

МЕХАНИКА

УДК 532.555.2

DOI 10.17223/19988621/58/5

Е.И. Борзенко, К.Е. Рыльцева, Г.Р. Шрагер

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ С ВНЕЗАПНЫМ СУЖЕНИЕМ¹

Сформулирована математическая модель ламинарного течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением, которая включает уравнения движения и неразрывности в переменных функция тока – вихрь. Реологические свойства среды описаны степенным законом Оствальда – де Виля. Стационарное решение задачи получено методом установления с последующей реализацией конечно-разностного метода на основе схемы переменных направлений. Выполнен анализ структуры течения, рассчитаны кинематические характеристики потока в зависимости от основных параметров задачи. На основе полученных данных проведены параметрические исследования коэффициента местного сопротивления для различных значений показателя нелинейности, степени сужения трубы и числа Рейнольдса.

Ключевые слова: *внезапное сужение, неньютоновская жидкость, модель Оствальда – де Виля, схема продольно-поперечной прогонки, кинематические характеристики потока, число Рейнольдса, местное сопротивление.*

Течение жидкости через различные конструктивные особенности реализуется во многих технических приложениях, связанных с транспортом жидких сред. В частности, резкое уменьшение диаметра канала, которое представляет собой внезапное сужение, часто встречается в качестве элемента трубопроводов, экс-трудеров, реакторов и т.д. В подобном оборудовании имеют место течения горючих материалов, расплавов и растворов полимерных жидкостей, которые требуют особого внимания и детального изучения для обеспечения эффективности и безопасности производства.

Задача о течении жидкости в канале с внезапным сужением привлекла внимание исследователей еще в середине прошлого столетия [1–3]. Большинство работ того времени посвящено экспериментальным исследованиям, которые выполнялись с помощью оборудования, способного визуализировать течение и представлять качественное поведение характеристик процесса. В работе [2] показана эволюция профиля скорости, реализуемая в канале с сужением. Выявлена тенденция изменения зоны двумерного течения, которая образуется сразу за скачком сечения, в зависимости от числа Рейнольдса, представлено сравнение полученных данных с результатами экспериментальных работ других авторов.

Стремительное развитие вычислительной техники и разработка численных методов привели к увеличению количества работ, посвященных численному иссле-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-19-00021).

дованию течения жидкости в канале с внезапным сужением [4]. В работе [5] автор представил результаты решения задачи о течении жидкости в плоском канале с сужением методом конечных элементов. Показано влияние числа Рейнольдса на картину течения, интенсивность движения жидкости в циркуляционной зоне и общий перепад давления. Результаты применения конечно-разностного метода для решения задачи в переменных функция тока – вихрь опубликованы в статье [6]. Особое внимание уделено расчету значения вихря в угловой точке канала с сужением. В [7] задача решалась методом контрольных объемов с применением процедуры SIMPLE. Автор продемонстрировал преимущества данного метода над методом конечных элементов при моделировании течения неньютоновской жидкости в рассматриваемой геометрии. Повышение точности решения и скорости сходимости расчетного алгоритма удалось получить, используя метод конечных объемов совместно с высокоразрешающей схемой, приведенной в работе [8].

На сегодняшний день доступно множество работ, в которых представлены результаты исследования течения ньютоновской жидкости в канале с сужением, демонстрирующие структуру потока и основные кинематические характеристики процесса [9–12]. Однако интенсивное развитие промышленности и медицины сопровождается необходимостью исследования течения неньютоновских жидкостей, которые характеризуются сложными реологическими свойствами. Во многих случаях, например, при моделировании течения нефти, глицерина, целлюлозы, крови и т.д., удается достаточно точно описать реологические свойства жидкости, используя степенную модель Оствальда – де Вилля [2, 13, 14]. Данная модель позволяет рассмотреть поведение псевдопластичных, ньютоновских и дилатантных жидкостей.

В [15] представлены результаты численных и экспериментальных исследований течения степенной жидкости в канале с внезапным сужением. Показано, что структура течения формируется из зон одномерного течения в окрестности входного и выходного сечений, зон двумерного течения в области скачка сечения и циркуляционной зоны в окрестности угла. Проводится сравнение полученных значений длин зон двумерного течения с данными других авторов в зависимости от числа Рейнольдса. Однако отсутствуют функциональные зависимости длин зон двумерного течения от показателя нелинейности и степени сужения канала, которые также оказывают значительное влияние на характер и структуру потока.

Практическая значимость исследования течения жидкости в канале с сужением заключается в определении местных потерь давления. В обзорной части работы [15] отражено множество источников, в которых представлены результаты расчетов местных потерь давления для рассматриваемой геометрии. Автор также демонстрирует собственные данные, полученные в ходе экспериментального и численного исследования течения неньютоновской жидкости в каналах с различными степенями сужения. Сравнение зависимостей местного сопротивления от числа Рейнольдса показало частичное совпадение. При этом выявлены существенные расхождения между результатами экспериментов и численных расчетов. Анализ выполненных работ показывает, что необходимы дополнительные исследования течения неньютоновской жидкости в канале с внезапным сужением и получение количественных зависимостей местных потерь давления не только от числа Рейнольдса, но и от других параметров задачи.

Целью настоящей работы является определение характеристик структуры потока степенной жидкости в трубе с сужением в зависимости от определяющих параметров задачи и расчет коэффициента местного сопротивления для широкого

диапазона изменения числа Рейнольдса, показателя нелинейности жидкости и степени сужения трубы.

Физико-математическая постановка задачи

Рассматривается стационарное течение несжимаемой неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением. Область течения Ω схематично представлена на рис. 1. Используется осесимметричная постановка задачи в цилиндрической системе координат.

