ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 Математика и механика № 58

УДК 514.76
DOI 10.17223/19988621/58/4

MSC 53C15, 53C30, 53C25, 22E25

Н.К. Смоленцев

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПОЧТИ ПАРА-ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ НА НЕКОТОРЫХ ШЕСТИМЕРНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Из 34 классов шестимерных нильпотентных групп Ли имеется пять групп, на которых не существует ни симплектических, ни комплексных структур. В данной работе на таких группах Ли G естественным образом определены почти комплексные и почти пара-комплексные структуры и соответствующие метрики, которые оказались полуплоскими псевдоримановыми.

Ключевые слова: *нильмногообразия, шестимерные нильпотентные алгебры Ли, левоинвариантные пара-комплексные структуры, эйнштейновы многообразия, полуплоские структуры.*

1. Введение

Левоинвариантная кэлерова структура на группе Ли G – это тройка (g, ω, J), состоящая из левоинвариантной римановой метрики g, левоинвариантной симплектической формы ω и ортогональной левоинвариантной комплексной структуры J, причем $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ для любых левоинвариантных векторных полей X и Y на G. Поэтому такую структуру на группе G можно задать парой (ω, J), где ω – симплектическая форма, а J – комплексная структура, *согласованная* с ω, т.е. такая, что $\omega(JX,JY) = \omega(X,Y)$. Если $\omega(X,JX) > 0$, $\forall\ X \# 0$, то получается кэлерова метрика, а если условие положительности не выполняется, то $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ является псевдоримановой метрикой и тогда (g, ω, J) называется *псевдокэлеровой* структурой на группе Ли G. Классификация вещественных 6-мерных нильпотентных алгебр Ли, допускающих инвариантные комплексные структуры, получена в работе [1]. Показано, что только 18 классов допускают левоинвариантные комплексные структуры. Авторами [2] получена классификация симплектических структур на 6-мерных нильпотентных алгебрах Ли. Из 34 классов изоморфных связных односвязных шестимерных нильпотентных групп Ли только 26 классов допускают левоинвариантные симплектические структуры. Условие существования левоинвариантной положительно определенной кэлеровой метрики на группе Ли G накладывает серьезные ограничения на структуру ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Например, в работе [3] показано, что такая алгебра Ли не может быть нильпотентной за исключением абелевого случая. Хотя нильпотентные группы Ли и нильмногообразия (за исключением тора) не допускают левоинвариантных кэлеровых метрик, но на таких многообразиях могут существовать левоинвариантные псевдоримановы кэлеровы метрики. В работе [4] показано, что 14 классов симплектических шестимерных нильпотентных групп Ли допускают согласованные комплексные структуры и, поэтому, определяют псевдокэлеровы метрики. Более полное исследование свойств кривизны таких псевдокэлеровых и почти псевдокэлеровых структур приведено в работах [5, 6].

Как уже упоминалось, 26 из 34 классов шестимерных нильпотентных групп Ли допускают левоинвариантные симплектические структуры. Из оставшихся восьми классов несимплектических групп Ли, пять групп Ли G^i не допускают также и комплексных структур, Их алгебры Ли $\mathfrak{g}_i$ приведены ниже:

$\mathfrak{g}_1$: (0, 0, 0, 0, 12, 15+34).

$\mathfrak{g}_2$: (0, 0, 0, 12, 23, 14+35),

$\mathfrak{g}_3$: (0, 0, 0, 12, 13, 14+35),

$\mathfrak{g}_4$: (0, 0, 12, 13, 14, 34 –25),

$\mathfrak{g}_5$: (0, 0, 12, 13, 14+23, 34 –25).

Здесь используется задание алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в виде m-ки чисел ij, основанной на последовательности дифференциалов $(0, 0, de^3, ..., de^m)$ базисных 1-форм, в которой используется сокращенная запись $e^{ij} = e^i \wedge e^j$ как ij. Например, запись (0, 0, 0, 0, 12, 34) обозначает алгебру Ли со структурными уравнениями:

$$de^1 = de^2 = de^3 = 0,\ de^4 = 0,\ de^5 = e^1 \wedge e^2 \text{ и } de^6 = e^3 \wedge e^4.$$

В данной работе изучаются именно эти группы Ли. Целью работы является определение на рассматриваемых группах Ли новых левоинвариантных геометрических структур, компенсирующих, в некотором смысле, отсутствие симплектических и комплексных структур. На всех таких группах Ли G^i любая левоинвариантная замкнутая 2-форма ω является вырожденной. Предложены естественные способы ослабить требование замкнутости для сохранения невырожденности ω, причем так, что 3-форма $d\omega$ также является невырожденной и выполняется свойство $d\omega^2 = \omega \wedge d\omega = 0$. В результате мы получаем совместимую [7] пару (ω,ρ), где в качестве 3-формы ρ выступает $d\omega$, которая определяет полуплоскую структуру. Мы приводим явный вид соответствующих псевдо почти эрмитовых полуплоских и почти пара-псевдоэрмитовых полуплоских структур. Псевдориманова метрика является эйнштейновой. Показано, что на всех рассматриваемых группах Ли полуплоская структура рассматриваемого типа $(\omega, d\omega)$ не определяет псевдориманову метрику на $G^i \times I$ с группой голономии из особой некомпактной группы G_2^*. Данная работа является продолжением статьи [8].

Для любой нильпотентной группы Ли G с рациональными структурными константами существует дискретная подгруппа Γ, такая, что $M = \Gamma \backslash G$ – компактное многообразие, называемое нильмногообразием. Поэтому все результаты имеют место и для соответствующих шестимерных компактных нильмногообразий.

2. Предварительные сведения

Пусть G – вещественная нильпотентная группа Ли и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Нильпотентные группы Ли интересны тем, что из них можно образовать компактные нильмногообразия вида $\Gamma \backslash G$, где G – связная и односвязная нильпотентная группа Ли, а Γ – кокомпактная дискретная подгруппа. При этом когомологии де Рама изоморфны когомологиям алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $H^p_{dR}(\Gamma / G) \cong H^p(\mathrm{g}),\ p \geq 0$. Кроме того, на нильпотентных группах Ли (и нильмногообразиях) не существует левоинвариантных положительно определенных кэлеровых метрик [3]. Однако могут существовать левоинвариантные псевдоримановы кэлеровы метрики [4].

2.1. Левоинвариантные геометрические структуры

Левоинвариантная почти комплексная структура на группе Ли G есть левоинвариантное поле эндоморфизмов J: $TG \to TG$ касательного расслоения TG, обладающее свойством $J^2 = -Id$. Поскольку J определяется линейным оператором J на алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_eG$, то для простоты мы будем говорить, что J – это инвариантная почти комплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Для того чтобы почти комплексная структура J определяла комплексную структуру на группе Ли G, необходимо и достаточно (по теореме Ньюлендера – Ниренберга, [9]) обращения в нуль тензора Нейенхейса:

$$[JX,JY] - [X,Y] - J\,[JX,Y] - J[X,JY] = 0, \text{ для любых } X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Левоинвариантная симплектическая структура на группе Ли G – это левоинвариантная замкнутая невырожденная 2-форма ω. Она задается 2-формой $\boldsymbol{\omega}$ максимального ранга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Замкнутость формы эквивалентна условию

$$\omega([X,Y],Z) - \omega([X,Z],Y) + \omega([Y,Z],X) = 0,\ \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}.$$

В этом случае алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и группу Ли G будем называть просто симплектическими.

Левоинвариантная кэлерова структура на группе Ли G – это тройка (g,J,ω), состоящая из левоинвариантной римановой метрики g, ортогональной левоинвариантной комплексной структуры J и левоинвариантной симплектической формы, причем $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$, $\forall X,Y \in \mathfrak{g}$. Такую структуру на группе Ли G можно задать парой (ω,J), где ω – симплектическая форма, а J – комплексная структура, согласованная с ω, т.е. такая, что $\omega(JX, JY) = \omega(X,Y)$, $\forall X,Y \in \mathfrak{g}$. Если $\omega(X,JY) > 0$, $\forall X \neq 0$, то получается кэлерова метрика $g(X,Y) = \omega(X,JY)$, а если условие положительности не выполняется, то $g(X,Y)$ является псевдоримановой метрикой и тогда (g,J,ω) называется псевдокэлеровой структурой на группе Ли G.

