

МАТЕМАТИКА

УДК 531.011
 DOI 10.17223/19988621/58/1

MSC 53Z05

С.О. Гладков, С.Б. Богданова

О КЛАССЕ ДВУХМЕРНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КРИВЫХ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Получена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая семейство геодезических линий в двухмерном случае, характеризуемых полярными координатами, при учете действия как силы тяжести, так и дисипативных сил. Найдено численное решение этой системы уравнений в условиях, когда действует одна только сила тяжести. Показано существенное отличие найденного семейства линий, описывающих кратчайшие расстояния в неевклидовом пространстве, от случая свободного движения тел в поле силы тяжести, когда траектория движения представляет собой обычную параболу в евклидовом.

Ключевые слова: геодезическая, тензор Римана, динамические уравнения.

При решении большого класса физических задач из областей механики, гидродинамики, теории упругости, общей теории относительности и др., всегда выбираются такие ковариантные преобразования координат, которые позволяют самым рациональным способом находить решение поставленных проблем. В этой связи, имеющей прямое отношение непосредственно к нашей задаче, надо отметить, что при изучении динамики любого криволинейного движения в декартовой системе координат всегда удобно перейти к подвижному базису на самой траектории движения (см. работы [1–3]). Этот подход позволяет решать определенный класс динамических задач весьма рациональным методом, позволяющим учитывать любые силы сопротивления (см. рис. 1, изображенный в декартовых координатах $x - y$, где показана криволинейная траектория движения, представляющая собой в общем случае некоторую изогнутую линию, форма которой находится в рамках уже конкретно поставленной задачи).

Надо сказать, что при написании динамических уравнений движения тела в полярных координатах $r(\phi)$ в рамках задачи, проиллюстрированной на рис. 1, ее решение качественно ничем не будет отличаться от решений, приведенных в упомянутых выше работах. Этот факт заставил нас предположить, что в случае перехода от динамических уравнений движения, записанных для плоского декартова пространства, в котором свертка тензора кривизны Римана R равна нулю, в кристаллическое пространство, в котором $R \neq 0$, динамические уравнения движения качественно довольно сильно изменятся (см. ниже). Именно поэтому, на наш взгляд, большой интерес будет представлять собой вывод динамических уравнений,

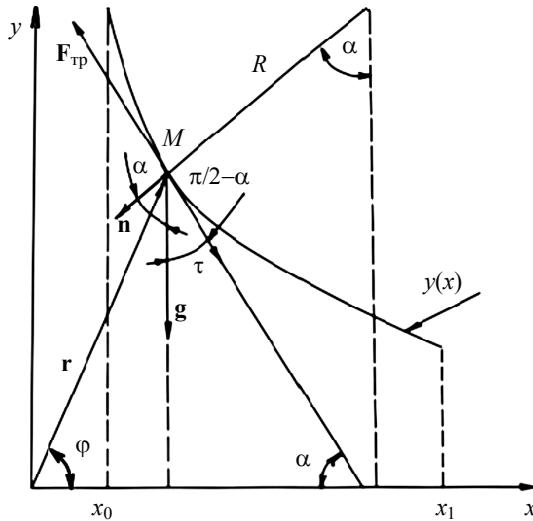


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи: $\mathbf{r} = i\mathbf{x} + j\mathbf{y}$ – радиус-вектор, проведенный из начала координат в произвольную точку наблюдения M ; i, j – единичные орты в направлении осей x, y соответственно; \mathbf{n}, τ – мгновенный ортогональный базис в текущей точке M ; \mathbf{g} – ускорение силы тяжести; R – радиус кривизны траектории в точке M . Условно x_0, x_1 – начало и конец траектории, ϕ – полярный угол.

Fig. 1. Schematic of the problem geometry. $\mathbf{r} = i\mathbf{x} + j\mathbf{y}$ is the radius vector drawn from the coordinate origin to an arbitrary observation point M ; i, j are the unitary vectors in the directions of the x and y axes, respectively; \mathbf{n}, τ are the instantaneous orthogonal basis at the current point M ; and \mathbf{g} is the acceleration of gravity. R is the radius of the trajectory curvature at the point M . Conventionally, x_0 and x_1 are the beginning and the end of the trajectory and ϕ is the polar angle.