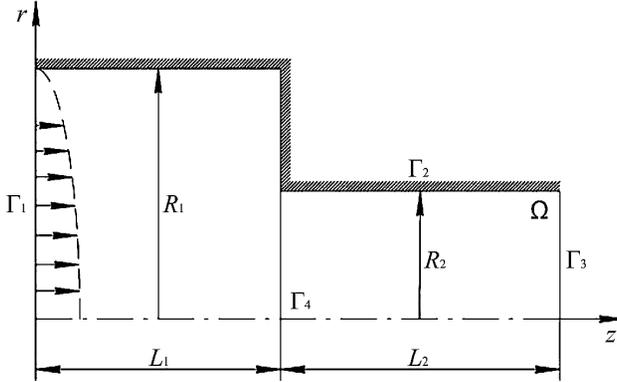


Рис. 1. Область решения
Fig. 1. Solution domain

Для математического описания течения записываются уравнения в переменных функция тока – вихрь, приведенные к безразмерному виду

$$\frac{\partial(v\omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial z} = \frac{2^n \cdot B}{\text{Re}} \left(\nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + \frac{2^n \cdot S}{\text{Re}}; \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega, \quad (2)$$

где функция тока (ψ), вихрь (ω) и источниковый член (S) определяются по формулам

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$S = 2 \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + 2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\omega}{r}.$$

Реологические свойства среды описываются степенной моделью Оствальда – де Виля, в которой безразмерная эффективная вязкость (B) вычисляется по формуле

$$B = A^{n-1}, \quad (3)$$

$$A = \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Здесь v, u – радиальная и аксиальная компоненты скорости соответственно, A – ин-

тенсивность тензора скоростей деформаций, $Re = \rho U^{2-n} D^n / k$ – число Рейнольдса, $D = 2R_2$ – диаметр узкой части трубы, ρ – плотность жидкой среды, U – среднерасходная скорость в узкой части трубы, k – показатель консистенции, n – показатель нелинейности жидкости. Используются следующие масштабы обезразмеривания: скорости – скорость U , длины – радиус R_2 , давления – величина $\rho U^2 / 2$.

Жидкость поступает в трубу через входную границу Γ_1 с постоянным заданным расходом, профиль скорости при этом соответствует её установившемуся течению в бесконечной трубе. На твердой стенке Γ_2 выполняются условия прилипания, на оси Γ_4 – условия симметрии. На выходной границе Γ_3 задаются мягкие граничные условия. Входное и выходное сечения трубы располагаются на расстоянии от сужения, достаточном для реализации установившегося течения вблизи этих сечений при заданных параметрах задачи ($L_1/R_2 = 10$, $L_2/R_2 = 20$). Степень сужения трубы определяется отношением радиуса широкой части к радиусу узкой части $\beta = R_1/R_2$ (рис. 1). Условия на границах исследуемой области записываются в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \psi &= \int_0^r u r dr, \quad \omega = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad z = 0, \quad 0 \leq r \leq \beta; \\ \Gamma_2 : \psi &= const, \quad \omega = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad r = \beta, \quad 0 \leq z \leq \frac{L_1}{R_2}, \\ \psi &= const, \quad \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad 1 \leq r \leq \beta, \quad z = \frac{L_1}{R_2}, \\ \psi &= const, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad r = 1, \quad \frac{L_1}{R_2} \leq z \leq \frac{L_1}{R_2} + \frac{L_2}{R_2}; \\ \Gamma_3 : \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad z = \frac{L_1}{R_2} + \frac{L_2}{R_2}; \\ \Gamma_4 : \psi &= 0, \quad \omega = 0, \quad r = 0. \end{aligned}$$

Метод решения

Для получения стационарного решения задачи используется метод установления, в соответствии с которым в основные уравнения добавляется фиктивная производная по времени [16]. Дискретизация уравнений выполняется конечно-разностным методом на основе схемы переменных направлений [17]. Решение преобразованных уравнений осуществляется методом прогонки [16].

Степенная реологическая модель жидкости при $n < 1$ дает «бесконечное» значение эффективной вязкости в окрестности оси симметрии, где $A \rightarrow 0$. Для реализации устойчивого расчета течения степенной жидкости во всей области течения, включая область малых значений A , проводится регуляризация реологической модели, которая предполагает внесение малого добавочного члена ε в выражение для эффективной вязкости. Учитывая добавку, формула (3) принимает вид

$$B = (A + \varepsilon)^{n-1}. \quad (4)$$

Данная модификация, допуская предельный переход к степенной модели при $\varepsilon \rightarrow 0$, расширяет диапазон изменения показателя нелинейности для устойчивого расчета [18].

Для верификации численного алгоритма на основе результатов тестовых расчетов выполняется проверка аппроксимационной сходимости. Профили аксиальной скорости, формируемые на стыке широкой и узкой частей трубы, при различных значениях шага квадратной сетки (h) показаны на рис. 2. Для случая $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.5$ рассчитанное значение аксиальной скорости на оси симметрии в выходном сечении трубы (u^*) сравнивалось со значением, полученным аналитически для трубы постоянного радиуса с полностью развитым течением

$$u_{\text{ан}}(r=0) = \frac{3n+1}{n+1}.$$

Значения относительной ошибки величины скорости ($E = |(u_{\text{ан}} - u^*)| / u_{\text{ан}} \cdot 100\%$) в зависимости от шага сетки и параметра регуляризации приведены в табл. 1 (при $\varepsilon = 0.001$) и табл. 2 (при $h = 0.025$) соответственно. Результаты, представленные на рис. 2 и в табл. 1, демонстрируют аппроксимационную сходимость численного алгоритма. Для дальнейших расчетов выбран шаг сетки $h = 0.025$. Из табл. 2 видно, что при заданных параметрах $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.5$ уменьшение ε способствует уменьшению относительной ошибки E . Анализ данных позволяет выбрать в качестве параметра регуляризации $\varepsilon = 0.001$.