2.2. Конструкция Хитчина

Если 2-форма ω незамкнута, то можно рассматривать 3-форму $d\omega$. В работе [10] Хитчин определил понятие *невырожденности* (стабильности) для 3-форм ρ и построил линейный оператор K_ρ, квадрат которого пропорционален тождественному оператору Id. Напомним его основные конструкции.

Пусть V – 6-мерное вещественное векторное пространство, μ – форма объема на V и $\Lambda^3 V^*$ – 20-мерное линейное пространство кососимметрических полилинейных 3-форм на V. Для 3-формы $\rho \in \Lambda^3 V^*$ и вектора $X \in V$ возьмем внутреннее произведение $\iota_X\rho \in \Lambda^2 V^*$. Тогда $\iota_X\rho\wedge\rho \in \Lambda^5 V^*$. Естественное спаривание внешним произведением $V^* \otimes \Lambda^5 V^* \to \Lambda^6 V^* \cong \mathbf{R}\mu$ определяет изоморфизм A: $\Lambda^5 V^* \cong V$, и, используя это, мы определяем линейное преобразование $K_\rho : V \to V$ как

$$K_\rho(X) = A(\iota_X\rho\wedge\rho).$$

Другими словами, $\iota_{K\rho(X)}\mu = \iota_X\rho\wedge\rho$.

Определим $\lambda(\rho) \in \mathbf{R}$ через след квадрата K_ρ, $\lambda(\rho) = \operatorname{tr} K_\rho^2 / 6$. Форма ρ называется *невырожденной* (или стабильной), если $\lambda(\rho) \neq 0$. В работе [10] показано, что если $\lambda(\rho) \neq 0$, тогда

• $\lambda(\rho) > 0$ тогда и только тогда, когда $\rho = \alpha + \beta$, где α, β – вещественные разложимые 3-формы и $\alpha\wedge\beta \neq 0$;

• $\lambda(\rho) < 0$ тогда и только тогда, когда $\rho = \alpha + \overline{\alpha}$, где $\alpha \in \Lambda^3(V^*\otimes\mathbf{C})$ есть комплексная разложимая 3-форма и $\alpha \wedge \overline{\alpha} \neq 0$.

Линейное преобразование K_ρ обладает следующими свойствами: $\operatorname{tr} K_\rho = 0$ и $K_\rho^2 = \lambda(\rho) Id$. В случае $\lambda(\rho) < 0$ вещественная 3-форма ρ определяет структуру J_ρ комплексного векторного пространства на векторном пространстве V следующим образом:

$$J_\rho = \frac{1}{\sqrt{-\lambda(\rho)}} K_\rho ,$$

а если $\lambda(\rho) > 0$, то 3-форма ρ определяет пара-комплексную структуру J_ρ, т.е., $J_\rho^2 = 1$, $J_\rho \neq 1$ на векторном пространстве V по аналогичной формуле:

$$J_\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\rho)}} K_\rho .$$

Напомним, что структура почти произведения называется *паракомплексной*, если собственные подпространства имеют одинаковую размерность.

Элементы $GL(V)$-орбиты 3-формы ρ, соответствующие $\lambda(\rho) > 0$, имеют стабилизатор $SL(3,\mathbf{R})\times SL(3,\mathbf{R})$ в $GL^+(V)$. Элементы орбиты, соответствующей $\lambda(\rho) < 0$ имеют стабилизатор $SL(3,\mathbf{C})$ в $GL^+(V)$.

В обоих случаях для формы ρ определяется дуальная форма $\rho^\wedge$ формулой $\rho^\wedge = J_\rho^* \rho$. Если $\lambda(\rho) > 0$ и $\rho = \alpha + \beta$, то $\rho^\wedge = \alpha - \beta$, а если $\lambda(\rho) < 0$ и $\rho = \alpha + \overline{\alpha}$, то $\rho^\wedge = i(\overline{\alpha} - \alpha)$.

2.3. Специальные почти ε-эрмитовы структуры

Пусть $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$ и i_ε – символ, удовлетворяющий условию $i_\varepsilon^2 = \varepsilon$. Определим ε-комплексные числа как $\mathbf{C}_\varepsilon = \mathbf{R}[i_\varepsilon]$. Мы будем использовать термин пара-комплексные числа для вещественной алгебры $\mathbf{C}_1 = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$. ε-комплексная структура J на векторном пространстве V размерности $n = 2m$ определяется как эндоморфизм, который удовлетворяет условию $J^2 = \varepsilon Id$ и $\dim V^+ = \dim V^- = m$ для $\varepsilon = 1$. Пара (V,J) называется ε-комплексным векторным пространством. Стабилизатор ε-комплексной структуры J в $\mathrm{GL}(V)$ называется ε-комплексной общей линейной группой $\mathrm{GL}(V,J)$. В пара-комплексном случае $V = V^+ \oplus V^-$ и стабилизатор J есть пара-комплексная линейная группа $\mathrm{GL}(V,J) \cong \mathrm{GL}(V^+) \oplus \mathrm{GL}(V^-) \cong \mathrm{GL}(m,\mathbf{R}) \oplus \mathrm{GL}(m,\mathbf{R})$. Подробнее о специальных ε-эрмитовых структурах см. в [7]

ε-эрмитова структура на векторном пространстве V есть пара (g,J), которая состоит из (псевдо)римановой метрики и эндоморфизма J, удовлетворяющего $J^2 = \varepsilon Id$, $J^* g = -\varepsilon g$. Невырожденная 2-форма $\omega(X,Y) = g(X,JY)$ называется фундаментальной 2-формой.

Определение 1. Специальная ε-эрмитова структура $(g, J, \omega, \rho, \Psi)$ на V есть ε-эрмитова структура (g, J, ω) вместе с ε-комплексной формой объема $\Psi = \rho + i_\varepsilon \rho^\wedge$, где $\rho^\wedge = J^* \rho$.

Почти ε-комплексное многообразие представляет собой многообразие M размерности $n = 2m$, наделенное почти ε-комплексной структурой, которая определяется как почти комплексная структура, если $\varepsilon = -1$, и почти пара-комплексная структура, если $\varepsilon = 1$. *Почти пара-комплексная структура* на $2n$-мерном многообразии M определяется полем J эндоморфизмов касательного расслоения TM, таких, что $J^2 = Id$, причем ранги собственных распределений $T^\pm M := \ker(Id \mp P)$ равны. Почти пара-комплексная структура J называется *интегрируемой*, если распределения $T^{\pm}M$ инволютивны. В этом случае J называется пара-комплексной структурой. *Тензор Нийенхейса* N_J определяется равенством

$$N_J(X,Y) = [X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

для всех векторных полей X, Y на M. Как и в комплексном случае, пара-комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда $N_J = 0$.

Почти ε-эрмитово многообразие есть многообразие M размерности $n = 2m$, наделенное почти ε-эрмитовой структурой (g,J), которая состоит из (псевдо)римановой метрики и поля эндоморфизмов J, удовлетворяющего $J^2 = \varepsilon Id$, $J^*g = -\varepsilon g$. Невырожденная 2-форма $\omega(X,Y) = g(X,JY)$ называется фундаментальной 2-формой.

Таким образом, почти пара-эрмитова структура состоит из нейтральной метрики и анти-ортогональной почти пара-комплексной структуры, $g(JX,JY) = -g(X,Y)$. Если (g,J) – пара-кэлерова структура на M, то $\omega = g\circ J$ является симплектической структурой. В работе [11] представлен обзор теории и подробно рассмотрены инвариантные пара-комплексные и пара-кэлеровы структуры на группах Ли.

Определение 2. Пара невырожденных форм $(\omega,\rho) \in \Lambda^2(V^*)\times\Lambda^3(V^*)$ называется *согласованной*, если $\omega\wedge\rho = 0$, и *нормализованной*, если $\hat{\rho}\wedge\rho = 2\omega^3/3$.

