

УДК 519.115.1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДОНАХЬЮ: КАРУСЕЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ И РУЧНЫЕ КОМПОНЕНТЫ

И. А. Пушкарев, В. А. Бызов

Вятский государственный университет, г. Киров, Россия

Изучается динамическая система, действующая на комбинаторных интерпретациях чисел Каталана. Описаны два новых карусельных эффекта (для триад и ростков), первый из которых использован для перехода от локального свойства деревьев (отсутствие триад определённых типов) к некоторым глобальным свойствам орбит. Показано, что отмеченный эффект носит массовый характер. Построено несколько новых ручных классов орбит, в том числе не только с постоянными длинами орбит, но и с растущими как $\Theta(n^2)$. Решены соответствующие перечислительные задачи.

Ключевые слова: числа Каталана, плоские кубические деревья, преобразование Донахью, орбиты, карусельный эффект, ручные компоненты.

DOI 10.17223/20710410/44/2

DONAGHEY'S TRANSFORMATION: CAROUSEL EFFECTS AND TAME COMPONENTS

I. A. Pushkarev, V. A. Byzov

*Vyatka State University, Kirov, Russia***E-mail:** vbyzov@yandex.ru

In this paper, Donaghey's transformation is investigated. It is a combinatorial dynamical system, based on the combinatorial interpretations of Catalan numbers, with the transition function of it being the composition of the direct and the inverse bijections between cubic and non-cubic trees. The dynamical system under investigation operates on a finite set and is invertible; therefore it is a mere permutation of trees. The properties of the cycles of this permutation, called the orbits, are studied in terms of permutation of structural elements of trees. In the course of studies, the systematic initiation of particular effects is indicated. These particular effects are referred to as "carousel": it is the movement of objects from one classification category to another, typical of natural classifications. In this form, they look as an indicator of system complexity. Two new carousel effects for structural elements, referred to as triads and germs, are described. The carousel effect for triads is used for the detection of two families of trees; the lengths of all tree arcs in the first family are equal to one; in the second family, they are equal to two. Here, the term "the arcs of the orbit" is used to denote its fragments between two trees, which have no left subtrees. Therefore, the properties of the arcs are the global properties of the orbits, and the carousel effects are local. The corresponding enumeration problems are solved: it is demonstrated that the number of trees of the first family increases as $\frac{C}{n^{3/2}} \left(\frac{5}{2^{4/3} - 2^{2/3} + 1} \right)^n$, the number of trees of the second family — as $\frac{3^{n+1/2}}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$ (n is the number of triads).

The paper presents the family of cycles with the length 6, which are different from the ones discovered by L. Shapiro, the number of which increases as $\Theta(n^2)$, and the family of cycles with length 9, the number of which increases as $\Theta(2^{n/2})$. A class of orbits with the lengths growing up as $\Theta(n^2)$ is detected.

Keywords: *Catalan numbers, plane cubic trees, Donaghey's transformation, carousel effect, tame components.*

Введение

Плоские деревья с висячим корнем и плоские кубические деревья с висячим корнем [1] — две хорошо изученные комбинаторные интерпретации чисел Каталана.

Напомним основные определения.

Определение 1 [2]. Деревом, растущим из корня r , называется слабосвязный орграф, в котором полустепень входа каждой вершины, кроме r , равна 1, а полустепень входа вершины r равна нулю.

В [2] показано, что условие слабой связности в данном случае равносильно отсутствию ориентированных циклов и что в любую некорневую вершину ведёт единственный ориентированный путь из корня. Все деревья, рассматриваемые в данной работе, являются конечными, то есть имеют конечное множество вершин (из чего следует, что и все остальные множества структурных элементов таких деревьев конечны).

Определение 2.

1. Пусть u и v — две различные вершины дерева, соединённые ориентированным ребром $e = (u, v)$. Вершина v называется *сыном* вершины u , а вершина u — *отцом* вершины v .
2. Дерево, растущее из корня r , называется *деревом с висячим корнем*, если множество сыновей корня r состоит ровно из одной вершины.
3. Вершины дерева, имеющие непустое множество сыновей, называются *нелистами*. Вершины дерева, не имеющие сыновей, называются *листьями*.

Определение 3. Дерево, растущее из корня r , называется *плоским*, если множество сыновей каждой его вершины линейно упорядочено. В силу конечности можно считать, что сыновья каждой вершины занумерованы некоторым начальным отрезком натурального ряда: первый сын, второй сын и т. д.

Замечание 1. Термин «плоское» в данном случае не имеет никакого отношения к планарности, его следует понимать в смысле «изображённое в плоскости». При изображении плоского дерева на плоскости сыновей конкретной фиксированной вершины, как правило, располагают под ней примерно на одной высоте слева направо в порядке возрастания номеров.

Определение 4. Плоское дерево с висячим корнем называется *кубическим*, если множество сыновей любого нелиста, кроме корня, состоит ровно из двух элементов. В этом случае термин «первый сын» принято заменять термином «левый сын», а «второй сын» — термином «правый сын».

Определение 5. Плоское дерево называется *бинарным*, если множество сыновей любого нелиста, кроме корня, состоит не более чем из двух элементов; для множества сыновей каждого нелиста возможен один из трёх альтернативных вариантов:

- 1) вершина имеет только левого сына;
- 2) вершина имеет только правого сына;

3) вершина имеет ровно двух сыновей, один из них левый, а другой — правый.

Замечание 2. При этом типы сыновей существенны: например, два дерева, имеющие одно и то же множество вершин, у одного из которых вершина v является единственным (левым) сыном вершины u , а у другого — правым, различны.

Замечание 3. Бинарные деревья получаются из кубических удалением всех листьев. Очевидно, что соответствующее отображение является биекцией.

Известно, что количество плоских деревьев с висячим корнем и $n + 1$ некорневыми вершинами и количество плоских кубических деревьев с висячим корнем и $n + 1$ листьями равны числу Каталана $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Существуют два варианта построения биекции (перехода от кубического дерева к некубическому) — левый и правый. При правом варианте вершинами некубического дерева становятся правые цепи (потомков). Опишем его подробно.

Определение 6. Пусть $u = u_1$ — вершина плоского кубического дерева, не являющаяся правым сыном никакой вершины (то есть являющаяся либо левым сыном некоторой вершины, либо сыном корня). Обозначим u_2 её правого сына, u_{k+1} — правого сына вершины u_k , $k = 2, 3, \dots$ (до тех пор, пока правые сыновья существуют). *Правой цепью* (потомков вершины u) называется максимальная (возможно, одноэлементная, если u является листом) цепь вершин, которые можно пронумеровать таким образом. В силу максимальной последняя вершина такой цепи — обязательно лист. Вершинами некубического дерева являются правые цепи потомков.

Потомки вершины w , отождествлённой с данной цепью, определяются следующим образом. Все вершины правой цепи, кроме последней, являются нелистьями. Следовательно, кроме правых сыновей, они имеют и левых, каждый из которых является началом аналогичной цепи правых потомков. Соответствующие цепи правых потомков, по определению, являются сыновьями w (следовательно, количество её сыновей на единицу меньше длины соответствующей ей правой цепи). При этом порядок сыновей совпадает с порядком вершин в цепи, от которых они ответвляются.

Сыном корня некубического дерева, соответствующего данному кубическому, является правая цепь потомков сына корня, называемая *старшей правой цепью*.

Тем самым правый вариант перехода от кубического дерева T к некубическому $r(T)$ описан полностью. Он проиллюстрирован на рис. 1, где несколько правых цепей обведены пунктиром. Левый вариант l определяется аналогично.

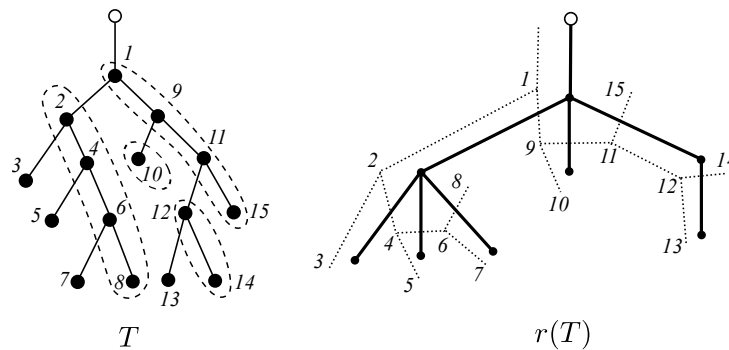


Рис. 1. Правая биекция r

Обратный переход (от некубического дерева к кубическому) также имеет левый и правый варианты. Опишем подробно правый вариант — отображение, обратное к r .

При этом переходе вершинам кубического дерева в некубическом соответствуют объекты, называемые *уголками*.