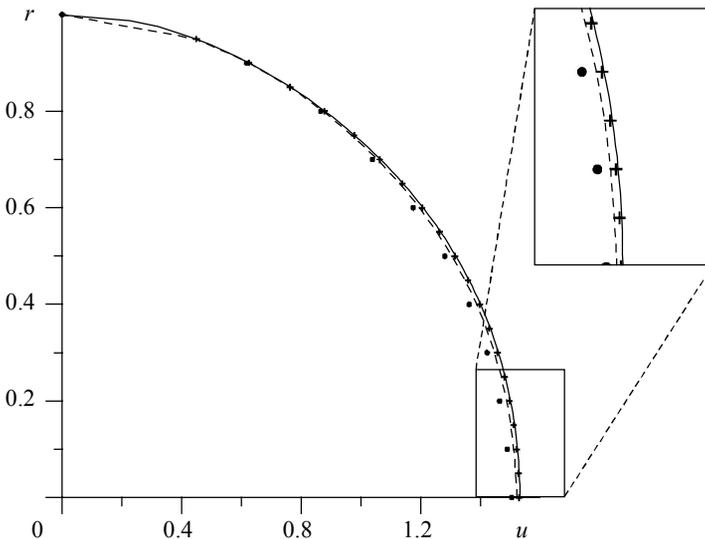


Рис. 2. Профиль аксиальной скорости в скачке сечения ($Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.5$, $\varepsilon = 0.001$).

Обозначения: ●●● – $h = 0.1$, ---- $h = 0.05$, ++++ $h = 0.025$, ——— $h = 0.0125$

Fig. 2. Axial velocity profile at the contraction plane ($Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.5$, and $\varepsilon = 0.001$).

Notations: ●●● – $h = 0.1$, ---- $h = 0.05$, ++++ $h = 0.025$, ——— $h = 0.0125$

Таблица 1

h	$E, \%$
0.1	1.550
0.05	0.292
0.025	0.071
0.0125	0.004

Таблица 2

ε	$E, \%$
0.1	1.765
0.05	0.969
0.01	0.188
0.005	0.053
0.001	0.031

В процессе течения жидкости в трубе со скачком сечения имеют место два вида потерь полного давления: потери на трение $\Delta P_{\text{тр}}$, которые являются следствием проявления вязких сил в потоке, и местные потери $\Delta P_{\text{м}}$ в окрестности скачка сечения [19]. Сумма указанных потерь представляет собой перепад полного давления между входной и выходной границами трубы:

$$P_1 - P_2 = \Delta P = \Delta P_{\text{тр}} + \Delta P_{\text{м}}.$$

Отношение потерь полного давления на участке к динамическому напору определяет коэффициент гидравлического сопротивления [19]

$$C = \frac{\Delta P}{0.5\rho U^2} = \frac{\Delta P_{\text{тр}} + \Delta P_{\text{м}}}{0.5\rho U^2} = C_{\text{тр}} + C_{\text{м}},$$

где $C_{\text{м}}$ – коэффициент местного сопротивления, $C_{\text{тр}}$ – коэффициент сопротивления трения, определяемый по формуле

$$C_{\text{тр}} = \frac{2^{3+n}}{\text{Re}} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \cdot \frac{L_2}{D} \left[\frac{L_1}{L_2 \cdot \beta^{3n+1}} + 1 \right].$$

Расчетная формула для коэффициента местного сопротивления получается в результате применения уравнения Бернулли к сечениям, расположенным вверх и вниз по течению от внезапного сужения

$$C_{\text{м}} = \frac{\Delta p_{\text{м}}}{0.5\rho U^2} - \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta^4} \right), \quad (5)$$

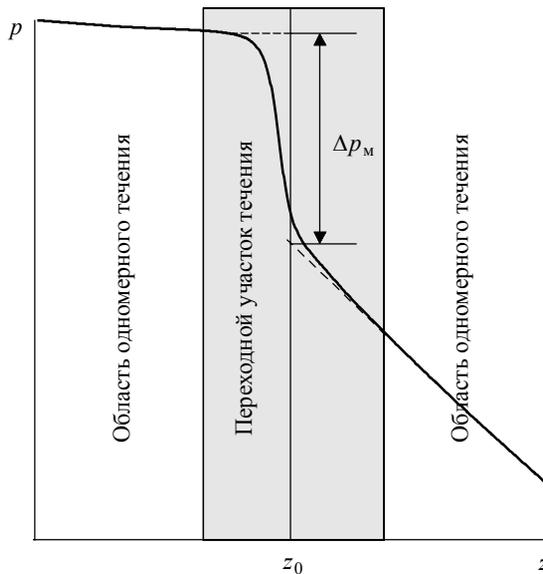


Рис. 3. Схематичное распределение давления вдоль трубы с внезапным сужением
Fig. 3. Schematic representation of the pressure distribution along a pipe with sudden contraction

где Δp_m – потери гидродинамического давления на преодоление сужения, α – коэффициент коррекции кинетической энергии, который учитывает неоднородность профиля скорости в трубе и рассчитывается по формуле [20]

$$\alpha = \frac{3(3n+1)^2}{(2n+1)(5n+3)}.$$

Значение Δp_m вычисляется экстраполяцией прямолинейных профилей давления на участках одномерного течения в сечение z_0 , где расположен скачок сечения (рис. 3).

Коэффициент местного гидравлического сопротивления можно также представить как отношение потерянной на участке между входом и выходом энергии (мощности) к кинетической энергии (мощности) во входном сечении [19]

$$C_m = \frac{\Delta N}{(1/2)\rho F U^3} - C_{тр}, \quad (6)$$

где $\Delta N = 2\pi \iint_{\Omega} B A^2 d\Omega$ – мощность, теряемая на данном участке, т.е. механическая энергия, которая переходит в тепловую энергию за единицу времени [21], F – площадь входного сечения.

Результаты

Для проведения параметрических расчетов выбраны следующие диапазоны изменения основных параметров: $0.1 \leq Re \leq 100$, $1.25 \leq \beta \leq 4$, $0.6 \leq n \leq 1.5$. На основе полученных данных восстановлены картины течения дилатантной (рис. 4, *a*) и псевдопластичной (рис. 4, *b*) жидкостей. Видно, что характер и структура потока двух жидкостей качественно совпадают. В обоих случаях на достаточном удалении от скачка сечения вниз и вверх по потоку формируются зоны одномерного течения, а вблизи сужения – зона двумерного течения. В окрестности внутреннего угла образуется циркуляционная зона, размер которой увеличивается с ростом значения показателя нелинейности.

