УДК 514.7 MSC 51F15; 14L24
DOI 10.17223/19988621/58/3

О.И. Рудницкий

КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ $W(K_5)$

Продолжена работа по построению канонических систем базисных инвариантов для конечных унитарных примитивных групп, порождённых отражениями. А именно: построена в явном виде каноническая система базисных инвариантов для конечной унитарной примитивной группы $W(K_5)$, порождённой отражениями, в пятимерном унитарном пространстве.

Ключевые слова: *унитарное пространство, отражение, группа отражений, алгебра инвариантов, базисный инвариант, каноническая система.*

Пусть в n-мерном унитарном пространстве U^n задана координатная система началом O и ортонормированным базисом $\mathbf{e}_i$ $(i=\overline{1,n})$; вектор $\mathbf{x}=\{x_1,\dots,x_n\}$. Отражением σ порядка l в пространстве U^n называется унитарное преобразование порядка l, множество неподвижных точек которого является плоскостью размерности $n-1$. Эту плоскость называют гиперплоскостью отражения или симметрии. Обозначим через G конечную неприводимую группу, порождённую отражениями σ относительно гиперплоскостей с общей точкой O. Классификация групп G впервые получена в работе [1].

Действие группы G в кольце $R=\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ многочленов от n переменных над полем комплексных чисел определим с помощью равенства $g\cdot f=f(g^{-1}\mathbf{x})$, где $g\in G$ и $f=f(\mathbf{x})=f(x_1,\dots,x_n)\in R$. Многочлен $f\in R$ называется инвариантом группы G или G-инвариантом, если $g\cdot f=f$ для всех $g\in G$.

Множество всех G-инвариантных многочленов $f\in R$ образует алгебру I^G, которая порождается n алгебраически независимыми однородными многочленами f_i степеней m_i $(i=\overline{1,n})$ [1]; не нарушая общности, будем считать, что $m_1\le m_2\le\dots\le m_n$. Система многочленов $\{f_1, \dots, f_n\}$ называется системой базисных инвариантов группы G.

Для заданной группы G система базисных инвариантов определяется неоднозначно, но их степени (числа m_i) определяются однозначно и называются показателями группы. Выдвинув дополнительные условия, можно среди бесконечного множества систем базисных инвариантов выбрать особые базисы, удовлетворяющие ранее выдвинутым условиям.

Так, Л. Флатто (см., например, [2]) при изучении свойства среднего значения для непрерывных вещественных функций рассматривал специальные системы базисных инвариантов для конечных вещественных групп G, порожденных отражениями, в вещественном евклидовом пространстве. Такие системы базисных инвариантов в [3] были названы «каноническими системами базисных инвариантов». В работе [4] понятие «канонической системы базисных инвариантов» было перенесено на группы G унитарного пространства U^n, а также предложен метод построения канонических систем, который в [5] был реализован при построении канонической системы базисных инвариантов для бесконечного семейства импримитивных групп $G(m, p, n)$.

Ранее (см. [6 – 9]) автором был реализован другой метод построения в явном виде канонических систем базисных инвариантов для конечных унитарных примитивных групп, порождённых отражениями в пространствах U^n размерности $n = 2, 3, 4$.

В настоящей статье приведен метод построения в явном виде канонической системы базисных инвариантов для группы $W(K_5)$ – единственной конечной унитарной примитивной невещественной группы, порождённой отражениями в пространстве U^5.

Постановка задачи

Система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ базисных инвариантов группы G называется **канонической системой**, если она удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных [4]:

$$\overline{f_i}(\partial) f_j = 0, i, j = \overline{1, n}\ (i < j), \tag{1}$$

где дифференциальный оператор $\overline{f_i}(\partial)$ получается из многочлена f_i заменой всех его коэффициентов на комплексно сопряжённые, а переменных x_k – на $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

Цель настоящей работы – построить в явном виде каноническую систему базисных инвариантов для унитарной группы $W(K_5)$, порождённой отражениями в пространстве U^5, и, таким образом, с учётом результатов работ [6 – 9], завершить построение в явном виде канонических систем базисных инвариантов всех конечных унитарных примитивных групп G, порождённых отражениями, в пространствах U^n размерности $n \leq 5$.