Определение 7. Пусть u — вершина плоского дерева. *Уголком* называется тройка (u, e_1, e_2) , где e_1 и e_2 — два (необязательно различных) ребра, смежных с вершиной u . Уголок (u, e_1, e_2) может быть:

- *открывающим*, если e_1 — ребро, входящее в вершину u , e_2 — первое ребро, выходящее из вершины u ;
- *закрывающим*, если e_2 — ребро, входящее в вершину u , e_1 — последнее ребро, выходящее из вершины u ;
- *регулярным*, если оба ребра e_1 и e_2 выходят из вершины u и при этом являются соседними в смысле линейного порядка на сыновьях вершины u , то есть имеют номера n и $n + 1$;
- *развёрнутым*, если оба ребра $e_1 = e_2$ совпадают с ребром, входящим в вершину u (которая в этом случае обязана быть листом);
- *корневым*, если $u = r$ — корень дерева и оба ребра $e_1 = e_2$ совпадают с ребром, выходящим из вершины r .

Все уголки, рассматриваемые в работе, принадлежат к одному из пяти указанных типов. На рис. 2 уголок 1 является корневым, уголки 2 и 6 — открывающими, 3, 4 и 7 — регулярными, 5 и 8 — закрывающими, 9 — развёрнутым.

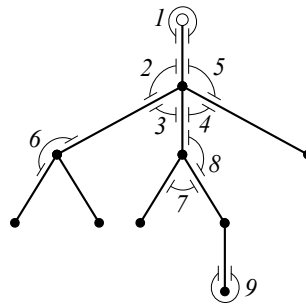


Рис. 2. Уголки в некубическом дереве

На множестве уголков плоского некубического дерева зададим структуру плоского кубического дерева, тем самым определяя его.

Определение 8.

1. Пусть (r, e, e) — корневой уголок плоского дерева. Он является корнем искомого кубического дерева. Его единственным сыном называется уголок (v, e, e_1) , где v — сын корня r ; $e = (r, v)$; e_1 — первое ребро, выходящее из вершины v , если такое существует, или $e_1 = e$, если таких нет (в этом случае сын корня оказывается развёрнутым уголком, а дерево тривиальное — состоит только из корня и единственной некорневой вершины).

2. Пусть (u, e_1, e_2) — уголок плоского дерева, не являющийся ни развёрнутым, ни закрывающим. Его правым сыном называется уголок (u, e_2, e_3) , где e_3 — ребро, выходящее из вершины u , следующее за ребром e_2 , если e_2 — не последнее ребро, выходящее из вершины u , или ребром, входящим в вершину u , если e_2 — последнее такое ребро (в этом случае правый сын оказывается закрывающим уголком).

3. Пусть (u, e_1, e_2) — уголок плоского дерева, не являющийся развёрнутым. Его левым сыном называется уголок (v, e_2, e_3) , где v — конец ребра e_2 ; e_3 — первое ребро, выходящее из вершины v , если такое есть, или $e_3 = e_2$, если таких нет (в последнем случае левый сын оказывается развёрнутым уголком).

Иными словами, переход к левому сыну соответствует переходу по ребру вниз, а к правому сыну — переходу через ребро направо.

Считая для определённости, что обе биекции l и r преобразуют кубическое дерево в некубическое, рассмотрим композицию $\tau = l^{-1} \circ r$ (используется правая запись: сначала выполняется r , а затем l^{-1}).

Определение 9. Отображение τ (биекция множества кубических деревьев с n листьями на себя) называется *преобразованием Донахью* множества плоских кубических деревьев.

Исключив из конструкции некубические деревья, можно получить непосредственное описание преобразования Донахью на языке кубических деревьев, а именно:

- 1) Дерево разбивается на правые цепи, как в описании биекции r .
- 2) Каждая правая цепь становится левой, порядок в ней инвертируется. В частности, старшим элементом становится тот, который в исходной цепи являлся листом.
- 3) Линейный порядок на сыновьях рассматриваемой цепи сохраняется.

Замечание 4. Несмотря на сохранение порядка, цепи, являющиеся сыновьями, после преобразования становятся смежны не с той же самой вершиной цепи-отца, с которой были смежны перед преобразованием, а с той, которая была её правым сыном (рис. 3).

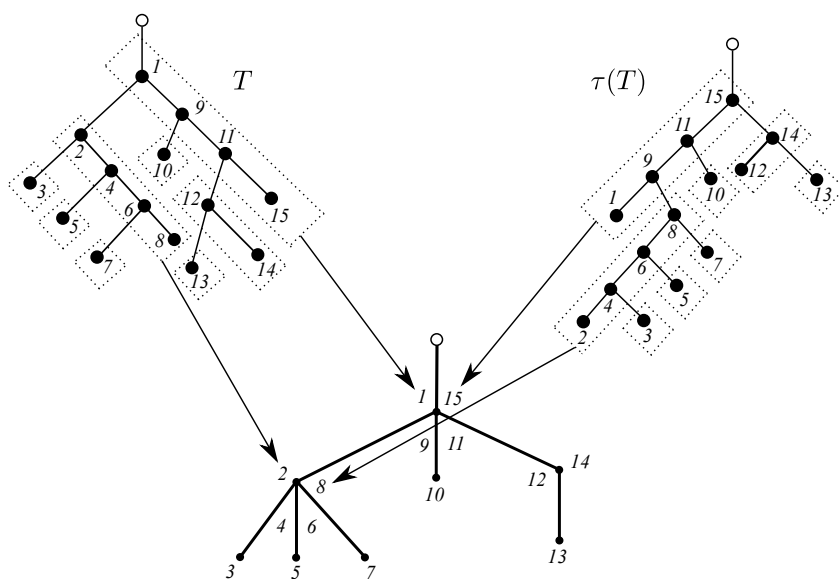


Рис. 3. Преобразование Донахью кубических деревьев

Приведённое определение преобразования Донахью не является единственно возможным, имеется большое количество довольно разнообразных его равносильных определений. Источником таковых, во-первых, является большое количество комбинаторных интерпретаций чисел Каталана, каждая из которых позволяет некоторым образом определить преобразование. В [3] приводится небольшой обзор такого рода определений на языках наиболее распространённых интерпретаций (положительные пути хромого короля, правильные расстановки скобок, триангуляции правильного многоугольника и т. д.). Во-вторых, даже на языке деревьев можно дать несколько определений, равносильность которых не вполне тривиальна. Дело в том, что описание плоского дерева как графа, определённым образом вложенного в плоскость, не

является единственно возможным. Например, полезным является рекурсивное определение плоского кубического дерева с висячим корнем.

Определение 10. Плоским кубическим деревом с висячим корнем называется объект, состоящий из следующих частей:

- 1) выделенной вершины r — висячего корня;
- 2) вершины u_0 , являющейся левым сыном корня;
- 3) цепочки правых потомков $u_1, u_2, \dots, u_k$ вершины u_0 , в которой вершина u_{i+1} , $i = 1, \dots, k - 1$, является правым сыном вершины u_i , а вершина u_k не имеет сыновей (является листом);
- 4) набора дочерних деревьев $T_0, T_1, \dots, T_{k-1}$, корни которых отождествляются с вершинами $u_0, u_2, \dots, u_{k-1}$ соответственно.

Из симметричности понятия кубического дерева следует, что существует симметричное рекурсивное определение — в терминах цепочек левых потомков. Эти определения имеют один легкоустранимый дефект: в одном (приведённом) сын корня является левым сыном, в другом (симметричном) — правым. Поэтому в них разумно внести поправку, поясняющую, что «первоначальный» сын корня является одновременно и левым и правым сыном.

В терминах рекурсивных определений плоского кубического дерева с висячим корнем нетрудно дать формально другое определение преобразования Донахью.

Определение 11. Пусть T — плоское кубическое дерево с висячим корнем, сыном корня u_0 , цепочкой правых потомков $u_1, u_2, \dots, u_k$ (u_k — лист) и дочерними деревьями $T_0, T_1, \dots, T_{k-1}$, имеющее n вершин. Пусть для всех деревьев, имеющих меньшее количество вершин, преобразование Донахью определено, в частности, пусть $D_0, D_1, \dots, D_{k-1}$ — результаты преобразований деревьев $T_0, T_1, \dots, T_{k-1}$ соответственно. Результатом преобразования дерева T называется дерево с корнем r , сыном корня u_k , цепочкой левых потомков $u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_0$ и дочерними поддеревьями $D_0, D_1, \dots, D_{k-1}$, корни которых отождествлены с вершинами $u_1, u_2, \dots, u_k$ соответственно.

Теорема 1 (равносильность определений преобразования Донахью).

Определения 9 и 11 равносильны.

Доказательство. Индукция по числу вершин некубического дерева.

Б а з а. Для тривиального некубического дерева с единственным некорневым листом утверждение очевидно.

