обычной арифметики, кроме того, само по себе доказательство является очень тонким и сложным. Теперь акт веры в истинность геделева предложения $G_{Q(\Phi)}$ обосновывается пониманием сложного доказательства, да еще и с использованием инфинитарных элементов. С учетом этого возникает вопрос, а какой вид будет иметь в этом случае арифметическое выражение $G_{Q(\Phi)}$? Вряд ли тут можно будет апеллировать к интуитивным истинам арифметики. Таким образом, здесь уже можно говорить не просто о «прыжке веры» в интуитивную арифметику, а о «суперпрыжке» через бесконечное.

Таким образом, у нас нет оснований для полного удовлетворения демонстрацией истинности геделева предложения через постепенный переход от элементарных арифметических истин ко все более сложным системам, потому что каждый из примеров является «прыжком» по отношению к предыдущему. В этом отношении представляет интерес позиция Р. Пенроуза: «У математиков нет абсолютно определенных убеждений относительно обоснованности или непротиворечивости используемых ими формальных систем… Не подвергаются ли их убеждения постепенному размыванию по мере того, как формальные системы все более удаляются от области феноменов, доступных непосредственному интуитивному… восприятию?» [13. С. 169].

Довольно интересно (имея в виду противоположные позиции Р. Пенроуза и П. Смита по поводу истинности геделева предложения), что оба дают практически одинаковый ответ на вопрос о соотношении истинности геделева предложения и предположения об обоснованности системы: «Любая позиция… в которой имеется убеждение в обоснованности [формальной системы] F, должна включать с себя и убежденность в истинности геделева предложения $G_{(F)}$… эта убежденность уже подразумевается неявно в исходной позиции, допускающей принятие истинности формальной системы F, пусть по началу это и не очевидно» [Там же. С. 170].

Р. Пенроуз также отмечает возможность «прыжков», говоря об уменьшении степени убежденности математика, когда обоснованность F кажется неопровержимой, а вот в обоснованности более сильной системы F* он будет лишь «практически уверен». Таким образом, возрастающая сложность формальных систем не демонстрирует непрерывности, которая гарантировала бы сохраняющуюся интуитивно истинность геделева предложения. На самом деле «мы вовсе не утверждаем, что высказывание $G_{(F)}$ будет непременно истинно для любой формальной системы F, мы утверждаем лишь, что высказывание $G_{(F)}$ настолько же достоверно, насколько достоверна любая другая истина, получаемая применением правила самой системы F» [Там же. С. 175–176].

Таким образом, мы начинаем отходить от интуитивной истинности геделевых предложений в пользу обоснованности правил формальной системы. И для подтверждения этого нам нужно дальнейшее варьирование формальных систем с целью демонстрации истинности геделевых предложений. Одним из интересных случаев в этом варьировании является предположение не об обоснованности формальной системы, а о ее непротиворечивости. С точки зрения установления причин истинности геделева предложения более сильным предположением является обоснованность системы, когда все доказуемые утверждения истинны. Какой будет ситуация, при которой обоснованность системы заменяется на ее непротиворечивость? Если и при таком ослаблении требований к системе можно будет говорить об истинности геделева предложения, это означает, что его истинность имеет гораздо более основательный характер, чем просто артефакт формальной системы. Как замечает Пенроуз, «полагая систему F непротиворечивой, мы знаем, что в высказывании $G_{(F)}$ подразумевается все же наличие некоего истинного смысла. Это, однако, происходит лишь в том случае, если символы, составляющие в действительности формальное выражение, обозначаемое «$G_{(F)}$», имеют подразумеваемые значения. Если эти символы интерпретировать как-то иначе, то полученная в результате интерпретация $G_{(F)}$ вполне может оказаться ложной» [Там же. С. 177].

