

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718

О НАДЁЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ФУНКЦИИ ВЕББА, В P_k ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 0 И ТИПА $k - 1$ НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ¹

М. А. Алехина*, О. Ю. Барсукова**

** Пензенский государственный технологический университет, г. Пенза, Россия**** Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия*

Рассматривается реализация функций k -значной логики ($k \geq 3$) схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном базисе, состоящем из функции Вебба. Предполагается, что элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, подвержены однотипным константным неисправностям типа 0 или типа $k - 1$ на выходах. Конструктивно доказано, что при неисправностях типа 0 почти любую функцию k -значной логики можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически равной ненадёжности одного базисного элемента; при неисправностях типа $k - 1$ любую функцию k -значной логики можно реализовать надёжной схемой, которая функционирует с ненадежностью, асимптотически не большей, чем в 3 раза, ненадежности одного базисного элемента. Полученные результаты справедливы в двойственном (относительно перестановки, порождаемой функцией Лукашевича) базисе при однотипных константных неисправностях типа $k - 1$ и типа 0 соответственно.

Ключевые слова: функции k -значной логики, ненадёжные функциональные элементы, надёжность и ненадёжность схемы, синтез схем из ненадёжных элементов, неисправности на выходах элементов.

DOI 10.17223/20710410/44/5

ABOUT RELIABILITY OF CIRCUITS IN THE BASIS CONSISTING OF THE WEBB FUNCTION IN P_k UNDER FAILURES OF 0 TYPE AND $k - 1$ TYPE AT THE OUTPUTS OF ELEMENTS

M. A. Alekhina*, O. Yu. Barsukova**

Penza State Technological University, Penza, Russia**Penza State University, Penza, Russia***E-mail:** alekhina.marina19@yandex.ru, oksana.barsukova.71@gmail.com

We consider the realization of k -valued logics ($k > 3$) functions by circuits of unreliable functional elements in the complete basis consisting of the Webb function. We assume

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 17-01-00451a.

that elements of the circuit pass to fault states independently of each other, and they are exposed to single constant faults of type 0 or $k - 1$ at their outputs. It is constructively proved that, under faults of type 0, almost any function of k -valued logics can be implemented by an asymptotically optimal in reliability circuit functioning with the unreliability which is asymptotically equal to unreliability of one basis element; under faults of type $k - 1$, any function of k -valued logics can be implemented by an reliable circuit which functions with unreliability asymptotically no more than three times of the unreliability of one basic element. The obtained results are valid in a dual (with respect to the permutation generating by the Lukashevich function) basis for single-type constant faults of type $k - 1$ and type 0 respectively.

Keywords: *k-valued logics functions, unreliable functional elements, reliability and unreliability of circuit, synthesis of circuits from unreliable elements, faults at outputs of elements.*

Введение

Настоящая работа продолжает исследования по надёжности схем, реализующих булевы функции [1–3]. В отличие от названных работ, рассматривается реализация функций k -значной логики ($k \geq 3$) схемами из ненадёжных элементов в полном базисе B , состоящем из функции Вебба $V_k(x_1, x_2) = (\max\{x_1, x_2\} + 1) \bmod k$, а также в двойственном (относительно перестановки, порождаемой функцией $N(x) = k - 1 - x$, которую называют отрицанием Лукашевича) базисе $B^* = \{(\min\{x_1, x_2\} + k - 1) \bmod k\}$.

Задача синтеза надёжных схем в этих базисах решена в [4] при инверсных неисправностях на выходах базисных элементов (когда на каждом входном наборе любого из базисных элементов вероятность появления неверного значения на выходе элемента одинакова), причём были применены два различных метода синтеза и найдены условия, при которых один метод даёт лучшую оценку надёжности схем, чем другой. В отличие от [4], будем исследовать однотипные константные неисправности на выходах элементов двух видов: типа 0 и типа $k - 1$. Предполагается, что элементы схемы переходят в неисправные состояния с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ независимо друг от друга.

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$, P_k — множество всех функций k -значной логики, т. е. функций $f(\tilde{x}^n) : (E_k)^n \rightarrow E_k$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$. Используемые понятия и определения можно найти в [4, 5].