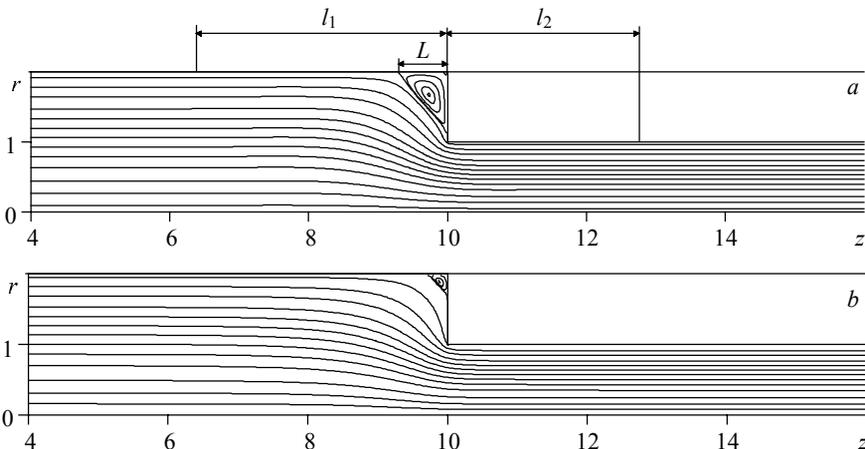


Рис. 4. Распределения линий тока: (а) $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 1.5$, (б) $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.5$
Fig. 4. Streamline distributions: (а) $Re = 1$, $\beta = 2$, and $n = 1.5$; (б) $Re = 1$, $\beta = 2$, and $n = 0.5$

Для количественного анализа течения вводятся безразмерные геометрические характеристики структуры потока (рис. 4, *a*): длины зон двумерного течения, формируемых до и после сужения (l_1 и l_2 соответственно), длина циркуляционной зоны (L). Величины l_1 и l_2 определяются расстоянием от скачка до поперечных сечений, в которых на оси симметрии аксиальная скорость принимает значения, отличные на 1% от тех, которые реализуются в области одномерного течения в узкой и широкой частях канала соответственно.

Зависимости длин зон двумерного течения от числа Рейнольдса, коэффициента сужения трубы и степени нелинейности жидкости представлены на рис. 5.

Изменения l_1 , l_2 , L имеют следующий характер:

- рост числа Рейнольдса способствует уменьшению l_1 и L и значительному увеличению l_2 за счет преобладания инерционных сил над вязкими силами (рис. 5, *a*);
- с увеличением степени сужения трубы происходит увеличение L и l_1 , при этом характер течения в узкой части трубы меняется слабо, поэтому изменение l_2 незначительно (рис. 5, *b*);
- при увеличении показателя нелинейности l_1 и l_2 монотонно уменьшаются, при этом значения L растут (рис. 5, *c*).

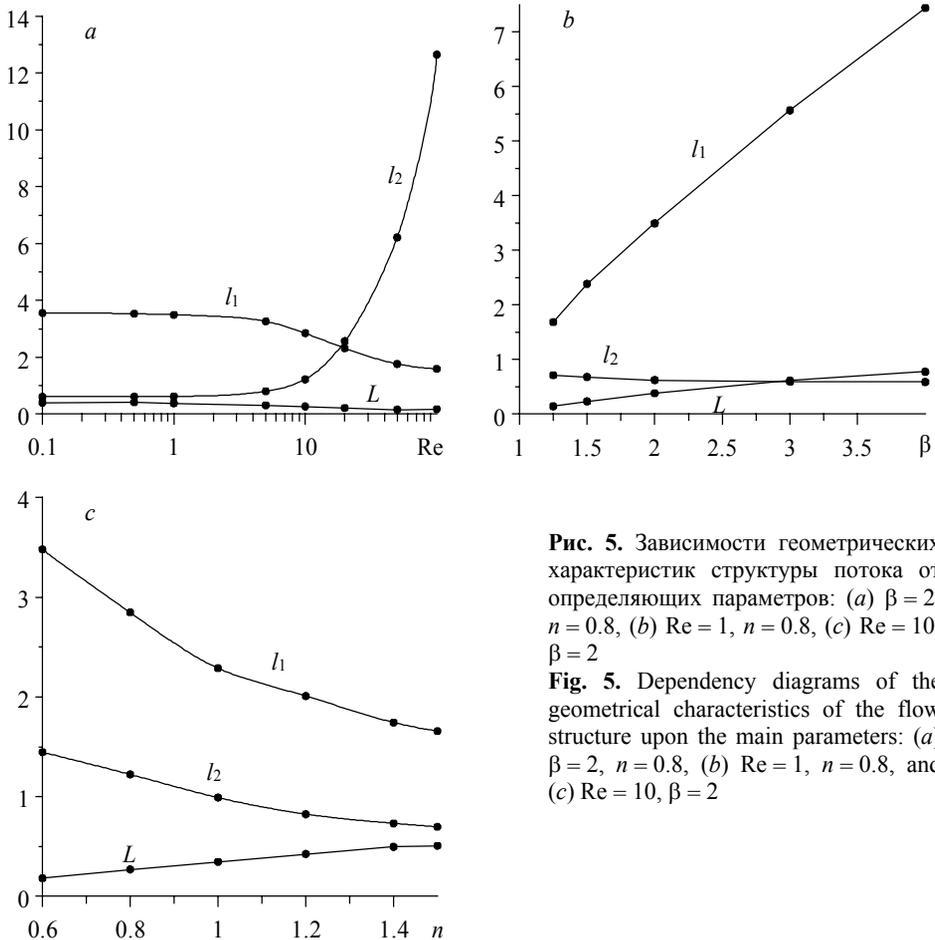


Рис. 5. Зависимости геометрических характеристик структуры потока от определяющих параметров: (а) $\beta = 2$, $n = 0.8$, (b) $Re = 1$, $n = 0.8$, (с) $Re = 10$, $\beta = 2$

Fig. 5. Dependency diagrams of the geometrical characteristics of the flow structure upon the main parameters: (a) $\beta = 2$, $n = 0.8$, (b) $Re = 1$, $n = 0.8$, and (c) $Re = 10$, $\beta = 2$

На рис. 6 представлены распределения линий тока в окрестности скачка сечения, взятые из [22] и полученные в данной работе. Сравнение проводится при следующих параметрах: $\beta = 4$, $Re = 10, 50$, $n = 0.5, 1$. Для всех рассмотренных случаев наблюдается хорошее согласование картин течения.