Каждая совместимая пара (ω,ρ) единственным образом определяет ε-комплексную структуру J_ρ (т.е., $J_\rho^2 = \varepsilon$), такую, что $\omega(X, J_\rho Y) = -\omega(J_\rho X,Y)$, а также скалярное произведение $g_{(\omega,\rho)}(X,Y) = \varepsilon\omega(X, J_\rho Y)$ (сигнатуры (3,3) для $\varepsilon = 1$ и сигнатуры (2,4) или (4,2) для $\varepsilon = -1$), и ε-комплексную форму объема $\Psi = \rho + i_\varepsilon \rho^\wedge$ типа (3,0) относительно J_ρ (где i_ε есть комплексная или пара-комплексная мнимая единица). Кроме того, стабилизатор пары (ω,ρ) относительно $GL(V)$ есть $SU(p,q)$ для $\varepsilon = -1$ и $SL(3,\mathbf{R}) \subset SO(3,3)$ для $\varepsilon = 1$. Поэтому пара (ω,ρ) для $\varepsilon = -1$ определяет специальную псевдо почти эрмитову структуру, а если $\varepsilon = 1$, то специальную почти пара-эрмитову структуру.

Определение 3. Специальное почти ε-эрмитово шестимерное многообразие (M, ω, ρ) называется *полуплоским*, если

$$d\rho = 0,\ d\omega^2 = 0.$$

Полуплоские SU(3)-структуры впервые были рассмотрены в [12] как естественный класс, на основе которого может быть получена параллельная G_2-структура при помощи потока Хитчина. Название «полуплоская» связано с тем, что это исключает 21 из всех 42 размерностей для внутреннего кручения структуры. Полуплоские SU(3)-структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли изучались в [13].

В работе [12] Хитчин ввел следующие эволюционные уравнения для зависящей от времени пары стабильных форм $(\omega(t), \rho(t))$ с начальной полуплоской SU(3)-структурой $(\omega(0), \rho(0))$ (см. также [7]):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = d\omega, \quad \frac{\partial}{\partial t}\omega^\wedge = d\rho^\wedge,$$

где $\omega^\wedge = \omega^2/2$ и $\rho^\wedge = J_\rho{}^*\rho$ и $\hat{\rho}\wedge\rho = 2\omega^3/3$. Первое уравнение обеспечивает замкнутость 3-формы $\varphi = \omega\wedge dt+\rho$, а второе – замкнутость Ходж-дуальной формы $*\varphi$ на семимерном многообразии на $M\times I$, где I – некоторый интервал. Для компактного многообразия M Хитчин показал, что решение, определенное на некотором интервале I, задает риманову метрику на $M\times I$ с группой голономии из особой группы G_2. В работе [7] этот результат был обобщен на специальные почти ε-эрмитовы полуплоские шестимерные и некомпактные многообразия (M, ω, ρ). При этом, в случае, когда ε-эрмитова метрика g не является положительно определенной, решение указанной системы на некотором интервале I определяет псевдориманову метрику на $M\times I$ с группой голономии из G_2^*. Напомним, что гладкое семимногообразие допускает G_2- или G_2^*-структуру тогда и только тогда, когда существует стабильная 3-форма φ. Эта структура параллельна тогда и только тогда, когда φ замкнута и козамкнута, т.е. $d\varphi = d{*}\varphi = 0$, где * обозначает оператор Ходжа относительно метрики, индуцированной G_2^*-структурой.

Замечание. В данной работе мы предполагаем, что внешнее произведение и внешний дифференциал определяются без нормирующего множителя. Тогда, в частности, $dx\wedge dy = dx\otimes dy - dy\otimes dx$ и $d\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])$. Пусть ∇ – связность Леви – Чивита, соответствующая (псевдо)римановой метрике g. Она определяется из шестичленной формулы [9], которая для левоинвариантных векторных полей X,Y,Z на группе Ли принимает вид $2g(\nabla_X Y,\ Z) = g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y])$. Если $R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ – тензор кривизны, то для (псевдо)римановой метрики g тензор Риччи $Ric(X,Y)$ определяется как свертка тензора кривизны по первому и по четвертому (верхнему) индексам.

3. Левоинвариантные почти ε-эрмитовы структуры

В этом разделе мы рассмотрим группы Ли, которые не допускают ни симплектических, ни комплексных левоинвариантных структур. Будет показано, что они допускают невырожденные левоинвариантные 2-формы, внешние дифференциалы которых также являются невырожденными. Кроме того, они допускают полуплоские почти пара-комплексные структуры и эйнштейновы псевдоримановы метрики сигнатуры (3,3).

3.1. Группа Ли G^1

Коммутационные соотношения: $[e_1,e_2] = e_5$, $[e_1,e_5] = e_6$, $[e_3,e_4] = e_6$. Пусть $\omega = a_{ij}e^i\wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Оператор Хитчина $K_{d\omega}$ для общей формы ω имеет достаточно сложный вид, при этом $K_{d\omega}{}^2 = a_{56}{}^4\, Id$. Свойство $\omega\wedge d\omega = 0$ выполняется при условиях

$$a_{34}a_{56} + a_{35}a_{46} - a_{36}a_{45} = 0,\ a_{12}a_{56} - a_{15}a_{26} + a_{16}a_{25} - a_{23}a_{46} + a_{24}a_{36} - a_{26}a_{34} = 0.$$

Легко видеть, что форма ω является замкнутой только в том случае, когда

$$\omega = e^1\wedge(a_{12}e^2+a_{13}e^3+a_{14}e^4+a_{15}e^5) + e^2\wedge(a_{23}e^3+a_{24}e^4+a_{25}e^5) + a_{34}\,e^3\wedge e^4.$$

Такая форма ω является вырожденной. Условия замкнутости ω включают, в частности, равенство нулю коэффициента a_{56}, который определяет невырожденность $d\omega$. Поэтому мы ослабим условия замкнутости формы ω тем, что будем считать $a_{56} \neq 0$. Тогда обе формы ω и $d\omega$ являются невырожденными. Свойство $\omega\wedge d\omega = 0$ выполняется в этом случае при $a_{34} = 0$ и $a_{12} = 0$. Форма ω является невырожденной при условии $a_{56}(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) \neq 0$ и имеют место следующие выражения:

$$\omega = e^1\wedge (a_{13}e^3+a_{14}e^4+a_{15}e^5)+e^2\wedge(a_{23}e^3+a_{24}e^4+a_{25}e^5) + a_{56}\,e^5\wedge e^6,$$

$$\rho = d\omega = -a_{56}\,e^{126} + a_{56}\,e^{345},$$

$$\omega^2/2 = (-a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})e^{1234} +(-a_{13}a_{25} + a_{15}a_{23})e^{1235} + (-a_{14}a_{25} + a_{15}a_{24})e^{1245} + \\ +a_{13}a_{56}\,e^{1356} + a_{14}a_{56}\,e^{1456} + a_{23}a_{56}\,e^{2356} + a_{24}a_{56}\,e^{2456}.$$

$$\omega^3 = 6(-a_{13}a_{24}a_{56} + a_{14}a_{23}a_{56})e^{123456}.$$

$$\rho^\wedge = J^*(\rho) = -a_{56}\,e^{126} - a_{56}\,e^{345},\ \ \rho^\wedge\wedge\rho = 2a_{56}{}^2\,e^{123456}.$$

$$d\rho^\wedge = d(J^*(d\omega)) = 2a_{56}\,e^{1234}.$$

Пара (ω,ρ) при $\rho = d\omega$ определяет полуплоскую структуру. Условие нормализации $\rho^{\wedge}\wedge\rho = 2\omega^3/3$ выполняется, если $a_{56} = 2(-a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})$. Будем считать коэффициенты a_{ij} зависящими от времени t и рассмотрим уравнения Хитчина [7] для построения псевдоримановой метрики на $G\times I$ с группой голономии из G_2^*, определенной 3-формой $\varphi = \omega\wedge dt+d\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = d\omega, \quad \frac{\partial}{\partial t}\omega^{\wedge} = d\rho^{\wedge},$$

где $\omega\hat{} = \omega^2/2$ и $\rho\hat{} = J_\rho{}^*\rho$. В нашем случае $\rho = d\omega$. Поэтому из первого уравнения мы получаем $a_{56} = ce^t$. Из второго уравнения получаем, в частности, что $a_{24}a_{56}$, $a_{23}a_{56}$, $a_{14}a_{56}$, $a_{13}a_{56}$ являются константами. Поэтому, с точностью до констант, $a_{13} = a_{24} = a_{23} = a_{14} = e^{-t}$. Получаем: $-a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = ae^{-2t}$, что делает невозможным выполнение второго уравнения и условия нормализации.