И н д у к т и в н ы й п е р е х о д. Пусть дерево T имеет n некорневых вершин и для всех некубических деревьев с меньшим количеством некорневых вершин утверждение доказано.

Предположим, что сын корня u дерева T имеет m сыновей. Тогда правая обратная биекция r^{-1} превращает u в цепочку правых потомков $s_1, s_2, \dots, s_{m+1}$ длины $m + 1$, а левая обратная l^{-1} — в цепочку левых потомков $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$ той же длины.

Пусть $T_1, T_2, \dots, T_m$ — дочерние некубические деревья, корень которых отождествлён с сыном корня u , под действием правой обратной биекции они переходят в кубические деревья $R_1, R_2, \dots, R_m$, а под действием левой обратной биекции — в деревья $L_1, L_2, \dots, L_m$ соответственно. Тогда все переходы от деревьев R_i к деревьям L_i являются преобразованиями Донахью в смысле обоих определений (которые для дочерних деревьев равносильны по предположению индукции).

Корни кубических деревьев $R_1, R_2, \dots, R_m$ отождествляются с вершинами $s_1, s_2, \dots, s_m$, а корни деревьев $L_1, L_2, \dots, L_m$ — с вершинами $t_2, t_3, \dots, t_{m+1}$, что согласуется с обоими определениями. ■

Рекурсивное определение также не является единственной альтернативой на языке деревьев. Дерево можно строить из элементов, не являющихся вершинами, и каждое такое определение дерева позволяет дать своё собственное определение преобразования Донахью.

Примером альтернативного типа элементов, при помощи которого можно описать структуру дерева, являются *юниты*, неформально говоря — «половинки рёбер». При этом каждое ребро распадается на два юнита, верхний и нижний, верхний смежен с двумя другими юнитами в вершине, из которой выходит ребро, а нижний — в вершине, в которую ребро входит. Не останавливаясь на юнитах, перейдём сразу к производным от них более удобным элементам, называемым *триадами*. Триады в первом приближении соответствуют вершинам бинарного дерева, получающегося из кубического удалением листьев.

Определение 12. Сопоставим каждому нелисту u плоского кубического дерева одноимённую триаду — четвёрку (u, s_1, s_2, s_3) , где элементы s_i — суть юниты (понимаемые просто как формальный атрибут), смежные с этой вершиной (альтернативно: между собой в этой вершине). Для определённости: s_1 — верхний юнит, s_2 — левый, s_3 — правый. Юниты триады могут быть *свободными* или *связанными*:

1. Верхний юнит s_1 является свободным, если триада соответствует сыну корня, и связанным, если триада соответствует нелисту, являющемуся сыном другого нелиста.
2. Левый юнит s_2 является свободным, если левым сыном нелиста u является лист, иначе является связанным. Аналогично определяется свобода или связанность правого юнита s_3 .

Например, если нелист v является левым сыном нелиста u , то левый юнит s_2 триады (u, s_1, s_2, s_3) с верхним юнитом t_1 триады (v, t_1, t_2, t_3) являются связанными (и образуют «полноценное» ребро).

Триаду, содержащую сына корня, назовём *корневой*. Заметим, что на множестве триад дерева можно рассматривать инцидентности аналогично вершинам. Так, например, на рис. 4 слева у триады 7 левым сыном является триада 8, а правым — триада 9. Триада 1 является корневой. Дерево, присоединённое к корневой триаде слева, будем называть *левым поддеревом*, справа — *правым поддеревом*.

Дадим определение преобразования Донахью на языке триад.

Определение 13.

1. Определим максимальную цепочку правых потомков для триад аналогично тому, как это сделано для вершин. В частности, она начинается с триады, не являющейся ничьим правым потомком, — либо с левого сына, либо с корневой триады. Аналогично определяются максимальные цепочки левых потомков.

2. Операцией *переклейки цепочки* назовём следующее преобразование дерева, сформированного из триад:

- выбирается максимальная цепочка правых потомков;
- выделяются первая и последняя (не имеющая правого потомка) триады этой цепочки; заметим, что верхний юнит первой триады является связанным (кроме случая корневой триады), а правый юнит последней триады — свободным;

- правый юнит последней триады связывается с тем же самым юнитом, с которым был связан верхний юнит первой триады; если первая триада была корневой, то правый юнит последней триады становится верхним юнитом корневой триады;
- верхний юнит первой триады освобождается;
- все триады цепочки подвергаются однотипному переименованию юнитов: правый становится верхним, верхний — левым, левый — правым.

Заметим, что в результате этого преобразования максимальная цепочка правых потомков становится максимальной цепочкой левых потомков, при этом порядок старшинства триад инвертируется.

3. Преобразованием Донахью дерева называется процедура, состоящая из переделки максимальной цепочки правых потомков сына корня и последующего аналогичного преобразования всех дочерних деревьев.

Следующая теорема очевидна по построению.

Теорема 2 (равносильность определений преобразования Донахью-2).

Определения 11 и 13 равносильны.

Определение 13 проиллюстрировано рис. 4.

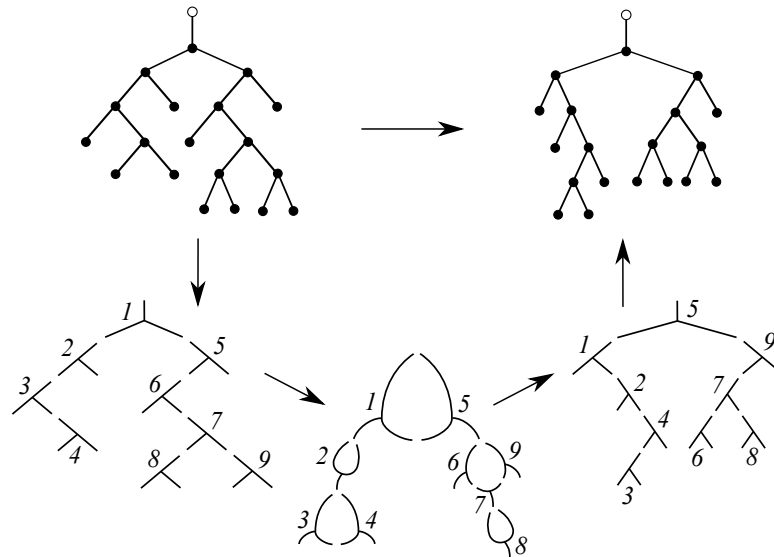


Рис. 4. Преобразование Донахью для дерева, разбитого на триады

Преобразование, описанное выше, впервые, по-видимому, рассмотрено в работе Р. Донахью [4]. Кроме того, оно или его аналоги для лесов рассматривались в [5, 6] и финским математиком А. Карттуненом, опубликовавшим некоторые гипотезы о характеристиках этого преобразования в «Энциклопедии числовых последовательностей» [7]. Первый из авторов настоящей работы (независимо) в работе [8] дал определение преобразования Донахью под названием «фрактальный поворот плоских кубических деревьев» (название предложено К. П. Кохасем в личной беседе).

Преобразование Донахью представляется важным объектом исследования по той причине, что выглядит сравнительно сложным (представляется уместной метафора «комбинаторный аналог турбулентности»), при том, что является просто семейством перестановок (каждая из которых — обратимое преобразование деревьев определённого размера). Наиболее естественной исследовательской задачей в отношении этого преобразования представляется изучение циклической структуры соответствующей перестановки кубических деревьев, и эта задача оказывается чрезвычайно сложной даже

в простейших частных случаях, например — описание всех циклов длины 2 этой перестановки. Циклы перестановки деревьев назовём *орбитами* преобразования Донахью.

Повторимся: числа Каталана имеют огромное количество комбинаторных интерпретаций [1] и на языке каждой из них можно дать собственное определение преобразования Донахью. Во всех случаях описание преобразования Донахью оказалось довольно сложным. Однако многообразие комбинаторных интерпретаций чисел Каталана требует рассмотрения возможности того, что на языке одной из них преобразование Донахью вовсе не выглядит «хаотичным». Наличие даже одной подобной достаточно простой комбинаторной интерпретации могло бы лишить смысла теоретическое изучение преобразования Донахью (назовём это *проблемой поиска тривиальной интерпретации*).

Формально некоторый вариант тривиальной интерпретации действительно существует, а именно: рассмотрим объекты, которые назовём *точками орбиты* — орбиты преобразования Донахью, на которых выделено ровно одно дерево. Каждое дерево принадлежит ровно одной орбите, поэтому количество точек орбиты равно числу Каталана. С другой стороны, применение к точке орбиты преобразования есть просто переход к той же самой орбите, на которой отмечено следующее дерево.