Схема предложенного и реализованного в [6 – 9] метода (см. также [10]) состоит в следующем:

1. Возьмём известную систему $\{J_{m_1}, \ldots, J_{m_n}\}$ базисных инвариантов группы G (см., например, [11]).

2. Построим новую систему базисных G-инвариантных многочленов $\tilde{I}_{m_p}$ $(p = \overline{1, n})$ в виде многочленов подходящей степени с неопределёнными коэффициентами a_α от базисных инвариантов J_{m_k}. Так как многочлен $\tilde{I}_{m_p}$ должен быть базисным, то форма J_{m_p} должна обязательно присутствовать в записи этого многочлена.

3. Подставляя в многочлены $\tilde{I}_{m_p}$ явные выражения базисных инвариантов J_{m_k}, получим однородные многочлены I_{m_p} степени m_p относительно перемен-

ных $x_1,\dots,x_n$. При этом коэффициент у каждого одночлена формы I_{m_p} есть линейная комбинация неопределённых коэффициентов a_α.

4. Обозначим $f_1 = I_{m_1} = J_{m_1}$ и последовательно применим условие (1) к формам $I_{m_p}, p > 1$.

5. На каждом шаге уравнения (1) приводят к системе линейных однородных уравнений относительно неопределённых коэффициентов a_α. Находим общее решение полученной системы линейных уравнений и вводим обозначение $f_p = \hat{I}_{m_p}, p > 1$, где $\hat{I}_{m_p}$ – форма I_{m_p} для найденных значениях a_α.

Построенная таким образом система базисных инвариантов $\{f_1, \dots, f_n\}$ является ***канонической системой.***

Для вычислений может быть использован программный пакет, например система компьютерной алгебры Maple.

Каноническая система для группы $W(K_5)$

В пространстве U^5 существует только одна конечная невещественная примитивная группа G, порождённая отражениями. Это группа $W(K_5)$ порядка 72·6!, порождённая отражениями второго порядка относительно 45 4-мерных плоскостей [1].

Введём в пространстве U^5 ортонормированную систему координат с началом O и ортонормированным базисом $\mathbf{e}_i$ ($i = \overline{1,5}$); вектор $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i \mathbf{e}_i$. Тогда группа $W(K_5)$ порождается отражениями второго порядка относительно 4-плоскостей с уравнениями [12]

$$x_1 - \omega^2 x_2 = 0,\ x_t - x_{t+1} = 0\ (t = \overline{1,3}),\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \sqrt{2} x_5 = 0,$$

где $\omega = -\frac{1}{2} + \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}$ – первообразный корень третьей степени из единицы; $\varepsilon = \sqrt{-1}$.

Уравнения всех 45 4-мерных плоскостей, отражения относительно которых принадлежат группе $W(K_5)$, имеют вид

$$x_i - \omega^{k_0} x_j = 0,\ \sum_{i=1}^{4} \omega^{k_i} x_i + \sqrt{2}\omega^{k_5} x_5 = 0,$$

где $\sum_{i=1}^{4} k_i + 2k_5 \equiv 0 (\bmod 3),\ i, j = \overline{1,4}\,(i < j);\ k_0, k_i, k_5 = \overline{1,3}$.

Множество их нормальных векторов (система корней группы) состоит из 270 векторов

$$\pm \frac{\varepsilon\omega^t}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_i - \omega^{k_0} \mathbf{e}_j),\ \pm \frac{\omega^t}{\sqrt{6}} \left(\sum_{i=1}^{4} \omega^{k_i} \mathbf{e}_i + \sqrt{2}\omega^{k_5} \mathbf{e}_5\right),\ t = \overline{1,3},$$

и инвариантно относительно группы $W(K_5)$ [12]. Степени m_i = 4, 6, 10, 12, 18 [1].