Таким образом, для рассматриваемого класса структур (ω,ρ) не существует псевдоримановой метрики на $G\times I$ с группой голономии из G_2^*. В то же время, 3-форма $\varphi = \omega\wedge dt+d\omega$ на $G\times I$ является замкнутой, если $a_{56} = ce^t$.

Обратимся снова к оператору Хитчина. В нашем случае он имеет вид $K_{d\omega} = a_{56}{}^2\,\mathrm{diag}\{+1, +1, -1, -1, -1, +1\}$.

Оператор $J = K_{d\omega} / a_{56}^2$ задает почти пара-комплексную структуру, $J^2 = Id$, обладающую свойством $\omega(JX,JY) = -\omega(X,Y)$. Псевдориманова метрика $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ сигнатуры (3,3) имеет вид

$$g = -2e^1(a_{13}e^3+a_{14}e^4+a_{15}e^5) - 2e^2(a_{23}e^3+a_{24}e^4+a_{25}e^5) + 2a_{56}\,e^4e^6.$$

Прямые вычисления в системе Maple показывают, что при $a_{15} = a_{25} = 0$ данная метрика имеет диагональный оператор Риччи с двумя собственными значениями

$$RIC(g) = \frac{a_{56}}{2(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})}\mathrm{diag}\{-1,-1,-1,-1,+1,+1\},$$

ее скалярная кривизна задается формулой

$$R = -\frac{a_{56}}{a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}}.$$

3.2. Группа Ли G^2

Коммутационные соотношения: $[e_1,e_2] = e_4$, $[e_2,e_3] = e_5$, $[e_1,e_4] = e_6$, $[e_3,e_5] = e_6$. Пусть $\omega = a_{ij}e^i\wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Оператор Хитчина $K_{d\omega}$ для общей формы ω имеет достаточно сложный вид. При этом, $K_{d\omega}{}^2 = (a_{46}{}^2- a_{56}{}^2)^2 Id$. Легко видеть, что форма ω является замкнутой только в том случае, когда

$$\omega = e^1\wedge(a_{12}e^2+a_{13}e^3+a_{14}e^4+a_{15}e^5)+e^2\wedge(a_{23}e^3+a_{24}e^4+a_{25}e^5)+e^3\wedge(-a_{15}e^4+a_{35}e^5).$$

Такая форма ω является вырожденной. Условия замкнутости включают, в частности, равенство нулю коэффициентов a_{46} и a_{56}, которые определяет невырожденность $d\omega$. Поэтому мы ослабим условия замкнутости формы ω тем, что будем считать $a_{46} \neq 0$ и $a_{56} \neq 0$. Тогда обе формы ω и $d\omega$ являются невырожденными при $a_{46} \neq a_{56}$. Свойство $\omega\wedge d\omega = 0$ выполняется при условиях

$$-a_{12}\,a_{46}+ a_{23}\,a_{56} = 0, -a_{14}\,a_{56} + a_{15}\,a_{46} = 0, \ -a_{15}\,a_{56} - a_{35}\,a_{46} = 0$$

$$d\omega = (a_{56}\,e^1 - a_{46}\,e^3)\wedge e^{45} + (-a_{46}e^1 + a_{56}\,e^3)\wedge e^{26}.$$

Функция $\lambda(d\omega)$ оператора Хитчина для 3-формы $d\omega$ имеет тот же вид $\lambda = (a_{46}{}^2 - a_{56}{}^2)^2$. Оператор $J = K_{d\omega} / | a_{46}^2 - a_{56}^2 |$ задает почти паракомплексную структуру, $J^2 = Id$, обладающую свойством $\omega(JX,JY) = - \omega(X,Y)$. Определим псевдориманову метрику $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ сигнатуры (3,3). Прямые вычисления в системе Maple показывают, что данная метрика имеет следующую скалярную кривизну:

$$R = -\frac{| a_{46}^2 - a_{56}^2 |}{a_{13}(a_{24}a_{56} - a_{25}a_{46})}.$$

В частном случае, когда один из параметров a_{46} и a_{56} равен нулю, ситуация становится более простой. Пусть, например, $a_{56} = 0$. Свойство $\omega\wedge d\omega = 0$ выполняется при условиях: $a_{12} = 0$, $a_{15} = 0$, $a_{35} = 0$. Тогда 2-форма является невырожденной при условии $a_{13}a_{25}a_{46} \neq 0$ и мы имеем следующие выражения:

$$\omega = e^1\wedge(a_{13}e^3+a_{14}e^4)+e^2\wedge(a_{23}e^3+a_{24}e^4+a_{25}e^5) + a_{46}\, e^4\wedge e^6,$$

$$d\omega = - a_{46}e^{126} - a_{46}\, e^{345},$$

$$\omega^2/2 = -a_{13}a_{25}\, e^{1235} + (-a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})e^{1234} - a_{14}a_{25}\, e^{1245} + \\ +a_{13}a_{46}\, e^{1346} + a_{23}a_{46}\, e^{2346} - a_{25}a_{46}\, e^{2456},$$

$$\omega^3 = 6a_{13}a_{25}a_{46}\, e^{123456},$$

$$\rho^\wedge = J^*(\rho) = -a_{46}\, e^{345} + a_{46}\, e^{126}, \quad \rho^\wedge\wedge\rho = 2a_{46}{}^2\, e^{123456},$$

$$d\rho^\wedge = dJ^*(d\omega) = -2a_{46}\, e^{1235}.$$

Пара (ω,ρ) при $\rho = d\omega$ определяет полуплоскую структуру. Условие нормализации $\rho^\wedge\wedge\rho = 2\omega^3/3$ выполняется, если $a_{46} = 2a_{13}a_{25}$. Будем считать коэффициенты a_{ij} зависящими от времени t и рассмотрим уравнения Хитчина [7] для построения псевдоримановой метрики на $G\times I$ с группой голономии из G_2^*, определенной 3-формой $\varphi = \omega\wedge dt+d\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = d\omega, \quad \frac{\partial}{\partial t}\omega^\wedge = d\rho^\wedge,$$

где $\omega^\wedge = \omega^2/2$ и $\rho^\wedge = J_\rho{}^*\rho$. В нашем случае $\rho = d\omega$. Поэтому из первого уравнения мы получаем $a_{46} = ce^t$. Из второго уравнения получаем, в частности, что $a_{13}a_{46}$, $a_{25}a_{46}$ являются константами. Поэтому, с точностью до констант, $a_{13} = a_{25} = e^{-t}$. Мы получаем $a_{13}a_{25} = ae^{-2t}$, что делает невозможным выполнение второго уравнения и условия нормализации.

Таким образом, для рассматриваемого класса структур (ω,ρ) не существует псевдоримановой метрики на $G\times I$ с группой голономии из G_2^*. В то же время, 3-форма $\varphi = \omega\wedge dt+d\omega$ на $G\times I$ является замкнутой, если $a_{46} = ce^t$.