Далее докажем, что: 1) при неисправностях типа 0 на выходах элементов почти любую функцию k -значной логики можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически ($\varepsilon \rightarrow 0$) равной ε (где ε — вероятность появления неисправности типа 0); 2) при неисправностях типа $k - 1$ на выходах элементов любую функцию k -значной логики можно реализовать надёжной схемой, функционирующей с ненадёжностью асимптотически не больше 3ε (где ε — вероятность появления неисправности типа $k - 1$). Для доказательства будем использовать первый из двух методов синтеза надёжных схем, изложенных в [4]. Сложностью $L(S)$ схемы S будем называть число элементов в ней.

1. Оценки ненадёжности схем при неисправностях типа 0

Будем считать, что элементы базиса $B = \{V_k\}$ с вероятностью ε подвержены однотипным константным неисправностям типа 0 на выходах элементов.

Теорема 1 [5]. Пусть f — произвольная функция из P_k ; S — любая схема, реализующая f ; $P(S)$ — ненадёжность схемы S . Тогда можно построить схему $\psi(S)$, которая реализует функцию f с ненадёжностью

$$P(\psi(S)) \leq \varepsilon + (2^{2^k-1} - 2^k)\varepsilon^2 + 2^{2^k}\varepsilon P(S) + (2^{2^k} - 2^k - 1)P^2(S). \quad (1)$$

В теореме 1 установлено рекуррентное соотношение между ненадёжностью схемы $\psi(S)$ и ненадёжностью исходной схемы S . В соотношении (1) отбросим отрицательные слагаемые в правой части, получим неравенство

$$P(\psi(S)) \leq \varepsilon + 2^{2^k-1}\varepsilon^2 + 2^{2^k}\varepsilon P(S) + 2^{2^k}P^2(S). \quad (2)$$

Замечание 1. Справедливы следующие утверждения:

1) при $k \geq 3$ верно:

- а) $0,5 + 1,25k^4 + 25k^8 < 27k^8$;
- б) $5k^4 + 2 < 5,1k^4$;
- в) $0,5 + 1,275k^4 + 26,01k^8 < 27k^8$;
- г) $5k^4 + 4 < 5,1k^4$;

2) функция $g(x) = 2^{2x-2^x}$ убывает на $[3, +\infty)$, поэтому наибольшее значение на $[3, +\infty)$, равное $1/4$, она принимает в точке $x = 3$.

Преобразуем правую часть (2), учитывая п. 2 замечания 1:

$$\begin{aligned} 2^{2^k-1}\varepsilon^2 + 2^{2^k}\varepsilon P(S) + 2^{2^k}P^2(S) &= 2^{2^k}(1/2\varepsilon^2 + 2^{2^k-2^k}\varepsilon P(S) + P^2(S)) \leq \\ &\leq 2^{2^k}(1/2\varepsilon^2 + 1/4\varepsilon P(S) + P^2(S)). \end{aligned}$$

Тогда из соотношения (2) следует неравенство

$$P(\psi(S)) \leq \varepsilon + 2^{2^k}(1/2\varepsilon^2 + 1/4\varepsilon P(S) + P^2(S)). \quad (3)$$

Чтобы получить верхнюю оценку ненадёжности схем, применим леммы 1–4, доказанные в [4].

Лемма 1 [4]. m -Местный максимум ($m \geq 2$) можно реализовать схемой из $(m-1)k$ элементов.

Лемма 2 [4]. Константы $0, 1, \dots, k-1$ можно реализовать схемой, сложность которой не более $k^2 + k - 2$.

Для $i \in E_k$ определим следующие функции:

$$J_i(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x = i, \\ 0, & \text{если } x \neq i. \end{cases}$$

Лемма 3 [4]. Функции $J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x)$ можно реализовать схемой T , содержащей не более $k(k-1)^2$ элементов, т. е. $L(T) \leq k(k-1)^2$.

Лемма 4 [4]. Функцию $\min\{x_1, x_2\}$ можно реализовать такой схемой $S_{\&}$, что $L(S_{\&}) < 3k^3 + 4,5k^2 - 6,5k$.

Теорема 2. Любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать схемой D' , ненадёжность которой $P(D') < 2\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 = 2^{-2^k}/(27k^8)$.

Доказательство. Так же, как в [4, теорема 2], применим индукцию по числу переменных функции $f(\tilde{x}^n)$.