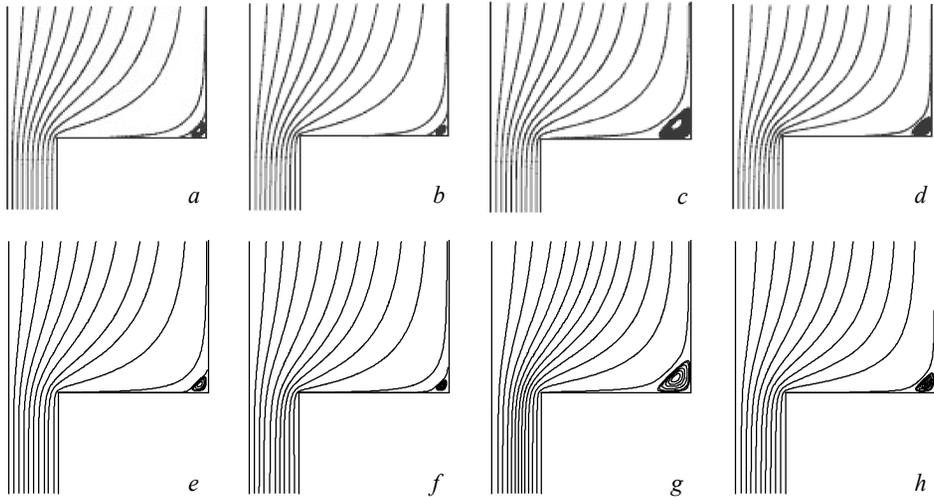


Рис. 6. Сравнение распределений линий тока из статьи [22] (*a, b, c, d*) и данной работы (*e, f, g, h*) для $\beta = 4$: (*a, e*) $Re = 10$, $n = 0.5$; (*b, f*) $Re = 50$, $n = 0.5$; (*c, g*) $Re = 10$, $n = 1$; (*d, h*) $Re = 50$, $n = 1$

Fig. 6. Comparison of the streamline distributions presented in [22] (*a, b, c, d*) and current work (*e, f, g, h*) at $\beta = 4$: (*a, e*) $Re = 10$, $n = 0.5$; (*b, f*) $Re = 50$, $n = 0.5$; (*c, g*) $Re = 10$, $n = 1$; and (*d, h*) $Re = 50$, $n = 1$

Значения коэффициента местного сопротивления были получены с использованием двух формул (5) и (6). Результаты расчетов в зависимости от числа Рейнольдса для псевдопластичной ($n = 0.8$), ньютоновской ($n = 1.0$) и дилатантной ($n = 1.2$) жидкостей при $\beta = 2$ представлены в табл. 3.

Таблица 3

	Re	0.1	1	5	10	20	50	100
$n = 0.8$	C_M (5)	107.747	10.791	2.222	1.202	0.699	0.390	0.313
	C_M (6)	110.616	11.076	2.256	1.202	0.692	0.383	0.294
$n = 1.0$	C_M (5)	134.984	13.516	2.788	1.478	0.853	0.474	0.391
	C_M (6)	138.726	13.880	2.843	1.506	0.862	0.485	0.375
$n = 1.2$	C_M (5)	168.389	16.859	3.450	1.821	1.037	0.583	0.476
	C_M (6)	172.962	17.320	3.531	1.853	1.051	0.591	0.460

Сравнение показало, что в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса максимальное отличие значений местного гидравлического сопротивления, вычисленных по двум различным формулам, не превышает 6.5%. Для дальнейших расчетов C_M использовалась формула (5).

На величину коэффициента местного сопротивления значительное влияние оказывают геометрические характеристики области течения, показатель нелинейности реологической модели жидкости и число Рейнольдса. В результате параметрических расчетов выявлено, что увеличение степени сужения трубы способствует росту C_M до некоторого предельного значения, которое достигается при больших β (рис. 7, *a*). Изменение n от 0.5 до 1.5 приводит к монотонному увеличению C_M (рис. 7, *b*). Рост значений числа Re приводит к падению местных потерь давления в связи с уменьшением размеров области циркуляционного движения и зоны двумерного течения перед уступом (рис. 7, *c*).