Псевдориманова метрика $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ в случае $a_{56} = 0$ имеет вид

$$g = -2e^1(a_{13}e^3+a_{14}e^4+a_{15}e^5) - 2e^2\,(a_{23}e^3+a_{24}e^4+a_{25}e^5) + 2a_{46}\, e^4e^6.$$

Прямые вычисления в системе Maple показывают, что при $a_{14} = a_{24} = 0$ данная метрика имеет диагональный оператор Риччи с двумя собственными значениями:

$$RIC(g) = \frac{a_{46}}{2a_{25}a_{13}}\operatorname{diag}\{-1,-1,-1,+1,-1,+1\}.$$

3.3. Группа Ли G^3

Коммутационные соотношения: $[e_1,e_2] = e_4$, $[e_1,e_3] = e_5$, $[e_1,e_4] = e_6$, $[e_3,e_5] = e_6$. Пусть $\omega = a_{ij}e^i\wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Оператор Хитчина $K_{d\omega}$ для общей формы ω имеет достаточно сложный вид. При этом $K_{d\omega}{}^2 = a_{46}{}^4 Id$. Если $\lambda = a_{46}{}^4 \neq 0$ форма $d\omega$ является невырожденной. Оператор $J = K_{d\omega}/a_{46}{}^2$ определяет на $\mathfrak{g}$ левоинвариантную почти пара-комплексную структуру. Легко видеть, что форма ω является замкнутой только в том случае, когда

$$\omega = e^1\wedge(a_{12}e^2+a_{13}e^3+a_{14}e^4+a_{15}e^5) + e^2\wedge(a_{23}e^3+a_{24}e^4+a_{25}e^5) + e^3\wedge(a_{25}e^4+a_{35}e^5).$$

Такая форма вырожденная и мы видим, в частности, что $a_{46} = 0$. Если мы ослабим условия замкнутости и будем считать, что $a_{46} \neq 0$, то обе формы ω и $d\omega$ будут невырожденными и свойство $\omega\wedge d\omega = 0$ выполняется при условии $a_{12} = 0$, $a_{25} = 0$, $a_{35} = 0$. Тогда форма ω невырождена, если $a_{15}a_{23}a_{46} \neq 0$, и мы получаем

$$\omega = e^1\wedge(a_{13}e^3+a_{14}e^4+a_{15}e^5) + e^2\wedge(a_{23}e^3+a_{24}e^4) + a_{46}\, e^4\wedge e^6,$$

$$d\omega = -a_{46}(e^{126} + e^{345}),$$

$$\omega^2/2 = a_{15}a_{23}\, e^{1235} + (-a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})e^{1234} + a_{15}a_{24}\, e^{1245} + \\ + a_{13}a_{46}\, e^{1346} - a_{15}a_{46}\, e^{1456} + a_{23}a_{46}\, e^{2346},$$

$$\omega^3 = -6a_{15}a_{23}a_{46}\, e^{123456},$$

$$\rho^\wedge = J^*(\rho) = -\, a_{46}\, e^{345} + a_{46}\, e^{126},\quad \rho^\wedge\wedge\rho = 2a_{46}{}^2\, e^{123456},$$

$$d\rho^\wedge = dJ^*(d\omega) = -2a_{46}\, e^{1235}.$$

Пара (ω,ρ) при $\rho = d\omega$ определяет полуплоскую структуру. Условие нормализации $\rho^\wedge\wedge\rho = 2\omega^3/3$ выполняется, если $a_{46} = -2\, a_{15}a_{23}$. Будем считать коэффициенты a_{ij} зависящими от времени t и рассмотрим уравнения Хитчина [7] для построения псевдоримановой метрики на $G\times I$ с группой голономии из $G_2{}^*$, определенной 3-формой $\varphi = \omega\wedge dt+d\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = d\omega,\quad \frac{\partial}{\partial t}\omega^\wedge = d\rho^\wedge,$$

где $\omega\hat{} = \omega^2/2$ и $\rho\hat{} = J_\rho{}^*\rho$. В нашем случае $\rho = d\omega$. Поэтому из первого уравнения мы получаем $a_{46} = ce^t$. Из второго уравнения видим, в частности, что $a_{15}a_{46}$, $a_{23}a_{46}$ являются константами. Поэтому, с точностью до констант, $a_{15} = a_{23} = e^{-t}$. Получаем $a_{15}a_{23} = ae^{-2t}$, что делает невозможным выполнение второго уравнения и условия нормализации.

Таким образом, для рассматриваемого класса структур (ω,ρ) не существует псевдоримановой метрики на $G\times I$ с группой голономии из $G_2{}^*$. В то же время 3-форма $\varphi = \omega\wedge dt+d\omega$ на $G\times I$ является замкнутой, если $a_{46} = ce^t$.

Оператор Хитчина для 3-формы $d\omega$ имеет диагональный вид, $K_{d\omega} = \mathrm{diag}\{-a_{46}{}^2, -a_{46}{}^2, a_{46}{}^2, a_{46}{}^2, a_{46}{}^2, -a_{46}{}^2\}$. Оператор $J = K_{d\omega}/a_{46}^2$ задает почти пара-комплексную структуру, $J^2 = Id$, обладающую свойством $\omega(JX,JY) = -\,\omega(X,Y)$. Определим псевдориманову метрику $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ сигнатуры (3,3). Она имеет вид

$$g = 2e^1(a_{13}e^3+a_{14}e^4+a_{15}e^5) + 2a_{23}\, e^2e^3 + 2a_{24}\, e^2e^4 - 2a_{46}\, e^4e^6.$$

Прямые вычисления в системе Maple показывают, что при $a_{14} = a_{24} = 0$ данная метрика имеет диагональный оператор Риччи с двумя собственными значениями:

$$RIC(g) = \frac{a_{46}}{2a_{15}a_{23}}\mathrm{diag}\{-1,-1,-1,+1,-1,+1\}.$$

3.4. Группа Ли G^4

Коммутационные соотношения: $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_1,e_3] = e_4$, $[e_1,e_4] = e_5$, $[e_3,e_4] = e_6$, $[e_2,e_5] = -e_6$.. Пусть $\omega = a_{ij}e^i\wedge e^j$ – произвольная левоинвариантная невырожденная 2-форма. Для такой общей формы квадрат оператора Хитчина [6] для 3-формы $d\omega$ имеет диагональный вид: $K_{d\omega} = (a_{46}^2 - 2a_{36}a_{56})^2 Id$. Поэтому 3-форма $d\omega$ является невырожденной при $a_{46}^2 - 2a_{36}a_{56} \neq 0$. Форма ω является замкнутой только в том случае, когда она имеет вид

$$\omega = e^1\wedge(a_{12}\, e^2 + a_{13}\, e^3 + a_{14}\, e^4 + a_{15}\, e^5) + e^2\wedge(a_{23}\, e^3 - a_{34}\, e^5) + a_{34}\, e^3\wedge e^4.$$

Такая форма ω является вырожденной. Условия замкнутости включают, в частности, равенство нулю коэффициентов a_{46}, a_{36} и a_{56}, которое определяет невырожденность $d\omega$. Для сохранения невырожденности форм ω и $d\omega$ при минимальном ослаблении свойства замкнутости ω, возможны два случая: $a_{46} \neq 0$ или $a_{36} \neq 0$ и $a_{56} \neq 0$. Однако, если $a_{56} \neq 0$, то простые вычисления показывают, что свойство $\omega\wedge d\omega = 0$ несовместимо с невырожденностью ω. Поэтому рассмотрим случай, когда $a_{46} \neq 0$. Тогда $K_{d\omega} = a_{46}^4\, Id$. Кроме того, $\omega\wedge d\omega = 0$ при условии $a_{13} = 0$ и $a_{34} = 0$. Тогда форма ω невырожденная при условии $a_{23}a_{15}a_{46} \neq 0$, а формы ω и $d\omega$ принимают вид

$$\omega = e^1\wedge(a_{12}\, e^2 + a_{14}\, e^4 + a_{15}\, e^5) - a_{23}\, e^2\wedge e^3 + a_{46}\, e^4\wedge e^6,$$

$$d\omega = a_{46}(-e^{136} + e^{245}).$$

Оператор $K_{d\omega}$ для 3-формы $d\omega$ имеет диагональный вид, $K_{d\omega} = \mathrm{diag}\{-a_{46}^2, a_{46}^2, -a_{46}^2, a_{46}^2, a_{46}^2, -a_{46}^2\}$. Определим оператор $J = K_{d\omega}/a_{46}^2$, он задает почти паракомплексную структуру, $J^2 = Id$, обладающую свойством $\omega(JX,JY) = -\omega(X,Y)$. Мы имеем следующие выражения:

$$\omega = e^1\wedge(a_{12}\, e^2 + a_{14}\, e^4 + a_{15}\, e^5) - a_{23}\, e^2\wedge e^3 + a_{46}\, e^4\wedge e^6,$$