В работах [11, 12], используя многочлены Погорелова [11], автор построил следующую систему базисных инвариантов группы $W(K_5)$:

$$J_4 = 12\prod x_i + x_5^4 - 2\sqrt{2}x_5\sum x_i^3 ; \qquad (2)$$

$$J_6 = -\sum x_i^6 + 10\sum_{i<j} x_i^3x_j^3 + x_5^6 + 5\sqrt{2}x_5^3\sum x_i^3 + 90x_5^2\prod x_i ; \qquad (3)$$

$$J_{10} = 2(-\sum x_i^6 + \sum_{i<j} x_i^3x_j^3 + 4x_5^6 - \sqrt{2}x_5^3\sum x_i^3)\prod x_i - 4x_5^4\sum_{i<j} x_i^3x_j^3 +$$
$$+18x_5^2\prod x_i^2 - \sqrt{2}x_5(\sum x_i^6x_j^3 - 6\sum_{i<j<k} x_i^3x_j^3x_k^3) ;$$

$$J_{12} = 61\sum x_i^{12} - 4400\sum x_i^9x_j^3 + 18942\sum_{i<j} x_i^6x_j^6 + 4620\sum_{j<k} x_i^6x_j^3x_k^3 + 92400\prod x_i^3 +$$
$$+16x_5^{12} + 880\sqrt{2}x_5^9\sum x_i^3 + 47520x_5^8\prod x_i + 1848x_5^6(\sum x_i^6 + 20\sum_{i<j} x_i^3x_j^3) +$$
$$+166320\sqrt{2}x_5^5(\sum x_i^3)\prod x_i + 1247400x_5^4\prod x_i^2 + 110\sqrt{2}x_5^3(\sum x_i^9 + 84\sum x_i^6x_j^3 +$$
$$+1680\sum_{i<j<k} x_i^3x_j^3x_k^3) + 5940x_5^2(4\sum x_i^6 + 35\sum_{i<j} x_i^3x_j^3)\prod x_i + 124740\sqrt{2}x_5(\sum x_i^3)\prod x_i^2 ;$$

$$J_{18} = 820\sum x_i^{18} - 223176\sum x_i^{15}x_j^3 + 5072613\sum x_i^{12}x_j^6 - 13297570\sum_{i<j} x_i^9x_j^9 -$$
$$-46410\sum_{j<k} x_i^{12}x_j^3x_k^3 - 510510\sum x_i^9x_j^6x_k^3 - 2144142\sum_{i<j<k} x_i^6x_j^6x_k^6 -$$
$$-2042040(5\sum x_i^6 + 21\sum_{i<j} x_i^3x_j^3)\prod x_i^3 - 64x_5^{18} - 13056\sqrt{2}x_5^{15}\sum x_i^3 -$$
$$-1175040x_5^{14}\prod x_i - 148512x_5^{12}(\sum x_i^6 + 20\sum_{i<j} x_i^3x_j^3) - 26732160\sqrt{2}x_5^{11}(\sum x_i^3)\prod x_i -$$
$$-441080640x_5^{10}\prod x_i^2 - 97240\sqrt{2}x_5^9(\sum x_i^9 + 84\sum x_i^6x_j^3 + 1680\sum_{i<j<k} x_i^3x_j^3x_k^3) -$$
$$-15752880x_5^8(4\sum x_i^6 + 35\sum_{i<j} x_i^3x_j^3)\prod x_i - 1323241920\sqrt{2}x_5^7(\sum x_i^3)\prod x_i^2 -$$
$$-18564x_5^6(\sum x_i^{12} + 220\sum x_i^9x_j^3 + 924\sum_{i<j} x_i^6x_j^6 + 18480\sum_{j<k} x_i^6x_j^3x_k^3 + 369600\prod x_i^3) -$$
$$-3675672\sqrt{2}x_5^5(2\sum x_i^9 + 60\sum x_i^6x_j^3 + 525\sum_{i<j<k} x_i^3x_j^3x_k^3)\prod x_i - 82702620x_5^4(5\sum x_i^6 +$$
$$+28\sum_{i<j} x_i^3x_j^3)\prod x_i^2 - 204\sqrt{2}x_5^3(\sum x_i^{15} + 455\sum x_i^{12}x_j^3 + 5005\sum x_i^9x_j^6 + 100100\sum_{j<k} x_i^9x_j^3x_k^3 +$$
$$+420420\sum_{j<k} x_i^6x_j^6x_k^3 + 8408400(\sum x_i^3)\prod x_i^3) - 90x_5^2(1428\sum x_i^{12} + 102102\sum x_i^9x_j^3 +$$
$$+350064\sum_{i<j} x_i^6x_j^6 + 3063060\sum_{j<k} x_i^6x_j^3x_k^3)\prod x_i - 2412159750x_5^2\prod x_i^4 -$$
$$-250614\sqrt{2}x_5(10\sum x_i^9 + 165\sum x_i^6x_j^3 + 924\sum_{i<j<k} x_i^3x_j^3x_k^3)\prod x_i^2 ;$$

индексы $i, j, k = \overline{1,4}$ различны в каждом члене каждой суммы и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы.