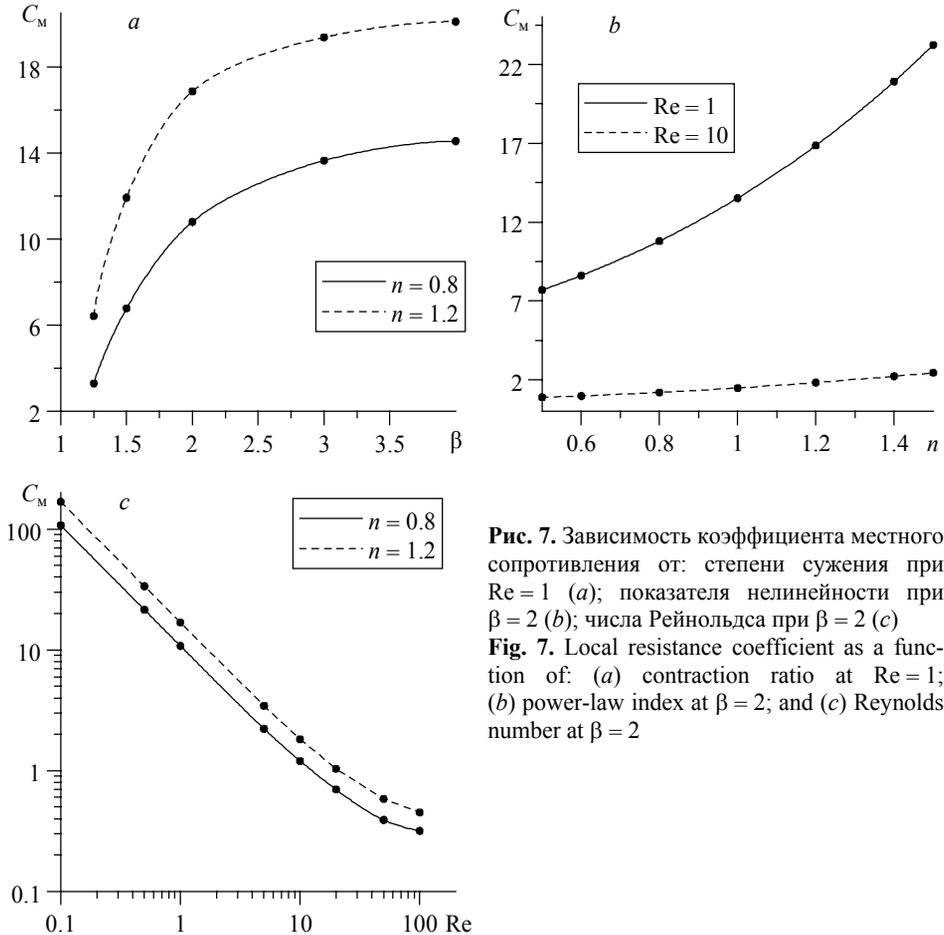


Рис. 7. Зависимость коэффициента местного сопротивления от: степени сужения при $Re = 1$ (*a*); показателя нелинейности при $\beta = 2$ (*b*); числа Рейнольдса при $\beta = 2$ (*c*)

Fig. 7. Local resistance coefficient as a function of: (a) contraction ratio at $Re = 1$; (b) power-law index at $\beta = 2$; and (c) Reynolds number at $\beta = 2$

С целью верификации расчётных данных проводится сравнение с результатами, полученными другими исследователями. На рисунке 8, *a* демонстрируется распределение аксиальной скорости, формируемое в скачке сечения при различных значениях числа Рейнольдса ($Re = 10, 30, 100$) в случае $\beta = 2, n = 1$. Сравнение результатов расчетов с данными работы [23] показало удовлетворительное согласование. Зависимость коэффициента местного сопротивления от числа Рейнольдса подтверждает аналогичную зависимость из работы [15] при $\beta = 4.558, n = 1$ (рис. 8, *b*).

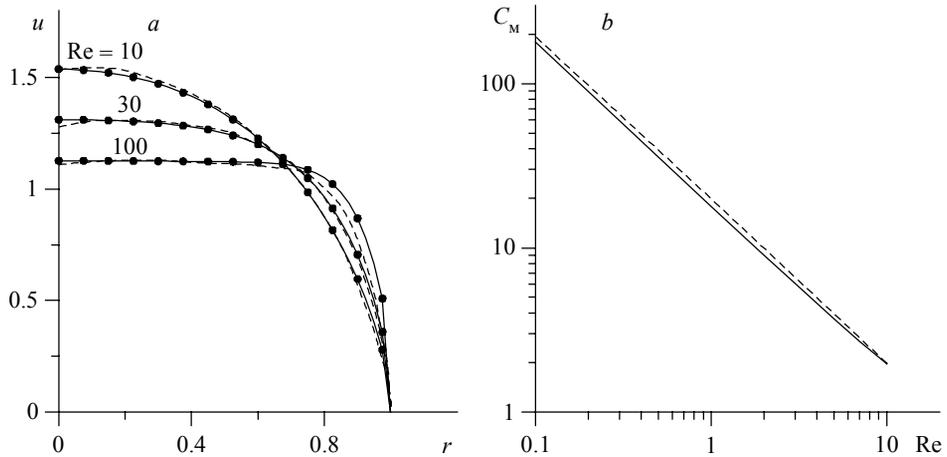


Рис. 8. Сравнение результатов: (а) профиль аксиальной скорости в скачке сечения при различных Re для $\beta = 2$, $n = 1$: - - - - расчеты из [23], ●●● – расчеты из данной работы; (б) коэффициент местного сопротивления в зависимости от Re при $\beta = 4.558$, $n = 1$: - - - - расчеты из [15], ——— – расчеты из данной работы

Fig. 8. Comparison of the results: (а) axial velocity profile at the contraction plane for various Re at $\beta = 2$, $n = 1$: - - - - calculated data from [23], ●●● – calculated data in the current work; (б) local resistance coefficient as a function of Re at $\beta = 4.558$, $n = 1$: - - - - calculated data from [15], ——— – calculated data in the current work

В табл. 4 представлено сравнение результатов расчетов C_M для $\beta = 2.6$, $n = 0.75$, 1.00 , 1.25 в диапазоне $1 \leq Re \leq 100$ с данными из работы [24]. Следует отметить, что для выполнения сравнения результатов в эквивалентных условиях необходимо учитывать различие масштабных величин для вычисления числа Рейнольдса в [24] и в настоящей работе. Наблюдается хорошее согласование значений коэффициента местного сопротивления.