$$d\omega = \rho = a_{46}(-e^{136} + e^{245}),$$

$$\omega^2/2 = a_{15}a_{23}\, e^{1235} + a_{14}a_{23}\, e^{1234} + a_{12}a_{46}\, e^{1246} - a_{15}a_{46}\, e^{1456} + a_{23}a_{46}\, e^{2346},$$

$$\omega^3 = -6a_{15}a_{23}a_{46}\, e^{123456},$$

$$\rho^\wedge = J^*(\rho) = a_{46}(e^{136} + e^{245}),\quad \rho^\wedge\wedge\rho = 2a_{46}^2\, e^{123456},$$

$$d\rho^\wedge = dJ^*(d\omega) = -2a_{46}\, e^{1235}.$$

Таким образом, пара (ω,ρ) при $\rho = d\omega$ определяет полуплоскую структуру. Отметим, что в работе [13] показано. что на данной группе Ли не существует полуплоских SU(3)-структур. Условие нормализации $\rho^\wedge\wedge\rho = 2\omega^3/3$ выполняется, если $a_{46} = -2a_{15}a_{23}$. Рассуждения, такие же как для других групп, показывают, что для пары (ω,ρ) при $\rho = d\omega$ не удается построить методом потока Хитчина псевдориманову метрику на $G\times I$ с группой голономии из G_2^*. Однако 3-форма $\varphi = \omega\wedge dt + d\omega$ на $G\times I$ является замкнутой, если $a_{46} = ce^t$.

Определим псевдориманову метрику $g(X,Y) = \omega(X,JY)$. Она имеет сигнатуру (3,3) и следующий вид:

$$g = 2e^1(a_{12}e^2 + a_{14}e^4 + a_{15}e^5) - 2a_{23}\, e^2e^3 - 2a_{46}\, e^4e^6.$$

Прямые вычисления в системе Maple показывают, что при $a_{14} = 0$ данная метрика имеет диагональный оператор Риччи с двумя собственными значениями:

$$RIC(g) = \frac{a_{46}}{2a_{15}a_{23}}\mathrm{diag}\{-1,-1,-1,+1,-1,+1\}.$$

Заключение. На группах Ли G^1 – G^4 любая левоинвариантная замкнутая 2-форма ω является вырожденной. Можно ослабить требование замкнутости для сохранения невырожденности ω и $d\omega$ и выполнения свойства $\omega\wedge d\omega = 0$. Оператор Хитчина $K_{d\omega}$, соответствующий 3-форме $d\omega$, определяет почти пара-комплексную структуру J. Псевдориманова метрика $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ зависит от 5 до 7 параметров, имеет сигнатуру (3,3) и при обращении в нуль нескольких параметров, оператор Риччи имеет диагональный вид с двумя собственными значениями. Пара (ω,ρ), где в качестве 3-формы ρ выступает $d\omega$, является согласованной и номализованной. Пара-комплексная форма (3,0)-форма имеет вид $\Psi = d\omega + i_\varepsilon d\omega^\wedge$, где i_ε – паракомплексная единица. Таким образом, на группах Ли G^1 – G^4 естественным образом определены многопараметрические семейства почти пара-эрмитовых полуплоских структур с диагональным оператором Риччи с двумя собственными значениями. Для рассматриваемого класса структур (ω,ρ) не существует псевдоримановой метрики на $G\times I$ с группой голономии из G_2^*. В то же время, 3-форма $\varphi = \omega\wedge dt + d\omega$ на $G\times I$ является замкнутой.

3.5. Группа Ли G^5

Ненулевые коммутационные соотношения: $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_1,e_3] = e_4$,, $[e_1,e_4] = e_5$, $[e_2,e_3] = e_5$, $[e_3,e_4] = e_6$, $[e_2,e_5] = -e_6$. Пусть $\omega = a_{ij}e^i\wedge e^j$ – произвольная левоинвариантная 2-форма. Для общей формы ω оператор Хитчина K_ω имеет достаточно сложный вид и следующую функцию $\lambda(d\omega)$:

$$\lambda = 4(a_{16}a_{56}^2 + 4a_{35}a_{56}^2 + 4a_{36}^2a_{56} - 4a_{36}a_{46}^2 - 4a_{45}a_{46}a_{56})a_{56} + a_{46}^4.$$

Таким образом, вообще говоря, форма $d\omega$ является невырожденной. Легко видеть, что форма ω является замкнутой только в том случае, когда $a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{35} = a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0$ и $a_{34} = -a_{25}$, $a_{24} = a_{15}$. Однако такая форма ω является вырожденной. Есть несколько естественных способов ослабить требование замкнутости формы ω, чтобы не потерять невырожденность ω и $d\omega$.

Вариант 1. В том случае для невырожденности $K_{d\omega}$ мы предполагаем нулевыми оба коэффициента a_{46} и a_{56}. Тогда свойство $\omega\wedge d\omega = 0$ выполняется при условии $a_{15} = 0$, $a_{25} = 0$ и $a_{12}\, a_{56} = a_{13}\, a_{46}$, $a_{23} = -a_{14}$. Форма ω является невырожденной при условии $a_{14}a_{56} \neq 0$ и формы ω и $d\omega$ принимают вид

$$\omega = e^1\wedge(a_{13}a_{46}/a_{56}\, e^2 + a_{13}\, e^3 + a_{14}\, e^4) - a_{14}\, e^2\wedge e^3 + a_{46}\, e^4\wedge e^6 + a_{56}\, e^5\wedge e^6,$$

$$d\omega = -a_{46}\, e^{136} + a_{46}\, e^{245} - a_{56}\, e^{146} - a_{56}\, e^{236} + a_{56}\, e^{345},$$

$$\omega^2/2 = -a_{14}^2\, e^{1234} + a_{13}a_{46}^2/a_{56}\, e^{1246} + a_{13}a_{46}\, e^{1256} + a_{13}a_{46}\, e^{1346} + a_{13}a_{56}\, e^{1356} + a_{14}a_{56}\, e^{1456} - a_{14}a_{46}\, e^{2346} - a_{14}a_{56}\, e^{2356},$$

$$\omega^3 = -6a_{14}^2a_{56}\, e^{123456},$$

$$\rho^\wedge = J^*(\rho) = a_{46}\, e^{136} + a_{56}\, e^{146} + a_{56}\, e^{236} + a_{46}\, e^{245} + a_{56}^2/a_{46}\, e^{246} + a_{56}\, e^{345} + a_{56}^3/a_{46}^2\, e^{346},$$

$$\rho^\wedge\wedge\rho = 2a_{46}^2\, e^{123456},$$

$$d\rho^\wedge = dJ^*(d\omega) = -2a_{46}\, e^{1235} - 2a_{56}^3/a_{46}^2 e^{1236} - 2a_{56}\, e^{1245} - 2a_{56}^3/a_{46}^2 e^{1246} + 2a_{56}^3/a_{46}^2 e^{2345}.$$

Пара (ω,ρ) при $\rho = d\omega$ определяет полуплоскую структуру. Отметим, что в работе [13] показано, что на данной группе Ли не существует полуплоских SU(3)-структур. Условие нормализации $\rho^\wedge\wedge\rho = 2\omega^3/3$ выполняется, если $a_{46}^2 = -2a_{14}^2a_{56}$. Будем считать коэффициенты a_{ij} зависящими от времени t и рассмотрим уравнения Хитчина [7] для построения псевдоримановой метрики на $G\times I$ с группой голономии из G_2^*, определенной 3-формой $\varphi = \omega\wedge dt + d\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = d\omega, \quad \frac{\partial}{\partial t}\omega^{\wedge} = d\rho^{\wedge},$$

где $\omega^{\wedge} = \omega^2/2$ и $\rho^{\wedge} = J_\rho{}^*\rho$. В нашем случае $\rho = d\omega$. Поэтому из первого уравнения мы получаем $a_{46} = ce^t$ и $a_{56} = de^t$. Из второго уравнения мы получаем, в частности, что a_{14}, $a_{14}a_{56}$ являются константами. Это противоречит выполнению второго уравнения и условию нормализации.