Однако, как считает Смит, из этого затруднения можно выйти за счет той самой переинтерпретации, о которой говорит Пенроуз. Рассмотрим систему Арифметики Пеано, к которой в качестве аксиомы добавлено отрицание геделева предложения, а именно: $PA^* = PA + \neg G$. В этом случае мы имеем случай непротиворечивой, но ω-противоречивой системы. Существование таких систем вполне доказуемо. Хотя такие системы непротиворечивы, они не являются обоснованными. Но простой непротиворечивости PA достаточно для синтаксического доказательства ее неполноты, а стало быть, для демонстрации истинности ее канонического геделева предложения G.

Известно, что $PA^* = PA + \neg G$ имеет нестандартную интерпретацию. В нестандартной интерпретации G не является истинным предложением. Однако при более общей трактовке понятия интерпретации формальной системы этот «дефект» можно исправить. Нестандартная интерпретация означает, что помимо натуральных чисел в область квантификации входят еще какие-то элементы, не образующие структуры ряда натуральных чисел. Эти элементы могут быть использованы для той самой переинтерпретации, когда символы, согласно Пенроузу, подразумевают другие значения. Тогда можно спасти ситуацию и вновь объявить, несмотря ни на что, геделево предложение G истинным. Смит приводит пример такой процедуры [11. P. 69].

Можно показать, что в Q не выводится формула $\forall x\ (0 + x = x)$. Доказательство состоит в нахождении такой модели, в которой все формулы Q истинны, а означенная формула ложна. Однако можно найти такую интерпретацию арифметических операций и модификацию области действия кванторов. Так, к натуральным числам добавляются два инородных элемента. При такой (ненамеренной) переинтерпретации теоремы и аксиомы Q будут истинными. Далее, образуем новую систему Q# путем добавления к Q отрицания утверждения $\forall x\ (0 + x = x)$ в качестве аксиомы. Ясно, что Q# будет необоснованной, но при описанной выше переинтерпретации она будет непротиворечивой. И этого факта достаточно для признания соответствующего геделева утверждения Q# истинным.

Все рассмотренные четыре случая являют собой впечатляющее разнообразие мотивов, по которым формальная теория считается обоснованной или непротиворечивой. Это означает, что признание истинности геделевых предложений дело чисто математическое: «Наши примеры также раскрывают, что в то время как наши основания для принятия истинности геделевых предложений могут быть самыми различными, причины, которые мы выдвигаем [в пользу этого]… имеют характер полностью обычных математических рассуждений» [Ibid. P. 173].

Фактически стратегия Смита сводится к тому, что истинность геделева предложения полагается бесспорной для целого ряда «нормальных» и «странных» формальных систем арифметики, для которых даже при нестандартной интерпретации можно верить если не в обоснованность, то в непротиворечивость. Последней вполне достаточно для существования геделева истинного предложения, которое оказывается просто вездесущим. При этом вера в непротиворечивость никак не увязывается с проблемой истинности кроме как чисто экстенсионального понимания соотношения непротиворечивости и истинности G: истинность антецедента при сохраняющей истинность логике обусловливает истинность консеквента. Никаких «независимых» аргументов об истинности G, которые перечислены в начале данной статьи, не принимается в расчет.

Но сами эти причины при этом имеют характер веры в непротиворечивость или обоснованность формальных систем, а не логического аргумента. В этом случае следует признать, что эта вера является стандартной частью математического дискурса, не поддающейся рациональной аргументации, на чем настаивает Пенроуз. И в этой связи очень странно звучит заключение Смита: «Когда мы в первый раз сталкиваемся с идеей неполноты, то гадаем, а нет ли некоторого особенного, превосходящего правила когнитивного постижения чисел, которое лежит в основе нашей способности распознавать геделевы предложения корректными арифметическими утверждениями. …Эти спекуляции должны сейчас казаться совершенно посторонними» [11. P. 173].