полученных в римановом двухмерном пространстве для случая движении тела с массой m по геодезической линии, при учете сил сопротивления и силы тяжести. В процессе ее решения мы будем использовать весьма удобные в этом случае полярные координаты r, ϕ .

1. Уравнения динамики при движении тела по геодезической линии в двухмерном случае

Геодезическая линия для контравариантного вектора $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ с компонентами

$v^i = \frac{dx^i}{dt}$ согласно, например, [4, 5] подчиняется уравнению

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (1)$$

где ds – элемент длины траектории, а по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование. Γ_{kl}^i – символ Кристоффеля второго рода [4].

Его связь с символом Кристоффеля первого рода Γ_{ikl} определяется простым линейным соотношением $\Gamma_{kl}^i = g^{is}\Gamma_{skl}$, где g^{ik} – контравариантный метрический тензор. Он определяется соотношением

$$g^{ik} = \frac{\partial x_n^i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n^k}{\partial x_n},$$

а символ Кристоффеля первого рода определяется как

$$\Gamma_{ikl} = \frac{\partial x_n^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x_n^k}{\partial x^l \partial x_n}, \quad (2)$$

где ковариантные координаты x_i задаются преобразованиями $x_n = x_n(x^k)$.

В рассматриваемом нами случае полярной системы координат они имеют простой вид

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi \quad (3)$$

с элементом длины

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (4)$$

Разделив (4) на квадрат элемента времени dt^2 , находим

$$v^2 = v^r v^r + v^\varphi v^\varphi, \quad (5)$$

где контравариантные компоненты скорости есть

$$v^r = \dot{r}, \quad v^\varphi = r\dot{\varphi}, \quad (6)$$

а точка традиционно означает дифференцирование по времени. С учетом поля силы тяжести уравнения геодезической линии несколько видоизменяются, и согласно уравнению (1), мы имеем в этом случае следующие уравнения для вектора скорости $v^i = \frac{dx^i}{dt}$:

$$\frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{kl}^i v^k v^l = g^i + \frac{F^i}{m}, \quad (7)$$

где g^i – составляющие ускорения свободного падения в двухмерном пространстве r, φ , а F^i – составляющие некоторой силы (см. ниже). При получении (7) в уравнении (1) было учтено линейное соотношение $ds = v dt$. Если с учетом скажанного записать уравнения (7) по компонентам, то легко получить следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{v}^r + \Gamma_{kl}^r v^k v^l = g^r + \frac{F^r}{m}, \\ \dot{v}^\varphi + \Gamma_{kl}^\varphi v^k v^l = g^\varphi + \frac{F^\varphi}{m}. \end{cases} \quad (8)$$

Нетрудно показать, что отличные от нуля компоненты символа Кристоффеля будут только следующие:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = \Gamma_{r\varphi\varphi} = -\frac{1}{r}, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \Gamma_{\varphi r\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi r} = \frac{1}{r}. \quad (9)$$

С учетом (9) и (6), а также равенства $v_i = v^i$ из (8) получается искомая система уравнений

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = g \sin \varphi - \frac{F_{fr}}{m} \sin \gamma, \\ \frac{d}{dt}(r\dot{\varphi}) + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -g \cos \varphi - \frac{F_{fr}}{m} \cos \gamma, \end{cases} \quad (10)$$

где F_{fr} представляет собой силу общего сопротивления (сухого и вязкого, как это сделано, например, в работах [1, 3]) при условии, что движение происходит по геодезической, а угол $\gamma = \alpha - \varphi$ (см. рис. 1).

Раскрывая в (10) производную, находим с учетом сказанного

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = g \sin \varphi + \frac{F_{fr}}{m} \cos(\alpha - \varphi), \\ r\ddot{\varphi} + 3\dot{r}\dot{\varphi} = -g \cos \varphi - \frac{F_{fr}}{m} \sin(\alpha - \varphi). \end{cases} \quad (11)$$

Что касается силы сопротивления F_{fr} , фигурирующей в уравнениях (10) и (11), введем ее также, как это сделано и в работе [3], то есть по формуле

$$F^i = k_1^{ik} N^k + k_2 v^i, \quad (12)$$

где k_1^{ik} – компоненты тензора сухого трения, k_2 – коэффициент вязкого трения, N^i – компоненты силы реакции, которые находятся как

$$N^i = mn^i \left(\frac{v^2}{\rho} + g \cos \alpha \right), \quad (13)$$

где ρ – мгновенный радиус кривизны траектории.