Таким образом, для рассматриваемого класса структур (ω,ρ) не существует псевдоримановой метрики на $G\times I$ с группой голономии из $G_2{}^*$. Однако 3-форма $\varphi = \omega\wedge dt+d\omega$ на $G\times I$ является замкнутой, если $a_{46} = ce^t$ и $a_{56} = de^t$.

Функция $\lambda(d\omega)$ оператора Хитчина $K_{d\omega}$ для 3-формы $d\omega$ принимает вид $\lambda = a_{46}{}^4$. Рассмотрим оператор $J = K_{d\omega}/a_{46}^2$. Он определяет левоинвариантную почти паракомплексную структуру $J^2 = Id$, обладающую свойством $\omega(JX,JY) = -\omega(X,Y)$. Определим псевдориманову метрику $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ сигнатуры (3,3). Она имеет вид

$$g = 2e^1(a_{13}a_{46}/a_{56}\, e^2+a_{13}e^3+a_{14}e^4) +$$
$$+ 2e^2(a_{13}\, e^2 +(2a_{13}a_{56} +a_{14}a_{46})/a_{46}\, e^3 + 2a_{14}a_{56}/a_{46}\, e^4) +$$
$$+ 2e^3(a_{56}(a_{13}a_{56} +a_{14}a_{46})/a_{46}{}^2\, e^3 + 2a_{14}a_{56}{}^2)/a_{46}{}^2\, e^4) -$$
$$- 2a_{46}\, e^4e^6 - 2a_{56}\, e^5e^6 - 2a_{56}{}^3/a_{46}{}^2\, e^6e^6.$$

Прямые вычисления тензора кривизны показывают, что данная метрика имеет скалярную кривизну

$$R = \frac{-8a_{14}a_{46}a_{56}^6 - a_{46}^8 + 8a_{13}a_{56}^7}{a_{56}a_{14}^2a_{46}^6}.$$

Вариант 2. Возьмем форму ω в виде $\omega = \omega_0 + \omega_C$, где ω_0 – общая замкнутая 2-форма и ω_C – невырожденная 2-форма на идеале $C^2\mathfrak{g} = \mathrm{R}\{e_4,e_5,e_6\}$. Потребуем от формы ω выполнения свойства $\omega\wedge d\omega = 0$:

$$a_{25} = 0,\ a_{15} = 0,\ a_{12}\, a_{56} = a_{13}a_{46},\ a_{56}\, a_{23} + a_{14}a_{56} = 0.$$

Тогда форма ω является невырожденной при условии $a_{14}a_{56} \neq 0$. Формы ω и $d\omega$ принимают вид

$$\omega = e^1\wedge(\, a_{13}a_{46}/a_{56}\, e^2 + a_{13}\, e^3 + a_{14}\, e^4) - a_{14}\, e^2\wedge e^3 + a_{45}\, e^4\wedge e^5 + a_{46}\, e^4\wedge e^6 + a_{56}\, e^5\wedge e^6,$$
$$d\omega = a_{45}\, e^{234} - a_{45}\, e^{135} - a_{46}\, e^{136} + a_{46}\, e^{245} - a_{56}\, e^{146} - a_{56}\, e^{236} + a_{56}\, e^{345},$$
$$\omega^2 = -\, 2a_{14}a_{56}\, e^{2356} - a_{14}(1+a_{46}{}^4)/(\, a_{46}a_{56}{}^2)e^{2345} + a_{13}(1+a_{46}{}^4)/(2a_{56}{}^3)e^{1245} +$$
$$+ 2a_{13}a_{46}{}^4/a_{56}e^{1246} +2a_{13}a_{46}\, e^{1256} - 2a_{14}a_{46}\, e^{2346} - 2a_{14}{}^2\, e^{1234} + 2a_{13}a_{56}\, e^{1356} +$$
$$+ 2a_{14}a_{56}\, e^{1456} + 2a_{13}a_{46}\, e^{1346} + a_{13}(1+a_{46}{}^4)/(2a_{46}a_{56}{}^2)e^{1345},$$
$$\omega^3 = -6a_{14}{}^2a_{56}\, e^{123456}.$$

В этом случае функция $\lambda(d\omega)$ выражается формулой $\lambda = a_{46}{}^4 - 4a_{46}a_{45}a_{56}{}^2$ и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Случай 1. Функция $\lambda(d\omega)$ принимает значение -1 при $a_{45} = (a_{46}{}^4 + 1)/(4a_{46}a_{56}{}^2)$. Тогда оператор $J = K_{d\omega}$ определяет почти комплексную структуру, согласованную с ω. Прямые вычисления показывают:

$$\omega^2 = -2a_{14}{}^2\, e^{1234} + a_{13}(1+a_{46}{}^4)/(2a_{56}{}^3)e^{1245} + 2a_{13}a_{46}{}^2/a_{56}e^{1246} +$$
$$+ 2a_{13}a_{46}\, e^{1256} + a_{13}(1+a_{46}{}^4)/(2a_{46}a_{56}{}^2)e^{1345} + 2a_{13}a_{46}\, e^{1346} + 2a_{13}a_{56}\, e^{1356} +$$
$$+ 2a_{14}a_{56}\, e^{1456} - 2a_{14}a_{56}\, e^{2356} - a_{14}(1+a_{46}{}^4)/(2a_{46}a_{56}{}^2)e^{2345} - 2a_{14}a_{46}\, e^{2346},$$
$$\omega^3 = -6a_{14}{}^2a_{56}\, e^{123456},\ \ \rho^{\wedge}\wedge\rho = 2e^{123456}$$

В этом случае пара (ω,ρ) при $\rho = d\omega$ определяет полуплоскую структуру. Условие нормализации $\rho\hat{}\wedge\rho = 2\omega^3/3$ выполняется, если $a_{56} = -1/(2a_{14}^2)$. Однако построить псевдориманову метрику на $G\times I$ с группой голономии из G_2^* не удается. Тем не менее 3-форма $\varphi = \omega\wedge dt + d\omega$ на $G\times I$ является замкнутой.

Зададим псевдориманову метрику сигнатуры (2,4) по формуле $g(X,Y) = \omega(X,JY)$. Прямые вычисления тензора кривизны в системе Maple показывают, что данная метрика имеет скалярную кривизну

$$R = \frac{8a_{13}a_{56}^7 - 8a_{14}a_{46}a_{56}^6 - 1}{a_{56}a_{14}^2}.$$

Случай 2. Функция $\lambda(d\omega)$ принимает значение $+1$ при $a_{45} = (a_{46}^4 - 1)/(4a_{46}a_{56}^2)$. Тогда оператор $J = K_{d\omega}$ определяет почти пара-комплексную структуру, согласованную с ω и имеет такую же матрицу, что и у приведенной выше почти комплексной структуры J, где вместо $a_{46}^4 + 1$ нужно подставить $a_{46}^4 - 1$. При $a_{56} = -1/(2a_{14}^2)$ выполняется условие нормализации, пара (ω,ρ) при $\rho = d\omega$ определяет полуплоскую структуру. Однако построить псевдориманову метрику на $G\times I$ с группой голономии из G_2^* не удается. Можно только утверждать, что 3-форма $\varphi = \omega\wedge dt + d\omega$ на $G\times I$ является замкнутой.

Соответствующая метрика $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ – псевдориманова сигнатуры (3,3) и имеет такую же скалярную кривизну, что и в первом случае.

Выводы. На группе Ли G^5 любая левоинвариантная замкнутая 2-форма ω является вырожденной. Существует несколько способов ослабить требование замкнутости для сохранения невырожденности ω, причем так, что 3-форма $d\omega$ является невырожденной и выполняется свойство $\omega\wedge d\omega = 0$. Согласованная пара $(\omega,d\omega)$ определяет либо почти комплексную структуру, либо почти пара-комплексную – в зависимости от выбора ω. Ассоциированная метрика $g(X,Y) = \omega(X,J_{d\omega}Y)$ – псевдориманова сигнатуры (2,4) или (3,3). Пара $(\omega,d\omega)$ определяет полуплоскую структуру. Отметим, что в работе [13] показано, что на данной группе Ли не существует полуплоских SU(3)-структур. Таким образом, на группе Ли G^5 естественным образом определены псевдо почти эрмитовы полуплоские и почти пара-эрмитовы полуплоские структуры, которые не являются эйнштейновыми. Для рассматриваемого класса структур (ω,ρ) не существует псевдоримановой метрики на $G\times I$ с группой голономии из G_2^*. Однако 3-форма $\varphi = \omega\wedge dt + d\omega$ на $G\times I$ является замкнутой.