Однако заметим, что для построения описанной комбинаторной интерпретации чисел Каталана требуется предварительно знать все орбиты преобразования — то есть в данном случае преобразование выглядит тривиально на комбинаторной интерпретации, которая крайне нетривиально устроена сама. Попросту, нетривиальность преобразования формально перенесена в интерпретацию. Таким образом, построенная интерпретация не обесмысливает изучение преобразования Донахью, но иллюстрирует некоторые существенные формальные трудности, возникающие при обсуждении проблемы поиска тривиальной интерпретации.

1. Специальные классы деревьев и вспомогательные утверждения

Для изложения свойств орбит преобразования Донахью необходимо определить несколько специальных классов деревьев и сделать одно предварительное замечание.

Определение 14. Правой (соответственно левой) *гребёнкой* назовём дерево, все некорневые триады которого входят в цепочку правых (соответственно левых) потомков корневой триады.

При преобразовании Донахью правая гребёнка переходит в левую, а левая — в правую. То есть длина орбиты гребёнок равна двум (рис. 5).

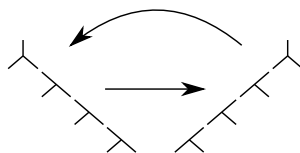


Рис. 5. Правая и левая гребёнки

Определение 15. Дерево, состоящее из n триад $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, назовём *зигзагом*, если выполняются следующие условия:

- 1) корневой триадой является триада α_1 ;
- 2) при $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ единственным сыном триады α_i является триада α_{i+1} ;
- 3) если триада α_i является левым сыном, то триада α_{i+1} является правым сыном, и наоборот ($i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$).

Если n нечётно, зигзаг назовём *зигзагом первого рода*, если чётно — *зигзагом второго рода*. Если корневая триада зигзага имеет правого сына, то такой зигзаг назовём *правым*, если левого сына — *левым*. Триады α_1 и α_n назовём *конечными* триадами зигзага.

Для зигзагов первого рода длина цикла преобразований равна трём. Пример орбиты такого дерева приведён на рис. 6. Зигзаги второго рода отличаются от зигзагов первого рода тем, что после трёх преобразований Донахью переходят в симметричные деревья (рис. 7). Таким образом, длина орбиты таких деревьев равна шести.

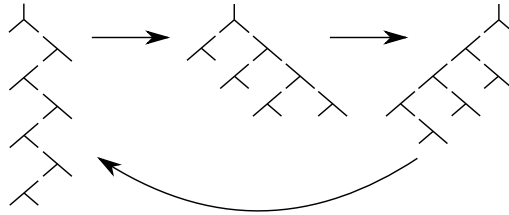


Рис. 6. Орбита зигзага первого рода

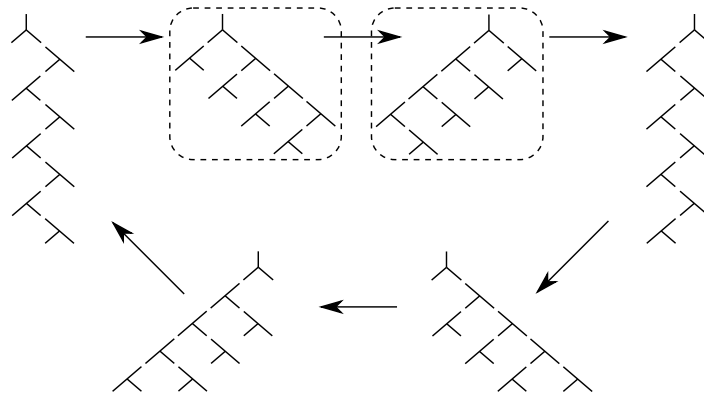


Рис. 7. Орбита зигзага второго рода

Определение 16. *Двухуровневой* правой (соответственно левой) гребёнкой назовём дерево, получающееся при присоединении ко всем триадам правой (соответственно левой) гребёнки левого (соответственно правого) сына.

В правую двухуровневую гребёнку переходит при преобразовании правый зигзаг второго рода. Правая двухуровневая гребёнка при преобразовании переходит в левую двухуровневую гребёнку. То есть двухуровневые гребёнки принадлежат орбите зигзага второго рода. На рис. 7 они выделены пунктиром.

Определение 17. Правой огибающей цепью называется последовательность триад дерева, полученная по следующим правилам:

- 1) первым элементом этой последовательности становится корневая триада;
- 2) если у последнего добавленного в последовательность элемента есть правый сын, то этот сын становится следующим элементом последовательности;
- 3) если у последнего добавленного в последовательность элемента нет правого сына, но есть левый сын, то этот левый сын становится следующим элементом последовательности;
- 4) если у последнего добавленного в последовательность элемента нет ни правого, ни левого сыновей, то формирование правой огибающей цепи завершается.

Лемма 1.

- 1) Дерево $\tau(T)$ имеет пустое правое поддерево тогда и только тогда, когда старшая правая цепь дерева T заканчивается триадой, не имеющей левого сына.
- 2) Дерево $\tau^2(T)$ имеет пустое правое поддерево тогда и только тогда, когда правая огибающая цепь дерева T заканчивается триадой, являющейся левым сыном.

Доказательство.

1. Справедливость данного утверждения относительно легко проверяется непосредственным вычислением и проиллюстрирована на рис. 8 слева (треугольниками на этом рисунке обозначены возможные поддерева). Пусть α — триада, являющаяся концом старшей правой цепи дерева T . Тогда α становится корневой триадой дерева $\tau(T)$. Из определения преобразования у триады α нет левого сына в дереве T тогда и только тогда, когда в дереве $\tau(T)$ у α нет правого сына, то есть $\tau(T)$ имеет пустое правое поддерево. Таким образом, п. 1 леммы доказан.

2. Если дерево T устроено так, как показано на рис. 8 справа, то $\tau(T)$ имеет вид, изображённый слева, в этом нетрудно убедиться прямой проверкой. При этом триады правой огибающей цепи дерева T , не имеющие правых сыновей, образуют в $\tau(T)$ старшую правую цепь. В этом случае триада β перейдет в триаду α , и из п. 1 следует, что дерево $\tau^2(T)$ имеет пустое правое поддерево.

С другой стороны, если правая огибающая цепь дерева T заканчивается правым сыном, то максимальная цепь правых потомков, начинающаяся с триады β , содержит больше одной триады. Эта цепь перейдёт в цепь левых потомков триады α . ■

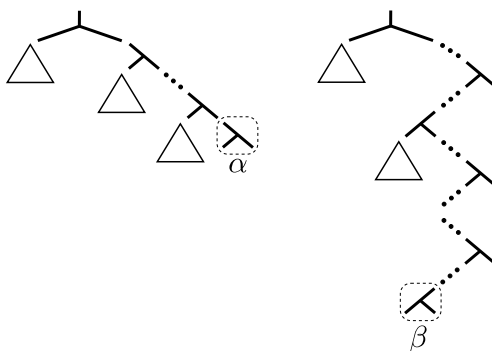


Рис. 8. Иллюстрация к доказательству леммы 1

2. Помеченные варианты преобразования Донахью и карусельные эффекты

Как уже отмечалось, один из возможных подходов к описанию преобразования Донахью на языке деревьев (как, впрочем, и на языке любой другой комбинаторной интерпретации чисел Каталана) — разбить дерево на части некоторого вида, связанные инцидентностью некоторого стандартного вида (например, на вершины или триады) и описать, как изменяется инцидентность под действием преобразования. Это приводит к возможности наблюдать за перемещениями отдельных элементов дерева внутри этого дерева (которое тоже изменяется). Фактически определение на рис. 3 и есть такое описание на языке вершин кубического дерева.

Заметим, что каждая вершина плоского кубического дерева относится к одному из пяти типов: она может быть листом или нелистом, независимо от этого может быть правым или левым сыном и, кроме того, может оказаться сыном корня. Обозначим

эти типы аббревиатурами ПЛ (правый лист), ЛЛ (левый лист), ПН (правый нелист), ЛН (левый нелист) и СК (сын корня).

Теорема 3 (карусельный эффект для вершин [3, теорема 4.1]).

Под действием преобразования Донахью вершина кубического дерева сменяет типы строго по схеме рис. 9.

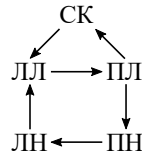


Рис. 9. Карусельный эффект для вершин

Заметим, что вершина не просто сменяет по циклу четыре основных типа, но время от времени может изменять тип, проходя через СК. Тем самым преобразование Донахью становится комбинаторной моделью динамических обменных процессов некоторого специального вида.