Используем эту систему базисных инвариантов для построения канонической системы $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ базисных инвариантов группы $W(K_5)$.

Пусть $f_1 = I_4 = J_4$. Так как $\tilde{I}_6 = a_1 J_6$, то соотношение (1) запишем в виде: $\overline{f_1}(\partial) J_6 = 0$. Оно выполняется тождественно, поэтому, с точностью до постоянного множителя, $f_2 = J_6$.

Совокупность всех базисных инвариантов десятой степени группы $W(K_5)$ можно записать в виде

$$\tilde{I}_{10} = a_1 J_{10} + a_2 J_4 J_6 ,$$

где a_1, a_2 – неопределённые коэффициенты.

Соотношение (1), которое имеет вид

$$\overline{f_1}(\partial) I_{10} = 0, \ \overline{f_2}(\partial) I_{10} = 0 ,$$

приводит к уравнению $4a_1 + 177a_2 = 0$ для неопределённых коэффициентов a_1, a_2.

Следовательно, $a_1 = 177c$, $a_2 = -4c$, и, с точностью до постоянного множителя, форма $f_3 = \hat{I}_{10}$ имеет вид

$$\begin{aligned} f_3 = {} & 18(17\sum x_i^6 + 7\sum_{i<j} x_i^3 x_j^3)\prod x_i + 4x_5^{10} + 12\sqrt{2}x_5^7 \sum x_i^3 - 1008x_5^6 \prod x_i - \\ & -84x_5^4(\sum x_i^6 - 7\sum_{i<j} x_i^3 x_j^3) - 126\sqrt{2}x_5^3(\sum x_i^3)\prod x_i + 1134x_5^2 \prod x_i^2 + \\ & +\sqrt{2}x_5(8\sum x_i^9 + 105\sum x_i^6 x_j^3 - 1302\sum_{i<j<k} x_i^3 x_j^3 x_k^3) . \end{aligned} \tag{4}$$

Далее, семейство всех базисных инвариантов двенадцатой степени группы $W(K_5)$ запишем в виде

$$\tilde{I}_{12} = a_1 J_{12} + a_2 J_6{}^2 + a_3 J_4{}^3 .$$

При этом форма I_{12} принадлежит искомой канонической системе базисных инвариантов, если удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\overline{f_1}(\partial) I_{12} = 0, \ \overline{f_2}(\partial) I_{12} = 0, \ \overline{f_3}(\partial) I_{12} = 0 .$$

Третье уравнение выполняется тождественно, а первые два приводят к линейной системе 12 уравнений относительно трёх неопределённых коэффициентов. Её общее решение:

$$a_1 = -1487c, \ a_2 = 224532c, \ a_3 = -69300c.$$

Следовательно, f_4 (форма $\hat{I}_{12}$), с точностью до постоянного множителя, имеет вид

$$\begin{aligned} f_4 = {} & 505\sum x_i^{12} + 7744\sum x_i^9 x_j^3 - 19866\sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 + 126588\sum_{j<k} x_i^6 x_j^3 x_k^3 - \\ & -462000\prod x_i^3 + 496x_5^{12} + 5104\sqrt{2}x_5^9 \sum x_i^3 - 123552x_5^8 \prod x_i + \end{aligned}$$

$$+1848x_5^6(13\sum x_i^6-64\sum_{i<j}x_i^3x_j^3)-133056\sqrt{2}x_5^5(\sum x_i^3)\prod x_i- \qquad (5)$$

$$-249480x_5^4\prod x_i^2-22\sqrt{2}x_5^3(223\sum x_i^9-1680\sum x_i^6x_j^3+34440\sum_{i<j<k}x_i^3x_j^3x_k^3)-$$

$$-1188x_5^2(304\sum x_i^6-175\sum_{i<j}x_i^3x_j^3)\prod x_i-474012\sqrt{2}x_5(\sum x_i^3)\prod x_i^2 .$$