Последнее заключение является поразительно непродуманным. Аргументация Смита опирается на два предположения. Во-первых, для всех относительно слабых формальных систем арифметики, схватывающих элементарные арифметические истины, доказывается их неполнота с соответствующим существованием геделева неразрешимого предложения. Во-вторых, истинность геделева предложения обусловливается как раз схватыванием элементарных арифметических истин. Оба предположения можно подвергнуть сомнению, поскольку они основаны на отказе признать двойственное понимание природы геделева предложения. На самом деле, геделево предложение G является одновременно метаматематической конструкцией и арифметическим предикатом. Неполнота относительно слабых формальных систем арифметики доказывается метаматематическим путем, и соответствующая геделева конструкция G понимается метаматематически, со всеми интересными следствиями и эквивалентностями. Что касается арифметического предиката G, то он чрезвычайноно сложный и вряд ли подлежит когнитивному осмыслению [9]. К тому же и сам переход в осмыслении природы G от метаматематического его смысла к арифметическому представляет значительный «прыжок», который становится источником трудностей в понимании этой проблематики. Так что вряд ли проблематичность полагания геделевых предложений корректными арифметическими утверждениями является «посторонней».

Таким образом, интенсиональные аспекты математического дискурса проявляются, в частности, в приписывании истинности геделеву предложению Первой теоремы Геделя о неполноте арифметических формальных систем в силу веры в непротиворечивость. Фактически это означает «прыжок веры» из экстенсионального математического дискурса в интенсиональный дискурс. Но такой «прыжок» не является оправданным, если рассматривать геделево предложение в качестве обоснования прыжка, поскольку такое обоснование оторвано от эпистемологических проблем понимания природы арифметического аспекта геделева предложения.

Литература

1. *Giaquinto M.* The Search for Certainty: A Philosophical Account of Foundations of Mathematics. Oxford : Oxford University Press, 2002.

2. *Putnam H.* Mathematics without Foundations // Philosophy Mathematics / eds. P. Benacerraf, H. Putnam. Cambridge : Cambridge University Press, 1983. P. 295–311.

3. *Boolos G.* The Logic of Provaility. Cambridge : Cambridge University Press, 1993.

4. *Peregrin J.* Intensionality in Mathematics // Truth, Existence, and Explanation / eds. M. Piazza, G. Pulcini. Springer, 2018. P. 57–70.
5. *Raatikainen P.* On the Philosophical Relevance of Gögel's Incompleteness Theorem // Revue international de philosophie. 2005. Vol. 59, № 4 (234). P. 513–539.
6. *Dummett M.* The Philosophical Significance of Gödel's Theorem // Truth and Other Enigmas. Cambridge : Harvard University Press, 1978. P. 186–201.
7. *Tennant N.* Deflationism and the Gödelian Phenomena // Mind. 2002. Vol. 111, № 443. P. 563–564.
8. *Halbach V., Visser A.* Self-Reference in Arithmetic I // The Review of Symbolic Logic. 2014. Vol. 7, № 4. P. 671–691.
9. *Sereny G.* How do We Know that the Godel Sentence of a Consistent Theory Is True? // Philosophia Mathematica. 2011. Vol. 19, № 1. P. 47–73.
10. *Smorynski C.* The Development of Self-Reference: Löb's Theorem // Perspectives on the History of Mathematical Logic / ed. T. Drucker. Berlin : Birkhäuser. P. 110–133.
11. *Smith P.* Introduction to Gödel's Theorems. Second Edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2013.
12. *Isaacson D.* Arithmetical Truth and Hidden Higher-Order Concepts // The Philosophy of Mathematics / ed. W.D. Hart. N.Y. : Oxford University Press, 1996. P. 203–224.
13. *Пенроуз Р.* Тени разума. Ч. 1. Понимание разума и новая физика. М. : Институт компьютерных исследований, 2003.

Vitaliy V. Tselishchev, Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation).
E-mail: leitval@gmail.com
Aleksandr V. Khlebalin, Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation).
E-mail: sasha_khl@mail.ru

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science. 2019. 48. pp. 24–34.
DOI: 10.17223/1998863X/48/3

INTENSIONAL MODUS IN MATHEMATICAL DISCOURSE: A "JUMP OF BELIEF" AND MATHEMATICAL PRACTICE

Keywords: intensionality of mathematics; Gödel sentence; consistency; belief.