Кроме того, если бы каждая вершина просто меняла типы по одному и тому же циклу («тривиальный» карусельный эффект) и разбиение вершин на типы было инвариантно, то это автоматически означало бы, что преобразование не является очень сложным, поэтому нетривиальный карусельный эффект можно рассматривать как один из атрибутов сложного преобразования. В связи с этим возникает содержательный аналог проблемы поиска тривиальной интерпретации — поиск структурного описания деревьев, не подчинённого никакому нетривиальному карусельному эффекту. Никаких подходов к решению данной проблемы на данный момент не известно.

В свою очередь, триады можно разделить на одиннадцать типов по формальным признакам наличия свободных юнитов (рис. 10).

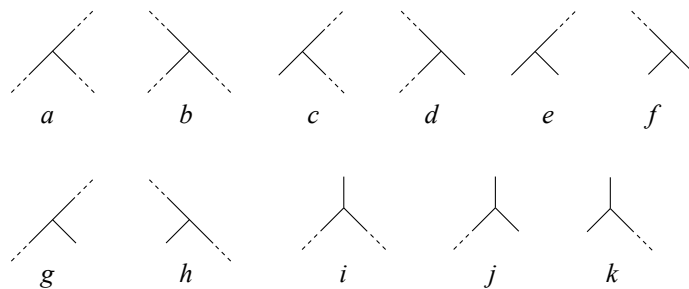


Рис. 10. Классификация триад

Это разбиение приводит к более содержательному карусельному эффекту: имеет место следующая

Теорема 4 (карусельный эффект для триад). Под действием преобразования Донахью триада кубического дерева сменяет типы строго по схеме рис. 11.

Доказательство. Справедливость правил изменения типа триад непосредственно следует из определения преобразования Донахью и проверяется большим количеством непосредственных вычислений. Неоднозначность типа образа триад типов f и d обусловлена тем, что триада, имеющая тип f или d , может находиться в конце старшей правой цепи дерева, поэтому после преобразования она может стать корневой. ■

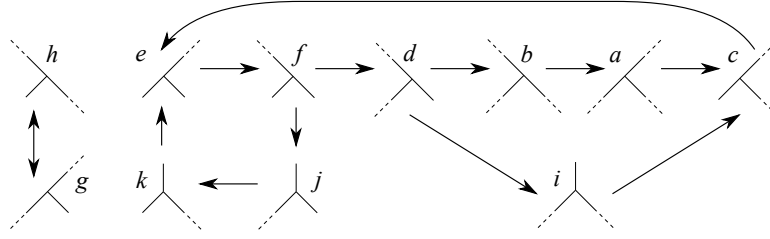


Рис. 11. Карусельный эффект для триад

Замечание 5. В данном случае орграф, описывающий карусельный эффект, состоит из двух компонент связности. Левая тривиальная компонента соответствует замеченной Р. Донахью в [4] «инвариантности гребёнок».

Замечание 6. Правая нетривиальная компонента содержит две точки ветвления и основной цикл длины 6. Эмпирическое изучение преобразования Донахью показало, что среди его циклов, по крайней мере, для деревьев небольшого размера, преобладают циклы длины 6. Возможно, это не случайное совпадение.

3. Одно приложение карусельного эффекта для триад

Карусельные эффекты могут использоваться не только как характерный признак сложности системы, но и для выяснения некоторых глобальных свойств орбит для деревьев специального вида. Подробно разберём пример такого рода.

Определение 18. Для дерева T с пустым левым поддеревом назовём *дугой* такую последовательность деревьев $T, \tau(T), \tau^2(T), \dots, \tau^k(T)$, что $\tau^k(T)$ обладает пустым правым поддеревом и k — минимально возможное. Число k назовём длиной дуги. Дерево с пустым правым поддеревом $\tau^k(T)$ при однократном преобразовании переходит в дерево $\tau^{k+1}(T)$ с пустым левым поддеревом. Дугу дерева $\tau^{k+1}(T)$ назовём второй дугой дерева T . Аналогично определяются третья дуга дерева, четвертая и т. д.

Листовой назовём триаду, не имеющую сыновей (то есть со свободными вторым и третьим юнитами). Свойство дерева, состоящее в том, что все его листовые триады являются левыми сыновьями, назовём свойством lleaves; свойство, состоящее в том, что все листовые триады являются правыми сыновьями, — свойством rleaves. Если в дереве отсутствует триады типа x , то скажем, что оно обладает свойством miss(x) (здесь вместо x может быть любой из 11 типов триад на рис. 10).

Теорема 5.

- 1) Если дерево с пустым левым поддеревом обладает свойствами rleaves, miss(a) и miss(d), то длины всех его дуг равны 1.
- 2) Если дерево с пустым левым поддеревом обладает свойствами lleaves и miss(a), то длины всех дуг этого дерева равны 2.

Доказательство.

1. Пусть дерево T с пустым левым поддеревом удовлетворяет свойствам rleaves, miss(a) и miss(d). Покажем, что длина его первой дуги равна 1 и дерево $\tau^2(T)$ тоже удовлетворяет свойствам rleaves, miss(a) и miss(d). Так как в T нет триад типа d , старшая правая цепь этого дерева заканчивается триадой, не имеющей левого сына. Поэтому длина его дуги действительно равна 1.

Сохранение свойств rleaves, miss(a) и miss(d) следует из карусельного эффекта для триад дерева. Действительно, если в $\tau^2(T)$ есть листовая триада, являющаяся левым сыном, то в дереве T ей соответствует триада типа a , i или j , а триад этих типов

в дереве T нет по условию. Если в $\tau^2(T)$ есть триада типа a , то в T должна быть триада типа d . Если в $\tau^2(T)$ есть триада типа d , то в T должна быть листовая триада, являющаяся левым сыном.

2. Доказательство основано на следующем соображении: длина дуги дерева равна 2 тогда и только тогда, когда конец правой огибающей цепи дерева — триада, являющаяся левым сыном (см. лемму 1). У дерева T все листовые триады — левые сыновья, поэтому длина его первой дуги равна 2. Значит, $\tau^3(T)$ обладает пустым левым поддеревом.

Дерево T обладает свойствами lleaves и $\text{miss}(a)$. Покажем, что дерево $\tau^3(T)$ тоже обладает этими свойствами.

Пусть дерево $\tau^3(T)$ не обладает свойством lleaves , то есть содержит листовую триаду, являющуюся правым сыном (тип f). Из карусельного эффекта следует, что в дереве T эта триада α может иметь тип a , i или j . Но триад таких типов в дереве T нет.

Пусть дерево $\tau^3(T)$ не обладает свойством $\text{miss}(a)$, то есть содержит триаду типа a . Из карусельного эффекта в дереве T эта триада обладает типом f , что противоречит свойству lleaves дерева T . ■

Покажем, что отмеченный эффект является массовым. Для этого вычислим количество деревьев, подчиняющихся этому эффекту.

Обозначим через s_n количество деревьев с пустым левым поддеревом и n некорневыми триадами, удовлетворяющих свойствам lleaves , $\text{miss}(a)$ и $\text{miss}(d)$. Заметим, что $s_1 = s_2 = s_3 = 1$.

Пусть T — такое дерево, α — триада, являющаяся правым сыном корневой триады T , l — старшая левая цепь дерева с корнем α , β — конечная триада этой цепи. Возможны два случая:

- 1) цепь l состоит из одной триады ($\alpha = \beta$);
- 2) длина l больше 1.

В первом случае дерево T имеет вид рис. 12 слева (треугольниками обозначены поддерева, формулы внутри треугольников — количество триад соответствующих деревьев). Здесь T_1 удовлетворяет свойствам lleaves , $\text{miss}(a)$ и $\text{miss}(d)$, поэтому количество таких деревьев равно s_{n-1} .

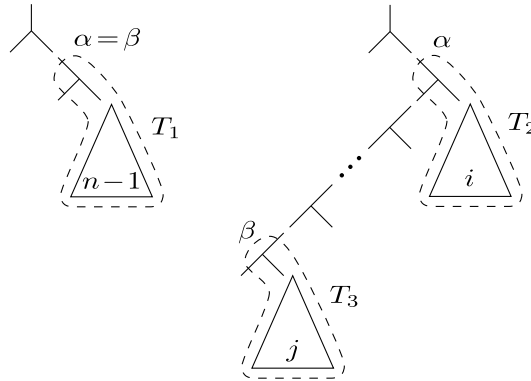


Рис. 12. Деревья, удовлетворяющие свойствам lleaves , $\text{miss}(a)$ и $\text{miss}(d)$

Во втором случае непустые поддерева могут быть присоединены только к триадам α и β , как показано на рис. 12 справа, иначе в дереве T образуется триада типа a . Дерево с корнем α обозначено T_2 , с корнем β — T_3 . Пусть T_2 содержит i некорневых

триад, $T_3 - j$ некорневых триад. У деревьев T_2 и T_3 не может быть пустых правых поддеревьев, потому что тогда нарушаются условия *leaves* и *miss*(d). Поэтому сумма $i + j$ может принимать все значения от 2 до $n - 2$. Таким образом, получаем рекуррентное соотношение

$$s_n = s_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-2} \left(\sum_{i+j=k} s_i s_j \right), \quad (1)$$

где внутренняя сумма берётся по всем упорядоченным разложениям k в сумму двух натуральных слагаемых.