Множество всех базисных инвариантов группы $W(K_5)$ восемнадцатой степени запишем так:

$$\tilde{I}_{18}=a_1J_{18}+a_2J_6{}^3+a_3J_4{}^3J_6+a_4J_6J_{12}+a_5J_{10}J_4{}^2 .$$

Тогда I_{18} принадлежит искомой канонической системе базисных инвариантов, если, согласно (1), удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\overline{f}_1(\partial)I_{18}=0,\ \overline{f}_2(\partial)I_{18}=0,\ \overline{f}_3(\partial)I_{18}=0,\ \overline{f}_4(\partial)I_{18}=0 .$$

Она приводит к линейной системе 53 уравнений относительно пяти неопределённых коэффициентов $a_l,\ l=\overline{1,5}$. Её общее решение:

$$a_1=-\ 1465797839c,\ a_2=10312822362843c,\ a_3=-\ 6931667257515c,$$

$$a_4=-\ 150080820435c,\ a_5=193212438408990c.$$

Следовательно, форму $f_5=\hat{I}_{18}$, с точностью до постоянного множителя, можно записать так:

$$f_5=588128\sum x_i^{18}+28757676\sum x_i^{15}x_j^3+275308761\sum x_i^{12}x_j^6-168006410\sum_{i<j}x_i^9x_j^9-$$

$$-1993448730\sum_{j<k}x_i^{12}x_j^3x_k^3+649879230\sum x_i^9x_j^6x_k^3-10817196390\sum_{i<j<k}x_i^6x_j^6x_k^6-$$

$$-2042040(3355\sum x_i^6-6321\sum_{i<j}x_i^3x_j^3)\prod x_i^3-267584x_5^{18}-9142464\sqrt{2}x_5^{15}\sum x_i^3+$$

$$+540518400x_5^{14}\prod x_i-297024x_5^{12}(331\sum x_i^6-670\sum_{i<j}x_i^3x_j^3)+$$

$$+2131889760\sqrt{2}x_5^{11}(\sum x_i^3)\prod x_i-20730790080x_5^{10}\prod x_i^2-$$

$$-388960\sqrt{2}x_5^9(242\sum x_i^9-5187\sum x_i^6x_j^3+100380\sum_{i<j<k}x_i^3x_j^3x_k^3)+$$

$$+78764400x_5^8(116\sum x_i^6-119\sum_{i<j}x_i^3x_j^3)\prod x_i+6285399120\sqrt{2}x_5^7(\sum x_i^3)\prod x_i^2+$$

$$+37128x_5^6(740\sum x_i^{12}-37675\sum x_i^9x_j^3+234696\sum_{i<j}x_i^6x_j^6-919380\sum_{j<k}x_i^6x_j^3x_k^3+ \qquad (6)$$

$$+4065600\prod x_i^3)+1837836\sqrt{2}x_5^5(1894\sum x_i^9-11220\sum x_i^6x_j^3-$$

$$-13125\sum_{i<j<k}x_i^3x_j^3x_k^3)\prod x_i+1654052400x_5^4(4\sum x_i^6-91\sum_{i<j}x_i^3x_j^3)\prod x_i^2-$$

$$-102\sqrt{2}x_5^3(36208\sum x_i^{15}+2211755\sum x_i^{12}x_j^3-26751725\sum x_i^9x_j^6+$$

$$+158208050\sum_{j<k} x_i^9x_j^3x_k^3-254984730\sum_{i<j} x_i^6x_j^6x_k^3+1030029000(\sum x_i^3)\prod x_i^3)-$$

$$-9180x_5^2(125419\sum x_i^{12}+332332\sum x_i^9x_j^3-6227364\sum_{i<j} x_i^6x_j^6+$$

$$+1456455\sum_{j<k} x_i^6x_j^3x_k^3)\prod x_i-214682217750x_5^2\prod x_i^4-$$

$$-2756754\sqrt{2}x_5(3160\sum x_i^9-7395\sum x_i^6x_j^3+6216\sum_{i<j<k} x_i^3x_j^3x_k^3)\prod x_i^2 .$$

Таким образом, каноническая система базисных инвариантов для группы $W(K_5)$ состоит из форм (2) – (6).

Заключение

В статье построена в явном виде каноническая система базисных инвариантов для унитарной группы $W(K_5)$, порождённой отражениями в пространстве U^5. Таким образом, с учётом результатов, полученных автором ранее, завершена работа по построению в явном виде канонических систем базисных инвариантов всех невещественных примитивных групп G пространств U^n для $n \le 5$.