1. Б а з а и н д у к ц и и: $n = 1$. Представим функцию $f(x)$ в виде (аналог совершенной ДНФ) [6]

$$f(x) = J_0(x) \& f(0) \vee J_1(x) \& f(1) \vee \dots \vee J_{k-1}(x) \& f(k-1).$$

Промоделируем эту формулу схемой S' , используя схемы из лемм 2 и 3, и найдём число элементов в ней. По лемме 2 для реализации всех констант достаточно $k^2 + k - 2$ элементов. По лемме 3 для реализации функций $J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x)$ достаточно $k(k-1)^2$ элементов. По лемме 4 для реализации k двухместных минимумов достаточно $k(3k^3 + 4,5k^2 - 6,5k)$ элементов. Наконец, для реализации одного k -местного максимума достаточно $k(k-1)$ элементов. Поэтому схема S' содержит не более

$$\begin{aligned} k^2 + k - 2 + k(k-1)^2 + k(3k^3 + 4,5k^2 - 6,5k) + k(k-1) = \\ = 3k^4 + 5,5k^3 - 6,5k^2 + k - 2 < 3k^4 + 5,5k^3 \end{aligned}$$

элементов. Поскольку $k \geq 3$, верно неравенство $5,5 < 2k$. Поэтому $L(S') < 5k^4$.

Известно [7, с. 47], что ненадёжность любой схемы не больше суммы ненадёжностей всех её элементов, поэтому $P(S') \leq 5k^4\varepsilon$.

По схеме S' построим схему $\psi(S')$ (см. теорему 1). Оценим ненадёжность $P(\psi(S'))$ схемы $\psi(S')$ по формуле (3), учитывая условие $\varepsilon \leq \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned} P(\psi(S')) < \varepsilon + 2^{2k}(1/2\varepsilon^2 + 5/4k^4\varepsilon^2 + (5k^4\varepsilon)^2) \leq \varepsilon + \varepsilon^2 2^{2k}(1/2 + 25k^8 + 1,25k^4) \leq \\ \leq \varepsilon + 2^{2k}\varepsilon^2 \cdot 27k^8 \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь предпоследнее неравенство получено с учётом замечания 1, п. 1, а.

2. И н д у к т и в н ы й п е р е х о д. Допустим, что утверждение верно для функций $f(\tilde{x}^{n-1})$, $n \geq 2$. Докажем его для функций $f(\tilde{x}^n)$. Разложим функцию $f(\tilde{x}^n)$ по переменной x_n :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = J_0(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \vee J_1(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \dots \\ \vee J_{k-1}(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, k-1). \end{aligned}$$

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой C (рис. 1).

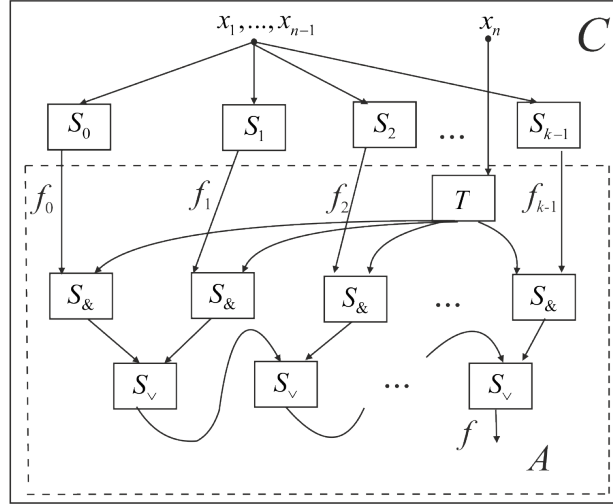
На рис. 1 схема S_i , $i \in E_k$, реализует функцию $f_i = f(x_1, \dots, x_{n-1}, i)$. Функции $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$, согласно индуктивному предположению, можно реализовать схемами с ненадёжностью меньше 2ε , поэтому будем считать, что $P(S_i) < 2\varepsilon$, $i \in E_k$. Схему T возьмём из леммы 3. Она содержит не более $k(k-1)^2$ элементов и реализует все функции $J_i(x_n)$. В качестве схемы $S_\vee$ возьмём схему из k элементов (лемма 1), реализующую двухместный максимум, а в качестве схемы $S_\&$, реализующей двухместный минимум, возьмём схему, которая содержит менее $3k^3 + 4,5k^2 - 6,5k$ элементов (лемма 4).