Заметим, что описание движения тела по реальной плоской линии, уравнение которой мы хотим найти из условия того, что ее длина в криволинейном пространстве является наименьшей, то есть геодезической, существенно отличается от задачи о брахистохроне, решенной в работе [1], где форма кривой ищется из иного условия, а именно из условия минимальности времени скатывания. Понятно, что для обеих задач класс траекторий движения будет абсолютно разным.

В настоящем сообщении мы не будем учитывать диссипативную составляющую, а остановимся на анализе более простой ситуации, когда сила сопротивления отсутствует, то есть $F^i = 0$.

2. Анализ уравнений и их решение

Уравнения (11) при этом существенно упростятся, и мы получим тогда

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = g \sin \varphi, \\ r\ddot{\varphi} + 3\dot{r}\dot{\varphi} = -g \cos \varphi. \end{cases} \quad (14)$$

Еще раз подчеркнем, что решение уравнений (14) позволяет найти зависимость $r(\varphi)$, описывающую наиболее короткий путь, по которому должно перемещаться тело в условиях действия только силы тяжести, но при условии, что рассматриваемое нами пространство искривлено, потому что в противном случае все символы Кристоффеля были бы равны нулю. Под сказанным мы подразумеваем следующее. Как известно [4, 5], термин «плоское пространство» означает равенство нулю скалярной кривизны Римана, то есть $R = R_{kki}^i = 0$, где R_{knl}^i – тензор Римана, определяемый как

$$R_{knl}^i = \frac{\partial \Gamma_{kn}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^n} + \Gamma_{ns}^i \Gamma_{kl}^s - \Gamma_{ls}^i \Gamma_{kn}^s. \quad (15)$$

Поэтому свертка по индексам дает

$$R = R_{kki}^i = \frac{\partial \Gamma_{kk}^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ks}^i \Gamma_{ki}^s - \Gamma_{is}^i \Gamma_{kk}^s, \quad (16)$$

и согласно (9) получаем отсюда, что кривизна

$$R = \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^r}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{r\varphi}^\varphi}{\partial r} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r \Gamma_{\varphi r}^\varphi - \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \frac{2}{r^2} \neq 0. \quad (17)$$

Далее. В том случае, когда решается задача о движении тела под действием силы тяжести, но в обычной полярной системе координат, то предварительно их удобно записать в декартовых координатах в виде $\ddot{x}_1 = \ddot{x} = 0$, $\ddot{x}_2 = \ddot{y} = -g$, а затем подставить сюда преобразования (3). В результате мы получаем два уравнения, которые после простых арифметических действий, связанных со сложением и вычитанием их с предварительным домножением на $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, будут иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = g \sin \varphi, \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -g \cos \varphi. \end{cases} \quad (18)$$

Как видим, разница между нижними уравнениями систем (14) и (18) весьма велика (они отличаются множителями 2 и 3). Таким образом, в кривом пространстве при движении по геодезической в поле одной только силы тяжести форма траектории при свободном движении будет довольно сильно отличаться от обычной параболы в евклидовом пространстве.

В том случае, если сила тяжести отсутствует, то правая часть уравнений (14) должна быть положена равной нулю, и решение будет вполне естественным, а именно $\dot{r} = \dot{\varphi} = 0$, то есть, как и должно быть, тело стоит на месте в точке с координатами $M_0 = M(r_0, \varphi_0)$.

Для численного решения уравнений (14) удобно ввести безразмерные функции $U = \frac{r}{a}$, $V = \varphi$ (где a – некоторый линейный размер) и безразмерный аргумент $\tau = \omega_0 t$, где частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$.

В результате уравнения (14) преобразуются в такие:

$$\begin{cases} U'' - UV'^2 = \sin V, \\ UV'' + 3UV' = -\cos V, \end{cases} \quad (19)$$

где «штрих» означает дифференцирование по безразмерному τ .

Для начальных условий, выбранных в виде

$$U(0) = 0, \quad V(0) = 0, \quad U'(0) = A, \quad V'(0) = B, \quad (20)$$

в результате численного интегрирования уравнений (19) получаются параметрические зависимости $U(\tau)$, $V(\tau)$, а также искомая траектория геодезической в поле силы тяжести, проиллюстрированные рис. 2 и 3.