Таблица 4

Re	C_M					
	$n = 0.75$		$n = 1.00$		$n = 1.25$	
	Формула (5)	Работа [24]	Формула (5)	Работа [24]	Формула (5)	Работа [24]
1	12.659	12.827	16.152	16.570	20.708	21.540
5	2.631	2.741	3.328	3.530	4.238	4.564
10	1.450	1.481	1.777	1.900	2.236	2.442
20	0.860	0.850	1.029	1.085	1.277	1.381
50	0.508	0.472	0.588	0.596	0.741	0.744
100	0.323	0.346	0.424	0.433	0.554	0.532

Заключение

Получено численное решение задачи о ламинарном стационарном течении степенной жидкости в трубе со скачком сечения в виде сужения. Восстановлены картины течения псевдопластичной и дилатантной жидкостей. Проведены параметрические исследования геометрических характеристик структуры потока в зависимости от числа Рейнольдса ($0.1 \leq Re \leq 100$), степени сужения трубы ($1.25 \leq \beta \leq 4$) и показателя нелинейности жидкости ($0.5 \leq n \leq 1.5$). Продемонстрированы ре-

зультаты применения двух способов расчета коэффициента местного сопротивления. Построены зависимости местных потерь давления от определяющих параметров задачи. Приведены результаты сравнения полученных данных с данными других авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Astarita G., Greco G.* Excess pressure drop in laminar flow through sudden contraction. Non-Newtonian liquids // *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. 1968. V. 7. No. 4. P. 595–598.
2. *Rama Murthy A.V., Boger D.V.* Developing velocity profiles on the downstream side of a contraction for inelastic polymer solutions // *Transactions of the Society of Rheology*. 1971. V. 15. Iss. 4. P. 709–730.
3. *Kestin J., Sokolov M., Wakeham W.* Theory of capillary viscometers // *Applied Scientific Research*. 1973. V. 27. Iss. 1. P. 241–264.
4. *Walters K., Webster M.F.* The distinctive CFD challenges of computational rheology // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2003. V. 43. P. 577–596.
5. *Mitsoulis E., Vlachopoulos J.* Effect of Reynolds number in laminar flow through a sudden planar contraction // *AIChE Journal*. 1985. V. 31. No. 10. P. 1736–1739.
6. *Huaxiong Huang, Seymour B.R.* A finite difference method for flow in a constricted channel // *Computers & Fluids*. 1995. V. 24. No. 2. P. 153–160.
7. *Luo X.-L.* A control volume approach for integral viscoelastic models and its application to contraction flow of polymer melts // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1996. V. 64. Iss. 2–3. P. 173–189.
8. *Alves M.A., Pinho F.T., Oliveira P.J.* Effect of a high-resolution differencing scheme on finite-volume predictions of viscoelastic flows // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2000. V. 93. P. 287–314.
9. *Dennis S.C.R., Smith F.T.* Steady flow through a channel with a symmetrical constriction in the form of a step // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1980. V. 372. P. 393–414.
10. *Chiang T.P., Sheu T.W.H., Hwang R.R.* Numerical studies of a three-dimensional flow in suddenly contracted channels // *Physics of Fluids*. 2002. V. 14. No. 5. P. 1601–1616.
11. *Lee Keegan F.* Experimental investigation into non-Newtonian fluid flow through gradual contraction geometries: Thesis. University of Liverpool, 2009. 160 p.
12. *Борзенко Е.И., Рыльцева К.Е., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р.* Расчет коэффициента местного сопротивления для течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе с внезапным сужением // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2017. № 48. С. 36–48.
13. *Gupta M., Hieber C.A., Wang K.K.* Entrance effects for power-law fluid // *Polymer Engineering and Science*. 1994. V. 34. No. 3. P. 209–212.
14. *Трезубов В.П., Жуков Н.К.* Компьютерное моделирование потока крови при наличии сосудистых патологий // *Российский журнал биомеханики*. 2017. Т. 21. № 2. С. 201–210.
15. *Pienaar V.G.* Viscous flow through sudden contractions / Dis. Cape Peninsula University of Technology, 2004. 198 p.
16. *Годунов С.К., Рябенкий В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
17. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
18. *Шрагер Г.Р., Козлобродов А.Н., Якутенок В.А.* Моделирование гидродинамических процессов в технологии переработки полимерных материалов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. 230 с.
19. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям / под ред. М.О. Штейнберга. 3-е изд. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.
20. *Tiu C., Boger D.V., Halmos A.L.* Generalized method for predicting loss coefficients in entrance region flows for inelastic fluids // *The Chemical Engineering Journal*. 1972. V. 4. Iss. 2. P. 113–117.

21. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. 4-е изд. М.: Физматлит, 1963. 728 с.
22. Kfuri S.L.D., Silva J.Q., Soares E.J., Thompson R.L. Friction losses for power-law and viscoplastic materials in an entrance of a tube and an abrupt contraction // J. Petroleum Science and Engineering. 2011. V. 76. Iss. 3–4. P. 224–235.
23. Kim-E M.E., Brown R.A., Armstrong R.C. The roles of inertia and shear-thinning in flow of an inelastic liquid through an axisymmetric sudden contraction // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1983. V. 13. P. 341–363.
24. Kfuri S.L.D., Soares E.J., Thompson R.L., Siqueira R.N. Friction coefficients for Bingham and power-law fluids in abrupt contractions and expansions // J. Fluids Engineering. 2017. V. 139(2). P. 1–8.

Статья поступила 25.10.18 г.

Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shragher G.R. (2019) NUMERICAL INVESTIGATION OF NON-NEWTONIAN FLUID FLOW THROUGH A PIPE SUDDEN CONTRACTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 58. pp. 56–70

DOI 10.17223/19988621/58/5

Keywords: sudden contraction, non-Newtonian fluid, power-law model, sweep method, flow kinematic characteristics, Reynolds number, local resistance.

Sudden contraction represents a geometrical heterogeneity leading to the significant flow structure changes and intensifying energy losses. The fluid flowing through a sudden contraction is of great scientific interest as it is found to be an intermediate stage of the processes taking place in a technical equipment such as pumps, engines, reactors, etc.

In this paper, the problem of a laminar stationary flow of non-Newtonian fluid in a pipe with sudden contraction was numerically solved. The fluid rheological properties were described by the Ostwald-de Waele power law. The constitutive equations were written using the stream function and vorticity variables in a cylindrical coordinate system. The asymptotic time solution to the unsteady flow equations was obtained in order to derive a steady-state solution to the initial problem. The main equations were discretized using the finite-difference method based on the alternative directions scheme and solved using the sweep method. To verify numerical algorithm developed, the approximating convergence was tested on the sequence of square grids.