Рассмотрим производящую функцию $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$. Преобразуем её с учётом (1) и того, что $s_1 = s_2 = s_3 = 1$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = x + s_1 x^2 + s_2 x^3 + (s_3 + s_1 s_1) x^4 + \\ &\quad + (s_4 + s_1 s_1 + s_1 s_2 + s_2 s_1) x^5 + \dots = \\ &= x + xS(x) + x^2 S(x)^2 + x^3 S(x)^2 + \dots = x + xS(x) + x^2 \frac{S(x)^2}{1-x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассматривая соотношение (2) как квадратное уравнение относительно $S(x)$, получаем

$$S(x) = \frac{(1-x)^2 - \sqrt{(1-x)(1-3x+3x^2-5x^3)}}{2x^2}. \quad (3)$$

В числителе (3) перед корнем стоит знак «минус». Это следует, например, из того, что в разложении $\sqrt{(1-x)(1-3x+3x^2-5x^3)}$ в ряд Маклорена коэффициент при x^2 равен 1, а $s_0 = 0$. Из теоремы Дарбу [9, с. 252] получаем асимптотическую оценку

$$s_n \sim \frac{C}{n^{3/2}} \left(\frac{5}{2^{4/3} - 2^{2/3} + 1} \right)^n,$$

где C — некоторая константа.

Обозначим через t_n количество деревьев с пустым левым поддеревом и n некорневыми триадами, удовлетворяющих свойствам *leaves* и *miss*(a). Заметим, что $t_1 = 0$.

Пусть T — такое дерево. Воспользуемся введёнными обозначениями. Как и в случае с последовательностью s_n , возможны два варианта (рис. 12):

- 1) цепь l состоит из одной триады ($\alpha = \beta$);
- 2) длина l больше 1.

В первом случае количество рассматриваемых деревьев равно t_{n-1} . Перейдём к рассмотрению второго случая. Если T_2 и T_3 обладают непустыми правыми поддеревьями, то сумма $i + j$ может принимать все значения от 2 до $n - 2$. Тогда количество подсчитываемых деревьев равно $\sum_{k=2}^{n-2} \left(\sum_{i+j=k} t_i t_j \right)$, где внутренняя сумма берётся по всем упорядоченным разложениям k в сумму двух натуральных слагаемых.

Если ровно одно из деревьев T_2 или T_3 обладает пустым правым поддеревом, то количество рассматриваемых деревьев равно $2 \left(\sum_{k=1}^{n-2} t_k \right)$. Ещё одно дерево получается, если $i = j = 0$. Таким образом, справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$t_n = t_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-2} \left(\sum_{i+j=k} t_i t_j \right) + 2 \sum_{k=1}^{n-2} t_k + 1. \quad (4)$$

Рассмотрим производящую функцию $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n$. Преобразуем её с учётом формулы (4) и того, что $t_1 = 0$:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n = t_1 x + (t_1 + 1)x^2 + (t_2 + 2t_1 + 1)x^3 + (t_3 + t_1 t_1 + \\ &+ 2(t_1 + t_2) + 1)x^4 + \dots = (t_1 x^2 + t_2 x^3 + t_3 x^4 + \dots) + ((t_1 t_1)x^4 + \\ &+ (t_1 t_1 + t_1 t_2 + t_2 t_1)x^5 + \dots) + 2(t_1 x^3 + (t_1 + t_2)x^4 + \dots) + \\ &+ (x^2 + x^3 + \dots) = xT(x) + x^2(T(x)^2 + xT(x)^2 + x^2T(x)^2 + \dots) + \\ &+ 2(t_1(x^3 + x^4 + \dots) + t_2(x^4 + x^5 + \dots) + \dots) + \frac{x^2}{1-x} = \\ &= xT(x) + x^2 \frac{T(x)^2}{1-x} + 2x^2 \frac{T(x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассматривая (5) как квадратное уравнение относительно $T(x)$, получаем

$$T(x) = \frac{1 - 2x - x^2 - \sqrt{(1 - 3x)(1 - x)^2(1 + x)}}{2x^2}. \quad (6)$$

В (6) перед корнем стоит знак «минус». Это объясняется, например, тем, что в разложении в ряд Маклорена $\sqrt{(1 - 3x)(1 - x)^2(1 + x)}$ коэффициент при x^2 равен -1 , а $t_0 = 0$. Из теоремы Дарбу получаем следующую асимптотическую оценку:

$$t_n \sim \frac{3^{n+1/2}}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}.$$

4. Ростки

Эффект инвариантности гребёнок, описанный в [4], и соответствующая попытка свести преобразование больших деревьев к преобразованиям меньших приводят к понятию ростка, расположенного на ребре кубического дерева.

Определение 19.

- 1) Пусть T — кубическое дерево, e — правое ребро этого дерева, соединяющее вершину a с сыном b . Рассмотрим новое дерево $T(e)$, которое имеет следующие отличия от дерева T :
 - а) правым сыном вершины a является новая вершина c ;
 - б) правым сыном вершины c является вершина b ;
 - в) левым сыном вершины c становится новая вершина d , которая является листом (см. рис. 13, треугольниками обозначены поддеревья).
- 2) Переход от дерева T к дереву $T(e)$ назовём операцией *разбиения ребра*. Новое ребро, соединяющее вершины c и d , назовём *ростком*.
- 3) Аналогичным образом определяется операция разбиения левого ребра. Будем считать, что для ребра, соединяющего корень с сыном корня, операция разбиения не определена.

Назовём росток, расположенный на ребре, идущем к листу, *внешним*, а на ребре, ведущем к нелисту, — *внутренним*. Заметим, что разбиение ребра (теперь уже не (a, b) , а (c, b)) можно повторить, получая гребёнку, этот процесс назовём *реализацией ростка*. В [3] отмечен эффект разрушения внешнего ростка, когда под действием преобразования Донахью внешний росток превращается во всё более и более сложный

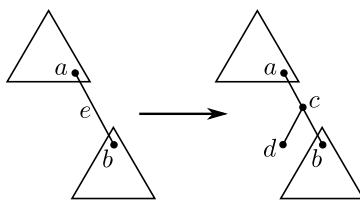


Рис. 13. Разбиение ребра

элемент структуры дерева, и высказана гипотеза о том, что список элементов структуры, в которые может превратиться внешний росток, является бесконечным. Однако имеет место

Теорема 6. Если дерево T_1 получается из дерева T реализацией некоторого внутреннего ростка, то и дерево $\tau(T_1)$ получается из дерева $\tau(T)$ реализацией некоторого внутреннего ростка. Иными словами, внутренние ростки сохраняются под действием преобразования Донахью.

По существу, это свойство было замечено в работе Р. Донахью [4].

Замечание 7. Росток — возможность разбить ребро, то есть он является формальным атрибутом ребра. Поэтому тот факт, что под действием преобразования Донахью росток иногда перемещается не так, как ребро, на котором он расположен (перемещение ростка нетрудно отследить, сравнивая результаты преобразований левого и правого деревьев (рис. 13)), или, иначе говоря, что росток может перемещаться с одного ребра на другое, удивителен.

Аналогично предыдущему, можно выделить 28 типов внутренних ростков (рис. 14) и описать соответствующий этой классификации карусельный эффект (рис. 15), который по сложности заметно превосходит все предыдущие.

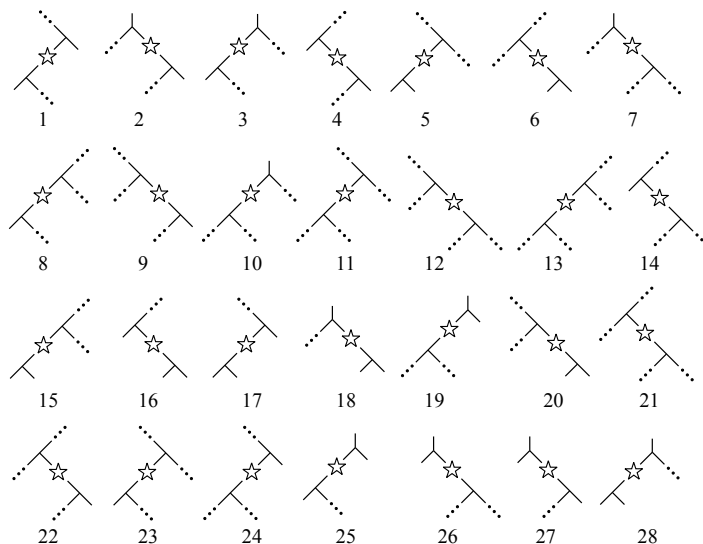


Рис. 14. Классификация внутренних ростков

Замечание 8. Существует дерево, один из внутренних ростков которого в процессе итераций преобразования Донахью проходит через все 28 типов (рис. 16).