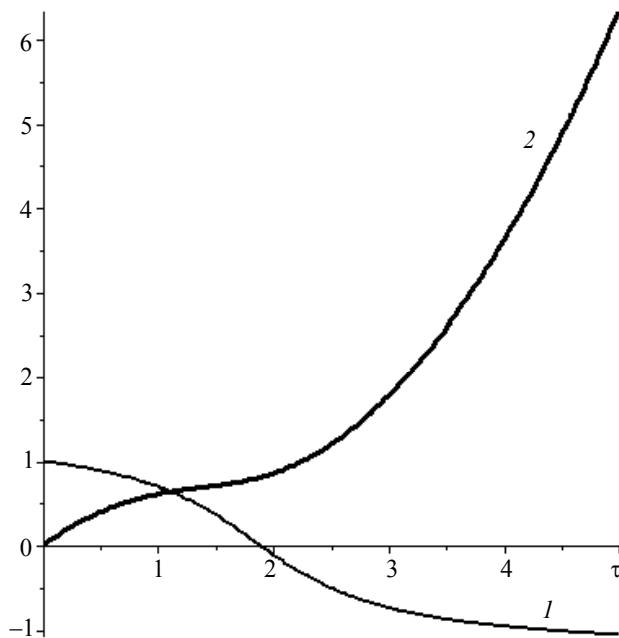


Рис. 2. Параметрические зависимости $x(\tau)$ – кр. 1, $y(\tau)$ – кр. 2
при начальных условиях $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0, y'(0) = 1$

Fig. 2. Parametric dependences (1) $x(\tau)$, (2) $y(\tau)$
at initial conditions $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0, y'(0) = 1$

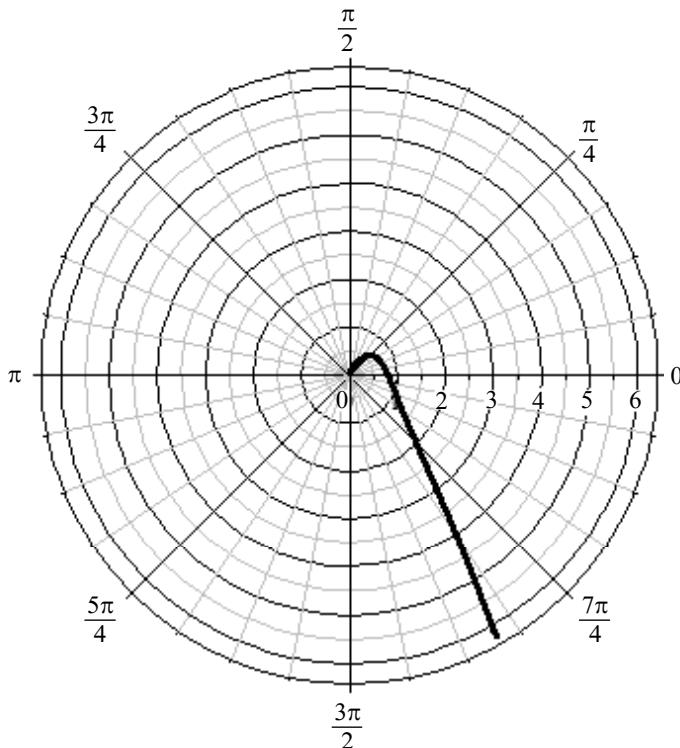


Рис. 3. Траектория геодезической в поле силы тяжести
при начальных условиях $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0, y'(0) = 1$

Fig. 3. Trajectory of the geodesic line in the field of the force of gravity
under the initial conditions $x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0, y'(0) = 1$

Как видно из рис. 3, зависимость $y(x)$ довольно сильно отличается от обычной параболы, описывающей свободное движение тела в поле силы тяжести, брошенного под некоторым углом к горизонту.

Найденная зависимость $r(\varphi)$ ($U(V)$) представляет собой искомую кратчайшую траекторию в кривом пространстве в поле силы тяжести, уравнение которой можно получить только из решения дифференциального уравнения (1) или (14), но не из (18).