В схеме C выделим подсхему A , выход которой является выходом схемы C , а на входы подаются $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}, x_n$. Схема A содержит не более

$$k(k-1)^2 + k(3k^3 + 4,5k^2 - 6,5k) + k(k-1) = 3k^4 + 5,5k^3 - 7,5k^2 < 3k^4 + 5,5k^3 < 5k^4$$

элементов, поэтому получаем неравенство $P(A) \leq 5k^4\varepsilon$.

Если схема A исправна, то для реализации функции f она использует значение одной из схем $S_0, S_1, \dots, S_{k-1}$, реализующих соответственно функции $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$. Поэтому $P(C) < P(A) + 2\varepsilon < (5k^4 + 2)\varepsilon \leq 5,1k^4\varepsilon$ (см. замечание 1, п. 1, б).

Рис. 1. Схема C

По схеме C построим схему $\psi(C)$ (см. теорему 1). Оценим ненадёжность $P(\psi(C))$ схемы $\psi(C)$ по формуле (3):

$$\begin{aligned} P(\psi(C)) &< \varepsilon + 2^{2^k} (1/2 + (5,1k^4)^2 + 2^{-2} \cdot 5,1k^4) \varepsilon^2 < \varepsilon + 2^{2^k} (1/2 + 26,01k^8 + 1,275k^4) \varepsilon^2 < \\ &< \varepsilon + 2^{2^k} \cdot 27k^8 \varepsilon^2 \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь предпоследнее неравенство получено с учётом замечания 1, п. 1, в.

Следовательно, схема $P(\psi(C))$ – искомая схема D' . ■

Теорема 3. Любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать такой схемой D , что $P(D) < \varepsilon + c_1(k)\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 = 2^{-2^k}/(27k^8)$, $c_1(k) = 5 \cdot 2^{2^k}$.

Доказательство. По теореме 2 любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать схемой D' с ненадёжностью $P(D') < 2\varepsilon$. По схеме D' построим схему $\psi(D')$ и оценим её ненадёжность $P(\psi(D'))$ по формуле (3):

$$P(\psi(D')) < \varepsilon + \varepsilon^2 2^{2^k} (1/2 + 2 \cdot 1/4 + 4) = \varepsilon + 5 \cdot 2^{2^k} \varepsilon^2.$$

Схема $\psi(D')$ – искомая схема D . ■

Из теоремы 3 следует, что любую функцию из P_k можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше ε .

Пусть $K(n)$ – множество функций k -значной логики, каждая из которых зависит от переменных $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 1$) и отлична от функций $0, k-1, x_1, \dots, x_n$. Обозначим $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(n)$. Очевидно, что $|K(n)| = k^{k^n} - n - 2$, а значит, класс $K(n)$ содержит

почти все функции из множества $P_k(n)$, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{k^n} - n - 2}{k^{k^n}} = 1$.

Справедлива теорема о нижней оценке ненадёжности схем, реализующих функции из класса K .

Теорема 4. Пусть функция $f \in K$. Тогда для любой схемы S , реализующей f , верно неравенство $P(S) \geq \varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно выделить подсхему из одного элемента, выход которого является выходом схемы, и оценить вероятность появления 0 на любом ненулевом входном наборе схемы.

Действительно, пусть $f \in K(n)$, S — любая схема, реализующая f . Заметим, что схема S содержит хотя бы один элемент. Пусть E — функциональный элемент схемы S , выход которого является выходом схемы S .