Замечание 9. В графе, описывающем карусельный эффект, существует маршрут, по которому не проходит ни один росток, например, $28 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 18 \rightarrow 25 \rightarrow 26$.

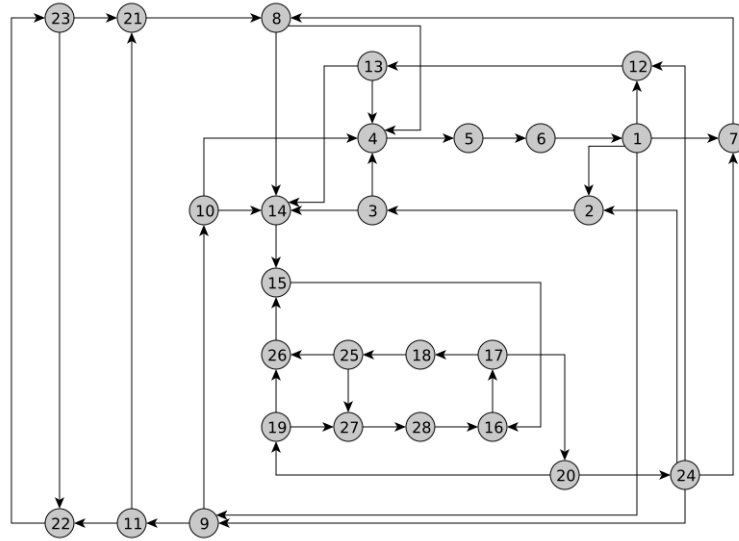


Рис. 15. Карусельный эффект для внутренних ростков

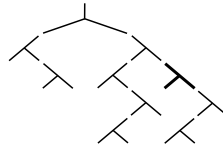


Рис. 16. Росток, проходящий через все типы

5. Ручные компоненты: большие семейства коротких орбит

Естественный вопрос, касающийся преобразования Донахью, — как растёт количество орбит с ростом размера деревьев. С этим вопросом тесно связан вопрос о причинах заметного преобладания (по крайней мере, для деревьев небольшого размера) циклов длины 6.

Первый результат такого типа получен ещё до выхода основополагающей работы [4]: Л. Шапиро в [10] построил семейство орбит длины 6 преобразования Донахью, количество которых растёт как $\Theta(2^n)$ (в обозначениях [11]). Пример такой орбиты приведён на рис. 17. Назовём эти семейства *шапировскими* семействами циклов.

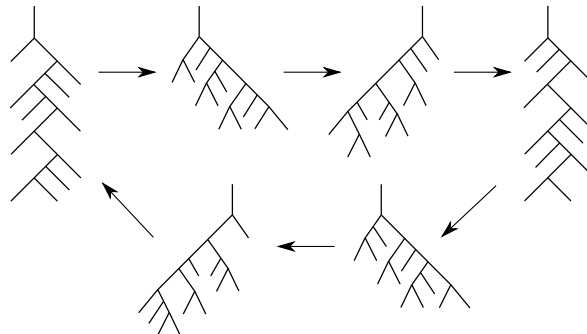


Рис. 17. Пример шапировского цикла

Из отмеченного факта тривиально следует

Теорема 7. Количество циклов преобразования Донахью для кубических деревьев с n листьями растёт не медленнее чем $\Theta(2^n)$.

Оценка теоремы 7 улучшает оценку [3]. Авторам не удалось улучшить оценку теоремы 7, однако некоторый прогресс в этом направлении всё же достигнут.

Во-первых, удалось построить не являющееся шапировским семейство циклов длины 6, следовательно, не все циклы длины 6 являются шапировскими. Структура такого цикла показана на рис. 18. Деревья этого цикла состоят из зигзагов, выражения показывают количества триад в зигзагах, $k, l, m \in \mathbb{N}$. Количество таких циклов растёт как $\Theta(n^2)$, где n — количество триад.

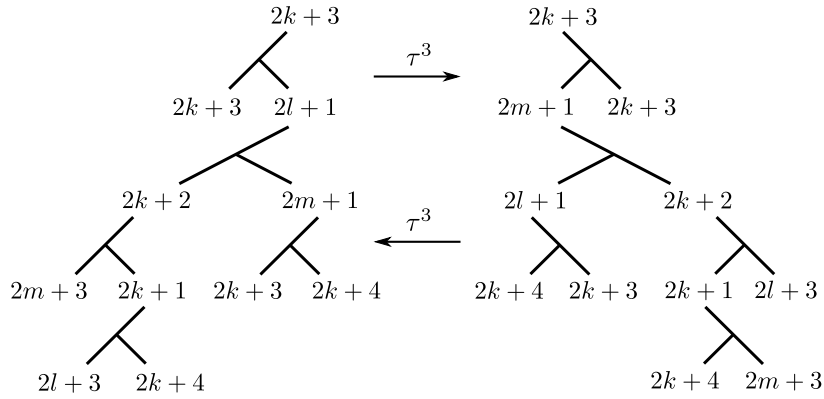


Рис. 18. Пример нешапировского цикла

Во-вторых, удалось построить семейство циклов длины 9, количество которых растёт как $\Theta(2^{n/2})$. Типичный элемент этого семейства приведён на рис. 19 (здесь выражения соответствуют числу триад в выделенных зигзагах и двухуровневых гребёнках). Дерево, изображённое слева, устроено следующим образом: его основу составляет правый зигзаг первого рода (количество триад не меньше 5); L — множество триад зигзага, имеющих левых сыновей. К некоторым триадам из L справа присоединены двухуровневые гребёнки, при этом хотя бы одна гребёнка должна быть добавлена.

Полученному дереву, состоящему из $2m + 1$ триады, можно поставить в соответствие композицию числа m . Количество слагаемых в композиции равно числу триад множества L , если гребёнка состоит из $2k$ триад, то соответствующее ей слагаемое равно $k + 1$ (если гребёнка отсутствует, то слагаемое равно 1). Так, дереву на рис. 19 слева соответствует разложение числа 15 в упорядоченную сумму $4 + 1 + 4 + 1 + 1 + 3 + 1$. Оценка количества рассматриваемых орбит следует из того, что количество композиций числа m растёт как $\Theta(2^m)$.

Приведённые семейства являются типичными примерами того, что естественно называть *ручными компонентами* преобразования Донахью — семействами деревьев, для которых орбита (или, более общо, её часть) могут быть явно вычислены. Важность ручных компонент связана с тем, что неконструктивных способов доказательства существования семейств орбит в настоящее время, по-видимому, нет.