Заключение

Таким образом, в данной работе:

1. Описано движение материального тела, движущегося по геодезической линии в кривом двухмерном пространстве под действием одной только силы тяжести, и показано, что ее форма существенно отличается от параболической;
2. Найдено численное решение полученной системы нелинейных дифференциальных уравнений и проиллюстрировано их решение в декартовых координатах (см. рис. 3). Как видно из этого графика, приведенная зависимость иллюстрирует ее сильное отклонение от параболической кривой, характерной для случая свободного падения тела в поле силы тяжести в евклидовом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // УЗ ФФ МГУ. 2016. № 1. 161101-1-5.
2. Гладков С.О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // УЗ ФФ МГУ. 2016. № 4. 164101-1-5.
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // УЗ ФФ МГУ. 2017. № 1. 171101-1-5.
4. Мак Коннел Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматлит, 1963. 411 с.
5. Ландау Л.Д., Либкиц Е.М. Теория поля. М.: Физматлит, 2003. 536 с.

Статья поступила 06.09.2018 г.

Gladkov S.O., Bogdanova S.B.(2019) ON THE CLASS OF TWO-DIMENSIONAL GEODESIC CURVES IN THE FIELD OF THE GRAVITY FORCE *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 58. pp. 5–13

DOI 10.17223/19988621/58/1

Keywords: geodesic, Riemann tensor, dynamical equations.

In this paper, without using methods of variational calculus, the problem of finding a geodesic in a curved space with respect to gravitational and dissipative forces was solved. Solving it, we use the most convenient polar coordinates r, φ . The basic assumption relies on the fact that dynamical motion equations written in curvilinear coordinates in which the Riemann curvature R is different from zero rather strongly differ from similar equations in the case of a flat space.

To obtain the required equation of a geodesic arc, a contravariant vector of the velocity $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ was introduced. For this vector, with regard to all active forces, the following equation was solved:

$$\frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{kl}^i v^k v^l = g^i + \frac{F^i}{m},$$

g^i are acceleration components of the gravitational force of the two-dimensional $r-\varphi$ space, and the dissipative force is

$$F^i = k_1^{ik} N^k + k_2 v^i,$$

k_1^{ik} are tensor components of the dry friction, k_2 is the coefficient of the viscous friction, and N^i are the force components.

Provided that the scalar curvature of Riemann is different from zero,

$$R = \frac{\partial \Gamma_{\varphi\varphi}^r}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{r\varphi}^\varphi}{\partial r} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r \Gamma_{\varphi r}^\varphi - \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \frac{2}{r^2} \neq 0,$$

a nonlinear system of differential equations governing the required geodesic was obtained in the polar coordinates r and φ :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = g \sin \varphi + \frac{F_{fr}}{m} \cos(\alpha - \varphi), \\ r\ddot{\varphi} + 3\dot{r}\dot{\varphi} = -g \cos \varphi - \frac{F_{fr}}{m} \sin(\alpha - \varphi), \end{cases}$$

where $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{i}x + \mathbf{j}y|$ is the length of the radius-vector drawn from the origin of coordinates to the observation point M lying on the geodesic line $y = y(x)$, φ is the polar angle of the reference point, and α is the acute angle between the tangent drawn to the point of M and to axis of abscissas.

The analytical and numerical solutions of this system in the absence of the resistance forces, i.e. $F_{fr} = 0$, showed the great difference between the found geodesic and the parabola typical for the case of free fall of bodies in the gravitational field in Euclidean space.

AMS Mathematical Subject Classification: 53Z05

GLADKOV Sergei Oktyabrinovich (Doctor of Physics and Mathematics, Moscow Aviation Institute, Department of Applied software and mathematical methods, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

BOGDANOVA Sofiya Borisovna (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow Aviation Institute, Department of Applied software and mathematical methods, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

REFERENCES

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometric phase transition in the problem of brachistochrone. *Memoirs of the Faculty of Physics, Moscow State University*. 1. pp. 161101-1-5.
2. Gladkov S.O. (2016) On the trajectory of a moving body coming into liquid at an arbitrary angle. *Memoirs of the Faculty of Physics, Moscow State University*. 4. pp. 164101-1-5.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) Generalized dynamic equations of the plane curvilinear motion of a material body on a trench with account of friction forces (their numerical analysis in some special cases). *Memoirs of the Faculty of Physics, Moscow State University*. 1. pp. 171101-1-5.
4. McConnell J. (1957) *Application of tensor analysis*. New York: Dover Publications, INC.
5. Landau L., Lifshitz E. (2003) *Field theory*. Moscow: Fizmatlit.

Received: September 6, 2018