According to the flow patterns, pseudoplastic and dilatant fluid flow structures both consist of one-dimensional zones next to the inlet and outlet sections and two-dimensional zones in the vicinity of contraction plane. To evaluate the impact of the Reynolds number, pipe contraction ratio, and power-law index on the length of two-dimensional flow regions, the dependency diagrams were plotted in a wide range of the parameters. Two different methods were used to calculate the local resistance coefficient. The obtained values were found to be in a good agreement. A parametric study was performed to reveal the influence of the governing parameters on the local energy losses.

Financial support. The research is implemented at the expanses of the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00021).

BORZENKO Evgeniy Ivanovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

RYLTSEVA Kira Evgen'evna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kiraworkst@gmail.com

SHRAGER Gennady Rafailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shg@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Astarita G., Greco G. (1968) Excess pressure drop in laminar flow through sudden contraction. Non-Newtonian liquids. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. 7(4). pp. 595–598. DOI: 10.1021/i160025a005.
2. Rama Murthy A.V., Boger D.V. (1971) Developing velocity profiles on the downstream side of a contraction for inelastic polymer solutions. *Transactions of the Society of Rheology*. 15(4). pp. 709–730. DOI: 10.1122/1.549239.
3. Kestin J., Sokolov M., Wakeham W. (1973) Theory of capillary viscometers. *Applied Scientific Research*. 27(1). pp. 241–264. DOI: 10.1007/BF00382489.
4. Walters K., Webster M.F. (2003) The distinctive CFD challenges of computational rheology. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 43. pp. 577–596. DOI: 10.1002/flid.522.
5. Mitsoulis E., Vlachopoulos J. (1985) Effect of Reynolds number in laminar flow through a sudden planar contraction. *AIChE Journal*. 31(10). pp. 1736–1739. DOI: 10.1002/aic.690311020.
6. Huaxiong Huang, Seymour B.R. (1995) A finite difference method for flow in a constricted channel. *Computers & Fluids*. 24(2). pp. 153–160. DOI: 10.1016/0045-7930(94)00022-Q.
7. Luo X.-L. (1996) A control volume approach for integral viscoelastic models and its application to contraction flow of polymer melts. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 64(2–3). pp. 173–189. DOI: 10.1016/0377-0257(96)01428-0.
8. Alves M.A., Pinho F.T., Oliveira P.J. (2000) Effect of a high-resolution differencing scheme on finite-volume predictions of viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 93. pp. 287–314. DOI: 10.1016/S0377-0257(00)00121-X.
9. Dennis S.C.R., Smith F.T. (1980) Steady flow through a channel with a symmetrical constriction in the form of a step. *Proceedings of the Royal Society of London. A*. 372. pp. 393–414. DOI: 10.1098/rspa.1980.0119.
10. Chiang T.P., Sheu T.W.H., Hwang R.R. (2002) Numerical studies of a three-dimensional flow in suddenly contracted channels. *Physics of Fluids*. 14(5). pp. 1601–1616. DOI: 10.1063/1.1459719.
11. Lee Keegan F. (2009) *Experimental Investigation into Non-Newtonian Fluid Flow through Gradual Contraction Geometries: Thesis*. University of Liverpool.
12. Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Frolov O.Yu., Shrager G.R. (2017) Raschet koefitsienta mestnogo soprotivleniya dlya techeniya vyazkoy neshhimaemoy zhidkosti v trube s vnezapnym suzheniem [Calculation of the local resistance coefficient of viscous incompressible fluid flow in a pipe with sudden contraction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 36–48. DOI: 10.17223/19988621/48/4.
13. Gupta M., Hieber C.A., Wang K.K. (1994) Entrance effects for power-law fluid. *Polymer Engineering and Science*. 34(3). pp. 209–212. DOI: 10.1002/pen.760340306.
14. Tregubov V.P., Zhukov N.K. (2017) Komp'yuternoe modelirovanie potoka krovi pri nalichii sosudistyykh patologiy [Computer simulation of the blood stream with availability of vessel pathologies]. *Russian Journal of Biomechanics*. 21(2). pp. 201–210. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2017.2.07.
15. Pienaar V.G. (2004) *Viscous flow through sudden contractions. Dissertation*. Cape Peninsula University of Technology.
16. Godunov S.K., Ryabentkiy V.S. (1977) *Raznostnye skhemy* [Difference Schemes]. Moscow: Nauka.
17. Samarskiy A.A. (1971) *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction into the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
18. Shrager G.R., Kozlobrodov A.N., Yakutenok V.A. (1999) *Modelirovanie gidrodinamicheskikh protsessov v tekhnologii pererabotki polimernykh materialov* [Fluid Dynamic Simulations in Polymer Processing]. Tomsk: Tomsk Univ. Publ.
19. Idel'chik I.E. (1966) *Handbook of Hydraulic Resistance*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations.

20. Tiu C., Boger D.V., Halmos A.L. (1972) Generalized method for predicting loss coefficients in entrance region flows for inelastic fluids. *The Chemical Engineering Journal*. 4(2). pp. 113–117. DOI: 10.1016/0300-9467(72)80003-0.
21. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. (1964) *Theoretical Hydromechanics*. English translation of 5th Russian ed. New York: Wiley.
22. Kfuri S.L.D., Silva J.Q., Soares E.J., Thompson R.L. (2011) Friction losses for power-law and viscoplastic materials in an entrance of a tube and an abrupt contraction. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 76(3–4). pp. 224–235. DOI: 10.1016/j.petrol.2011.01.002.
23. Kim-E M.E., Brown R.A., Armstrong R.C. (1983) The roles of inertia and shear-thinning in flow of an inelastic liquid through an axisymmetric sudden contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 13. pp. 341–363. DOI: 10.1016/0377-0257(83)80028-7.
24. Kfuri S.L.D., Soares E.J., Thompson R.L., Siqueira R.N. (2017) Friction coefficients for Bingham and power-law fluids in abrupt contractions and expansions. *Journal of Fluids Engineering*. 139(2). pp. 1–8. DOI: 10.1115/1.4034521.

Received: October 25, 2018