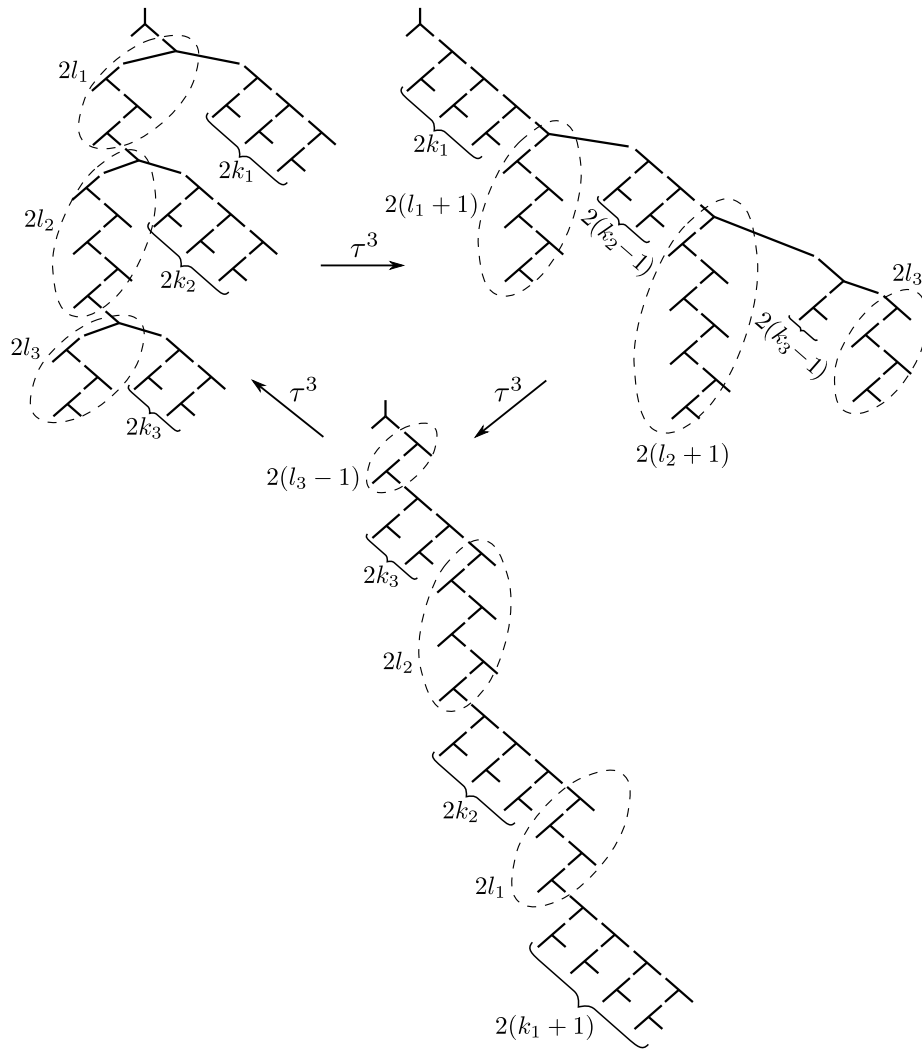


Рис. 19. Экспоненциальное семейство циклов длины 9

6. Ручные компоненты: длинные орбиты

Двойственным к вопросу о количестве орбит является вопрос о том, насколько длинными могут быть орбиты преобразования Донахью. Этот вопрос является значительно более трудным. Эмпирические данные демонстрируют наличие очень длинных циклов, однако очень длинные циклы по природе своей не могут быть ручными компонентами и в рамках обсуждаемого в данной работе элементарного подхода не могут быть построены. Соответственно результаты делятся на слабые (ручные семейства орбит, длины которых растут быстрее, чем линейная функция, но всё-таки как полиномы небольшой степени) и фрагментарные (ручные семейства незамкнутых фрагментов орбит). Результаты второго типа — единственная (не реализованная на данный момент) надежда построить из этих фрагментов достаточно длинные орбиты в рамках элементарного подхода.

В [3] приводится теорема об окаймлении и показано, как из неё следует существование экспоненциального семейства орбит, длины которых растут как $\Theta(n^{\log_2 3})$ от числа листьев. *Окаймлением дерева* называется процедура расщепления всех его листьев на два листа следующего уровня (рис. 20).

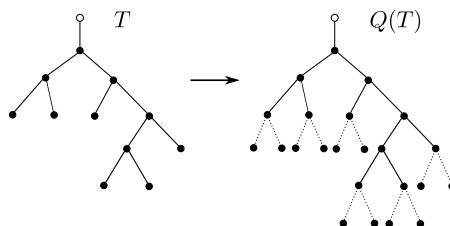


Рис. 20. Окаймление дерева

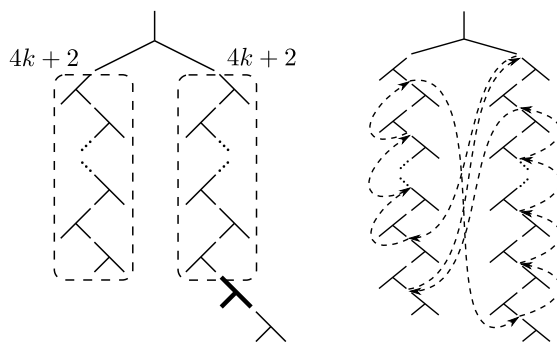
Символом $\Delta(T)$ обозначим длину орбиты дерева T . Имеет место

Теорема 8 (об окаймлении [3]).

- 1) Если $\Delta(T)$ нечётна, то $\Delta(Q(T)) = 3\Delta(T)$.
- 2) Если $\Delta(T)$ чётна, то $\Delta(Q(T)) = \frac{3}{2}\Delta(T)$.

Из теоремы 8 тривиально следует, что каждому дереву можно сопоставить семейство его последовательных окаймлений, длины орбит которых, начиная с некоторого места, начинают расти как $\Theta(3^k)$, где k — количество окаймлений. Остаётся заметить, что при окаймлении дерева количество его вершин удваивается.

С другой стороны, построено семейство деревьев с n триадами, длины орбит которых растут как $\Theta(n^2)$. Представитель этого семейства изображён на рис. 21 слева (выражения соответствуют числу триад в выделенных фрагментах). Данное дерево состоит из двух зигзагов, присоединённых к корневой триаде, в одном из зигзагов реализован внутренний росток (выделен на рисунке полужирным). Если бы этот росток не был реализован, то длина орбиты дерева была бы $72k + 24$, в этом можно убедиться путём непосредственного моделирования. При реализации ростка каждые $72k + 24$ преобразования происходит перемещение ростка по циклу, изображённому на рис. 21 справа. Таким образом, получаем квадратичный рост длины орбиты дерева.

Рис. 21. Деревья, длины орбит которых растут как $\Theta(n^2)$

Заключение

Преобразование Донахью кажется достаточно сложным, чтобы на его примере можно было бы сформулировать подходы, полезные в комбинаторной динамике вообще. В этом смысле его можно сравнить с игрой «Жизнь» или назвать комбинаторным аналогом турбулентности. Обратной стороной этой привлекательной сложности является то, что большинство исследователей (начиная с Р. Донахью и Л. Шапиро), обнаружив данное преобразование, ограничиваются констатацией только нескольких простых его свойств и переходят к рассмотрению других объектов. Авторы данной работы, напротив, уверены, что изучение этого преобразования возможно. Приведённые

результаты выглядят несколько разрозненными, однако они являются начальной стадией формирования техники, которая может позволить получить существенные продвижения в изучении двух ключевых вопросов: оценке количества орбит и построению очень длинных орбит.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2005. 768 с.
2. *Татт У.* Теория графов. М.: Мир, 1988. 424 с.
3. *Пушкарев И. А., Бызов В. А.* Преобразование Донахью: элементарный подход // Записки научных семинаров ПОМИ. 2013. Т. 411. С. 148–177.
4. *Donaghey R.* Automorphisms on Catalan trees and bracketings // J. Combinatorial Theory. Ser. B. 1980. V. 29. No. 1. P. 75–90.
5. *Кнут Д.* Искусство программирования. Т. 4А. Комбинаторные алгоритмы. Ч. 1. М.: Вильямс, 2016. 960 с.
6. *Callan D.* A bijection on Dyck paths and its cycle structure // Electronic J. Combinatorics. 2007. V. 14. No. 1. P. R28.
7. www.oeis.org/A080070 — The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 2003.
8. *Пушкарев И. А.* Об одном преобразовании плоских деревьев // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2006. № 8. С. 92–99.
9. *Bergeron F., Labelle G., and Leroux P.* Combinatorial Species and Tree-like Structures. N.Y.: Cambridge University Press, 1997. 457 p.
10. *Shapiro L. W.* The cycle of six // The Fibonacci Quarterly. 1979. V. 17. No. 3. P. 253–259.
11. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998. 703 с.

REFERENCES

1. *Stanley R. P.* Enumerative Combinatorics: Vol. 2. N.Y., Cambridge University Press, 1999. 585 p.
2. *Tutte W. T.* Graph Theory. California, Addison-Wesley Publishing Company, 1984. 333 p.
3. *Pushkarev I. A. and Byzov V. A.* Donaghey's transformation: an elementary approach. J. Math. Sci., 2014, vol. 196, no. 5. pp. 199–215.
4. *Donaghey R.* Automorphisms on Catalan trees and bracketings. J. Combinatorial Theory, Ser. B, 1980, vol. 29, no. 1, pp. 75–90.
5. *Knuth D. E.* The Art of Computer Programming, Vol. 4A: Combinatorial Algorithms, P. 1. New Jersey, Addison-Wesley Professional, 2011. 883 p.
6. *Callan D.* A bijection on Dyck paths and its cycle structure. Electronic J. of Combinatorics, 2007, vol. 14, no. 1, pp. R28.
7. www.oeis.org/A080070 — The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 2003.
8. *Pushkarev I. A.* Ob odnom preobrazovanii ploskikh derev'yev [On a transformation of plane trees]. Matematicheskiy Vestnik Pedvuzov i Universitetov Volgo-Vyatskogo Regiona, 2006, no. 8, pp. 92–99. (in Russian)
9. *Bergeron F., Labelle G., and Leroux P.* Combinatorial Species and Tree-like Structures. N.Y., Cambridge University Press, 1997. 457 p.
10. *Shapiro L. W.* The cycle of six. Fibonacci Quarterly, 1979, vol. 17, no 3. pp. 253–259.
11. *Graham R. L., Knuth D. E., and Patashnik O.* Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. New Jersey, Addison-Wesley Professional, 1994. 672 p.