Поскольку $f \not\equiv 0$, найдутся такие значение $i \in E_k \setminus \{0\}$ и входной набор $\tilde{a}^n$, что $f(\tilde{a}^n) = i$. Вычислим вероятность $P_0(S, \tilde{a}^n)$ появления значения 0 на выходе схемы S на наборе $\tilde{a}^n$, обозначив через p_0 вероятность появления нулевого набора на входах элемента E :

$$P_0(S, \tilde{a}^n) = p_0 + (1 - p_0)\varepsilon = \varepsilon + p_0(1 - \varepsilon) \geq \varepsilon.$$

Теорема доказана. ■

Следовательно, любая схема, реализующая функцию $f \in K$, функционирует с ненадёжностью, которая не меньше ε . Это означает, что схема, реализующая функцию $f \in K$ и удовлетворяющая условиям теоремы 3, является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Поскольку ненадёжности двойственных (относительно перестановки, порождаемой функцией $N(x) = k - 1 - x$, которую называют отрицанием Лукашевича) схем равны [8], утверждение, доказанное в базисе B для ненадёжности схемы, реализующей функцию f , при неисправностях типа 0 на выходах элементов, верно в базисе B^* для ненадёжности двойственной схемы, реализующей функцию f^* , при неисправностях типа $k - 1$ на выходах элементов. Следовательно, в базисе B^* при неисправностях типа $k - 1$ на выходах элементов почти любую функцию k -значной логики можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой, которая функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заметим, что: 1) функции $x_1, \dots, x_n$ можно реализовать абсолютно надёжно, не используя функциональные элементы; 2) $(x_i)^* = x_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$); 3) $0^* = k - 1$, $(k - 1)^* = 0$.

2. Верхняя оценка ненадёжности схем при неисправностях типа $k - 1$

Будем считать, что элементы базиса $B = \{V_k\}$ с вероятностью ε подвержены однотипным константным неисправностям типа $k - 1$ на выходах элементов.

Теорема 5 [5]. Пусть f — произвольная функция из P_k , S — любая схема, реализующая f , $P(S)$ — ненадёжность схемы S . Тогда можно построить схему $\psi(S)$, которая реализует функцию f с ненадёжностью

$$P(\psi(S)) \leq 3\varepsilon + (2^{2^k-1} - 2^k)\varepsilon^2 + 2^{2^k}\varepsilon P(S) + (2^{2^k} - 2^k - 1)P^2(S). \quad (4)$$

В теореме 5 установлено рекуррентное соотношение между ненадёжностью схемы $\psi(S)$ и ненадёжностью исходной схемы S . В соотношении (4) отбросим отрицательные слагаемые в правой части и учтём замечание 1, п. 2, получим неравенство

$$P(\psi(S)) \leq 3\varepsilon + 2^{2^k}(1/2\varepsilon^2 + 1/4\varepsilon P(S) + P^2(S)). \quad (5)$$

Теорема 6. Любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать схемой D' , ненадёжность которой $P(D') < 4\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 = 2^{-2^k}/(27k^8)$.

Доказательство. Доказательство проведем методом индукции по числу переменных функции $f(\tilde{x}^n)$.

1. Б а з и с и н д у к ц и и: $n = 1$. Представим функцию $f(x)$ в виде (аналог совершенной ДНФ) [6]

$$f(x) = J_0(x) \& f(0) \vee J_1(x) \& f(1) \vee \dots \vee J_{k-1}(x) \& f(k-1).$$

Промоделируем эту формулу схемой S' , используя схемы из лемм 2–4, и получим $L(S') < 5k^4$, $P(S') \leq 5k^4\varepsilon$.

По схеме S' построим схему $\psi(S')$ (см. теорему 5). Оценим ненадёжность $P(\psi(S'))$ схемы $\psi(S')$ по формуле (5), учитывая условие $\varepsilon \leq \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned} P(\psi(S')) &< 3\varepsilon + 2^{2^k} (1/2\varepsilon^2 + 1/4 \cdot 5k^4\varepsilon^2 + (5k^4\varepsilon)^2) = 3\varepsilon + \varepsilon^2 2^{2^k} (1/2 + 25k^8 + 1, 25k^4) \leq \\ &\leq 3\varepsilon + 2^{2^k} \cdot 27k^8\varepsilon^2 \leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь предпоследнее неравенство получено с учётом замечания 1, п. 1, а.

Индуктивный переход. Допустим, что утверждение теоремы верно для функций $f(\tilde{x}^{n-1})$ ($n \geq 2$). Докажем его для функций $f(\tilde{x}^n)$. Разложим $f(\tilde{x}^n)$ по переменной x_n :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= J_0(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \vee J_1(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \dots \\ &\vee J_{k-1}(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, k-1). \end{aligned}$$

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой C (см. рис. 1).