Результаты работы были доложены на Всероссийской конференции по математике и механике, посвященной 140-летию Томского государственного университета и 70-летию механико-математического факультета ТГУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Salamon S.* Complex structures on nilpotent Lie algebras // J. Pure Appl. Algebra. 2001. V. 157. P. 311–333. doi.org/10.1016/S0022-4049(00)00033-5.
2. *Goze M.*, *Khakimdjanov Y.*, *Medina A.* Symplectic or contact structures on Lie groups // Diff. Geom. Appl. 2004. V. 21. No. 1. P. 41–54. doi.org/10.1016/j.difgeo.2003.12.006.
3. *Benson C.*, *Gordon C.S.* Kähler and symplectic structures on nilmanifolds // Topology. 1988. V. 27. P. 513–518.
4. *Cordero L.A.*, *Fernández M.*, *Ugarte L.* Pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie algebras // J. of Geom. and Phys. 2004. V. 50. P. 115–137. doi:10.1016/j.geomphys. 2003.12.003.

5. *Смоленцев Н.К.* Канонические псевдокэлеровы метрики на шестимерных нильпотентных группах Ли // Вестник КемГУ. 2011. № 3/1 (47). С. 155–168 (arXiv:1310.5395 [math.DG]).
6. *Smolentsev N.K.* Canonical almost pseudo-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie groups. 2013. arXiv: 1311.4248 [math.DG]. 26 p.
7. *Cortés V., Leistner T., Schäfer L., Schulte-Hengesbach F.* Half-flat structures and special holonomy // Proc. London Math. Soc. 2011. V. 102. No. 1. P. 113–158. DOI: 10.1112/plms/pdq012 (arXiv:0907.1222v1 [math.DG])
8. *Smolentsev N.K.* Left-invariant almost para-complex Einsteinian structures on six-dimensional nilpotent Lie groups // Science Evolution. 2017. V. 2. No. 2. P. 88–95.
9. *Kobayashi S. and Nomizu K.* Foundations of Differential Geometry. Vol. 1 and 2. New York; London: Interscience Publ., 1963.
10. *Hitchin N.J.* The geometry of three-forms in six dimensions // J. Diff. Geom. 2000. V. 55. P. 547–576. doi:10.4310/jdg/1090341263.
11. *Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А.* Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // УМН. 2009. Т. 64. Вып. 1(385). С. 3–50. DOI: https://doi.org/10.4213/rm9262.
12. *Hitchin N.* Stable forms and special metrics // Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray (Bilbao, 2000). P. 70–89. DOI: http://dx.doi.org/10.1090/conm/288. (arXiv:math/0107101v1 [math.DG]).
13. *Conti D.* Half-flat nilmanifolds // Math. Ann. 2011. V. 350(1). P. 155–168. (arXiv:0903.1175 [math.DG]).

Статья поступила 01.11.2018 г.

Smolentsev N.K. (2019) LEFT-INVARIANT ALMOST PARA-HERMITIAN STRUCTURES ON SOME SIX-DIMENSIONAL NILPOTENT LIE GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 58. pp. 41–55

DOI 10.17223/19988621/58/4

Keywords: nilmanifolds, six-dimensional nilpotent Lie algebras, left-invariant para-complex structures, Einstein manifolds, half-flat structures.

As is well known, there are 34 classes of isomorphic simply connected six-dimensional nilpotent Lie groups. Of these, only 26 classes admit left-invariant symplectic structures and only 18 classes admit left-invariant complex structures. There exist five six-dimensional nilpotent Lie groups G, which do not admit neither symplectic, nor complex structures and, therefore, can be neither almost pseudo-Kählerian, nor Hermitian. It is the Lie groups that are studied in this work. The aim of the paper is to define new left-invariant geometric structures on the Lie groups. If the left-invariant 2-form ω on such a Lie group is closed, then it is degenerate. Weakening the closedness requirement for left-invariant 2-forms ω, stable 2-forms ω are obtained. Their exterior differential $d\omega$ is also stable in Hitchin sense. Therefore, the pair $(\omega, d\omega)$ defines either an almost Hermitian or almost para-Hermitian structure on the group G. The corresponding pseudo-Riemannian metrics are Einstein for four of the five Lie groups under consideration. This gives new examples of multiparameter families of left-invariant Einstein pseudo-Riemannian metrics on six-dimensional nilmanifolds. On each of the Lie groups under consideration, compatible and normalized pairs of left-invariant forms (ω, ρ), where $\rho = d\omega$, are obtained. They define semi-flat structures. The Hitchin flow on $G \times I$ is studied to construct a pseudo-Riemannian metric on $G \times I$ with a holonomy group from G_2^* and it is shown that there is nots solution in this class of left-invariant half-plane structures (ω, ρ). For structures (ω, ρ), only the 3-form closure property $\varphi = \omega\wedge dt + d\omega$ on $G\times I$ holds.

AMS Mathematical Subject Classification: 53C15, 53C30, 53C25, 22E25

SMOLENTSEV Nikolay Konstantinovich (Doctor of Physics and Mathematics, professor of Fundamental Mathematics department of Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: smolennk@mail.ru

REFERENCES

1. Salamon S. (2001) Complex structures on nilpotent Lie algebras. *J. Pure Appl. Algebra*. 157. pp. 311–333. doi.org/10.1016/S0022-4049(00)00033-5.
2. Goze M., Khakimdjanov Y., Medina A. (2004) Symplectic or contact structures on Lie groups. *Diff. Geom. Appl.* 21(1). pp. 41–54. doi.org/10.1016/j.difgeo.2003.12.006.
3. *Benson C.*, *Gordon C.S.* (1988) Kähler and symplectic structures on nilmanifolds // Topology. 27. pp. 513–518.
4. *Cordero L.A.*, *Fernández M.*, *Ugarte L.* (2004) Pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie algebras. *J. of Geom. and Phys.* 50. pp. 115–137. doi:10.1016/j.geomphys. 2003.12.003.
5. Smolentsev N.K. (2011) Kanonicheskie psevdokelerovy metriki na shestimernykh nil'potentnykh gruppakh Li (Canonical pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie groups). *Vestn. Kemerovsk. Gos. Univ.*, *Ser. Mat.* 3/1(47). pp. 155–168. (In Russian), (arXiv:1310.5395 [math.DG]).
6. Smolentsev N.K. (2013) Canonical almost pseudo-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie groups. *arXiv: 1311.4248 [math.DG]*. 26 p.
7. Cortés V., Leistner T., Schäfer L., Schulte-Hengesbach F. (2011) Half-flat structures and special holonomy. *Proc. London Math. Soc.* 102(1). pp. 113–158. DOI: 10.1112/plms/pdq012 (arXiv:0907.1222v1 [math.DG]).
8. *Smolentsev N.K.* (2017) Left-invariant almost para-complex Einsteinian structures on six-dimensional nilpotent Lie groups. *Science Evolution*. 2(2). pp. 88–95.
9. Kobayashi S. and Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry. Vol. 1 and 2.* New York; London: Interscience Publ.
10. *Hitchin N.J.* (2000) The geometry of three-forms in six dimensions // *J. Diff. Geom.* 55. pp. 547–576. doi:10.4310/jdg/1090341263.
11. *Alekseevsky D.V.*, *Medori C.*, *Tomassini A.* (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russian Mathematical Surveys*. 64(1). pp. 1–43.
12. *Hitchin N.* Stable forms and special metrics. *Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray* (Bilbao, 2000). pp. 70–89. DOI: http://dx.doi.org/10.1090/conm/288. (arXiv:math/0107101v1 math.DG]).
13. Conti D. (2011) Half-flat nilmanifolds. *Math. Ann.* 350(1). pp. 155–168. (arXiv:0903.1175 [math.DG]).

Received: November 1, 2018