Отметим, что среди конечных примитивных невещественных групп G осталась не рассмотренной единственная группа – группа Митчелла $W(K_6)$ порядка $108\cdot 9!$, порождённая в пространстве U^6 отражениями второго порядка относительно 126 5-мерных плоскостей; степени $m_i = 6, 12, 18, 24, 30, 42$ [1]. Система базисных инвариантов группы $W(K_6)$ в явном виде приведена автором в работе [13]. Методом, используемым в данной статье, автором построены в явном виде базисные инварианты канонической системы группы $W(K_6)$ степеней 6, 12 и 18. Задача построения в явном виде оставшихся базисных инвариантов канонической системы этой группы пока не решена, что обусловлено трудностями вычислительного характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shephard G.C.*, *Todd J.A.* Finite unitary reflection groups // Can. J. Math. 1954. V. 6. No. 2. P. 274–304. DOI: 10.4135/CJM-1954-028-3.
2. *Flatto L.* Basic sets of invariants for finite reflection groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74. P. 730–734. DOI: 10.1090/S0002-9904-1968-12017-8.
3. *Iwasaki K.* Basic invariants of finite reflection groups // J. Algebra. 1997. V. 195. No. 2. P. 538–547. DOI: 10.1006/jabr.1997.7066.
4. *Nakashima N.*, *Terao H.*, *Tsujie S.* Canonical systems of basic invariants for unitary reflection groups // Canad. Math. Bull. 2016. V. 59. No. 3. P. 617–623. DOI: 10.4153/CMB-2016-031-7.
5. *Tsujie S.* Construction of canonical systems of basic invariants for finite reflection groups. The thesis (doctoral). Hokkaido. 2014. 40 p. DOI: 10.14943/doctoral.k11536.
6. *Рудницкий О.И.* Канонические системы базисных инвариантов для групп симметрий многогранников Гессе // Таврический вестник информатики и математики. 2017. № 3 (36). С. 73–78.
7. *Рудницкий О.И.* Канонические системы базисных инвариантов для унитарных групп $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$ // Таврический вестник информатики и математики. 2018. № 1 (38). С. 89–96.

8. *Рудницкий О.И.*, *Бочко А.Ю.*, *Рольская Е.Н.* Канонические системы базисных инвариантов для примитивных групп, порождённых отражениями, на унитарной плоскости // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сб. научных трудов МИКМО-2018. Симферополь. 2018. С. 59–71.
9. *Рудницкий О.И.* Канонические системы базисных инвариантов конечных примитивных групп отражений четырёхмерного унитарного пространства // Динамические системы. 2019. Т. 9(37). № 1.
10. *Talamini V.* Canonical bases of invariant polynomials for the irreducible reflection groups of types E_6, E_7 and E_8 // J. Algebra. 2018. V. 503. P. 590–603. DOI: 10.1016/j.jalgebra. 2018.01.017.
11. *Рудницкий О.И.* Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1990. 115 с.
12. *Rudnitskii O.I.* Some properties of the basis invariants of the unitary group $W(K_5)$ // Journal of Mathematical Sciences. 1990. 51. No. 5. P. 2570–2574. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01104176.
13. *Rudnitskii O.I.* Basis invariants of the Mitchell group generated by reflections in six-dimensional unitary space // J. Soviet Mathematics. 1990. V. 65. No. 1. P. 1479–1482. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01105303.

Статья поступила 04.12.2018 г.

Rudnitskii O.I. (2019) CANONICAL SYSTEM OF BASIC INVARIANTS FOR UNITARY GROUP $W(K_5)$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 58. pp. 32–40

DOI 10.17223/19988621/58/3

Keywords: Unitary space, reflection, reflection groups, algebra of invariants, basic invariant, canonical system of basic invariants.

For a finite group G generated by reflections in the n-dimensional unitary space U^n, the algebra I^G of all G-invariant polynomials $f(x_1, \ldots, x_n)$ is generated by n algebraically independent homogeneous polynomials $f_i \in I^G$ with $\deg f_i = m_i$ $(i = \overline{1,n})$; $m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_n$ (Shephard G.C., Todd J.A.).