The intensionality of mathematical discourse is vividly represented by the features of the proof for Gödel's Second Incompleteness Theorem. An undecidable Gödel sentence can have various forms of expression with different meanings. The necessary consideration of this kind of intensionality in usually extensional metamathematical statements is connected with the structural features of the construction of a Gödel sentence. Especially important are the general characteristics of the Gödelian construction, which combines both the Gödel sentence *G1* of the First Incompleteness Theorem and *G2*. In particular, establishing the truth of *G1* is related to the intensional nature of mathematical discourse to the same extent as in the case of *G2*. The analysis of the epistemological aspects of the intensionality of the First Theorem is possible through the study of the truth conditions for the Gödel sentence. These epistemological consequences include the consideration of the problem of belief in some basic epistemological attitudes in mathematical discourse. It is known that the proof of the existence of an undecidable sentence depends on the assumptions about the validity or consistency of the formal system. The assumption of these concepts gives different strengths to formal constructions, but, in any case, speaking about the truth of the formal system, we must have a guarantee of either validity or consistency, which is intuition based on the belief of mathematicians rooted in mathematical practice. There are two components to establishing the truth of the Gödel sentence. First, for all relatively weak formal systems of arithmetic, grasping elementary arithmetic truths, their incompleteness is proved with the corresponding existence of a Gödel undecidable sentence. Secondly, the truth of the Gödel sentence is determined precisely by the capture of elementary arithmetic truths. In fact, *G* is both a metamathematical construction and an arithmetic predicate. The incompleteness of relatively weak formal systems of arithmetic is proved in a metamathematical way, and the corresponding Gödel's construction *G* is understood metamathematically. As for the arithmetic predicate *G*, it is monstrously complex and hardly subject to cognitive understanding. In addition, the transition itself in understanding the nature of *G* from its metamathematical meaning to the arithmetic one represents a significant "jump", which is a source of difficulties in understanding this problem. Thus, the intensional aspects of

mathematical discourse are manifested particularly in the attribution of truth to *G1* by virtue of belief in consistency. In fact, this means a "jump of belief" from extensional mathematical discourse to intensional one.

References

1. Giaquinto, M. (2002) *The Search for Certainty: A Philosophical Account of Foundations of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

2. Putnam, H. (1983) Mathematics without Foundations. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds) *Philosophy Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press. pp. 295–311.

3. Boolos, G. (1993) *The Logic of Provaility*. Cambridge: Cambridge University Press.

4. Peregrin, J. (2018) Intensionality in Mathematics. In: Piazza, M. & Pulcini, G. (eds) *Truth, Existence, and Explanation*. Springer. pp. 57–70.

5. Raatikainen, P. (2005) On the Philosophical Relevance of Gögel's Incompleteness Theorem. *Revue International De Philosophie*. 4(234). pp. 513–539.

6. Dummett, M. (1978) *Truth and Other Enigmas*. Cambridge: Harvard University Press. pp. 186─201.

7. Tennant, N. (2002) Deflationism and the Gödelian Phenomena. *Mind*. 111(443). pp. 563–564. DOI: 10.1093/mind/fzq035

8. Halbach, V. & Visser, A. (2014) Self-Reference in Arithmetic I. *The Review of Symbolic Logic*. 7(4). pp. 671–691.

9. Sereny, G. (2011) How do We Know that the Godel Sentence of a Consistent Theory Is True? *Philosophia Mathematica*. 19(1). pp. 47–73. DOI: 10.1093/philmat/nkq028

10. Smorynski, C. (2008) The Development of Self-Reference: Löb's Theorem. In: Drucker, T. (ed.) *Perspectives on the History of Mathematical Logic*. Berlin: Birkhäuser. pp. 110–133. DOI: 10.1007/978-0-8176-4769-8

11. Smith, P. (2013) *Introduction to Gödel's Theorems*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press.

12. Isaacson, D. (1996) Arithmetical Truth and Hidden Higher-Order Concepts. In: Hart, W.D. (ed.) *The Philosophy of Mathematics*. New York: Oxford University Press. pp. 203–224.

13. Penrose, R. (2003) *Teni razuma* [Shadows of the Mind]. Translated from English by A. Logunov, N. Zubchenko. Moscow: Institute for Computer Science Research.