According to Nakashima N., Terao H., and Tsujie S., system $\{f_1, \ldots, f_n\}$ of basic invariants of the group G is said to be canonical if it satisfies the following system of partial differential equations:

$$\overline{f}_i(\partial) f_j = 0, i, j = \overline{1,n}\ (i < j),$$

where the differential operator $\overline{f}_i(\partial)$ is obtained from polynomial f_i if each its coefficient is replaced by the complex conjugate and each variable x_k is replaced by $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

In the previous works, the author obtained in an explicit form canonical systems of basic invariants for all finite primitive unitary groups G generated by reflections in unitary spaces of dimensional 2, 3, and 4.

In this paper, canonical systems of basic invariants were constructed in an explicit form for unitary groups $W(K_5)$ generated by reflections in space U^5.

AMS Mathematical Subject Classification: 51F15; 14L24

RUDNITSKII Oleg Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation). E-mail: oirud58@gmail.com

REFERENCES

1. Shephard G.C., Todd J.A. (1954) Finite unitary reflection groups. *Can. J. Math.* 6(2). pp. 274–304. DOI: 10.4135/CJM-1954-028-3
2. Flatto L. (1968) Basic sets of invariants for finite reflection groups. *Bull. Amer. Math. Soc.* 74. pp. 730–734. DOI: 10.1090/S0002-9904-1968-12017-8.
3. Iwasaki K. (1997) Basic invariants of finite reflection groups. *J. Algebra*. 195(2). pp. 538–547. DOI: 10.1006/jabr.1997.7066.
4. Nakashima N., Terao H., Tsujie S. (2016) Canonical systems of basic invariants for unitary reflection groups. *Canad. Math. Bull.* 59(3). pp. 617–623. DOI: 10.4153/CMB-2016-031-7.
5. Tsujie S. (2014) *Construction of canonical systems of basic invariants for finite reflection groups. The thesis (doctoral).* Hokkaido. 40 p. DOI: 10.14943/doctoral.k11536.
6. Rudnitskii O.I. (2017) Kanonicheskie sistemy bazisnykh invariantov dlya grupp simmetrii mnogogrannikov Gesse [Canonical systems of basic invariants for symmetry groups of Hessian polyhedrons] // *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 3(36). pp. 73–78.
7. Rudnitskii O.I. (2018) Kanonicheskie sistemy bazisnykh invariantov dlya unitarnykh grupp $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$ [Canonical systems of basic invariants for unitary groups $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$]. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* 1(38). pp. 89–96.
8. Rudnitskii O.I., Bochko A. Yu., Rolskaya E. N. (2018) Kanonicheskie sistemy bazisnykh invariantov dlya primitivnykh grupp, porozhdennykh otrazheniyami, na unitarnoy ploskosti [Canonical systems of basic invariants for primitive groups generated by reflections on the unitary plane] // *Mathematics*, *informatics*, *computer science*, *modeling*, *education: Collection of papers MICMO-2018*. Simferopol. P. 59–71.
9. Rudnitskii O.I. (2019) Kanonicheskie sistemy bazisnykh invariantov konechnykh primitivnykh grupp otrazheniy chetyrekhmernogo unitarnogo prostranstva [Canonical system of basic invariants for finite primitive reflection groups of four-dimensional unitary space] // *Dinamicheskie Sistemy – Dynamical Systems*. 37(1).
10. Talamini V. (2018) Canonical bases of invariant polynomials for the irreducible reflection groups of types E_6, E_7 and E_8. *Journal of Algebra.* 503. pp. 590–603. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2018.01.017.
11. Rudnitskii O.I. (1990) *Algebraicheskie poverkhnosti s konechnymi gruppami simmetrii v unitarnom prostranstve* [Algebraic surfaces with finite symmetry groups in unitary space]. Thesis for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences. Minsk. 115 p.
12. Rudnitskii O.I. (1990) Some properties of the basis invariants of the unitary group $W(K_5)$. *Journal of Mathematical Sciences.* 51(5). pp. 2570–2574. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01104176.
13. Rudnitskii O.I. (1990) Basis invariants of the Mitchell group generated by reflections in six-dimensional unitary space. *Journal of Soviet Mathematics.* 65(1). pp. 1479–1482. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01105303.

Received: December 4, 2018