Функции $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$, согласно индуктивному предположению, можно реализовать схемами с ненадёжностью меньше 4ε , поэтому будем считать, что $P(S_i) < 4\varepsilon$, $i \in E_k$. Аналогично доказательству теоремы 2 получаем, что схема A содержит не более $5k^4$ элементов, поэтому верно неравенство $P(A) \leq 5k^4\varepsilon$.

Если схема A исправна, то для реализации функции f она использует значение одной из схем $S_0, S_1, \dots, S_{k-1}$, реализующих соответственно функции $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$. Поэтому $P(C) < P(A) + 4\varepsilon < (5k^4 + 4)\varepsilon < 5,1k^4\varepsilon$ (см. замечание 1, п. 1, г).

По схеме C построим схему $\psi(C)$ (см. теорему 5). Оценим ненадёжность $P(\psi(C))$ схемы $\psi(C)$ по формуле (5):

$$P(\psi(C)) < 3\varepsilon + 2^{2^k} (1/2 + (5,1k^4)^2 + 1/4 \cdot 5,1k^4)\varepsilon^2 < 3\varepsilon + 2^{2^k} \cdot 27k^8\varepsilon^2 \leq 3\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.$$

Здесь предпоследнее неравенство получено ввиду замечания 1, п. 1, в.

Следовательно, схема $P(\psi(C))$ — искомая схема D' . ■

Теорема 7. Любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать такой схемой D , что $P(D) < 3\varepsilon + c_2(k)\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 = 2^{-2^k}/(27k^8)$, $c_2(k) = 17,5 \cdot 2^{2^k}$.

Доказательство. По теореме 6 любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать схемой D' с ненадёжностью $P(D') < 4\varepsilon$. По схеме D' построим схему $\psi(D')$ и оценим её ненадёжность $P(\psi(D'))$ по формуле (5):

$$P(\psi(D')) < 3\varepsilon + \varepsilon^2 2^{2^k} (1/2 + 1/4 \cdot 4 + 16) = 3\varepsilon + 17,5 \cdot 2^{2^k} \varepsilon^2.$$

Схема $\psi(D')$ — искомая схема D . ■

Из теоремы 7 следует, что при однотипных константных неисправностях типа $k-1$ любую функцию из P_k можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше 3ε .

Справедлива теорема о нижней оценке ненадёжности схем.

Теорема 8. Пусть функция $f \in K$. Тогда для любой схемы S , реализующей f , верно неравенство $P(S) \geq \varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Доказательство. Достаточно выделить подсхему из одного элемента, выход которого является выходом схемы, и оценить вероятность появления $k - 1$ на любом входном наборе схемы $\tilde{a}^n$, $f(\tilde{a}^n) \neq k - 1$ (см. доказательство теоремы 4). ■

Следовательно, любая схема, реализующая функцию $f \in K$, функционирует с ненадёжностью, которая не меньше ε . Это означает, что схема, реализующая функцию $f \in K$ и удовлетворяющая условиям теоремы 7, функционирует с ненадёжностью, асимптотически не больше 3ε и не меньше ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Поскольку ненадёжности двойственных схем равны [8], утверждение, доказанное в базисе B для ненадёжности схемы, реализующей функцию f , при неисправностях типа $k - 1$ на выходах элементов, верно в базисе B^* для ненадёжности двойственной схемы, реализующей функцию f^* , при неисправностях типа 0 на выходах элементов. Следовательно, в базисе B^* при неисправностях типа 0 на выходах элементов почти любую функцию k -значной логики можно реализовать схемой, которая функционирует с ненадёжностью, асимптотически не больше 3ε и не меньше ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Выводы

В полном базисе, состоящем из функции Вебба, при неисправностях типа 0 на выходах элементов и в двойственном ему базисе при неисправностях типа $k - 1$ на выходах элементов почти любую функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) равной ε .

В полном базисе, состоящем из функции Вебба, при неисправностях типа $k - 1$ на выходах элементов и в двойственном ему базисе при неисправностях типа 0 на выходах элементов почти любую функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше 3ε и не меньше ε .

ЛИТЕРАТУРА

1. Pippenger N. On networks of noisy gates // 26 Symp. Foundation on Computer Science. 21–23.10.1985, Portland. P. 30–38.
2. Ортюков С. И. Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 166–168.
3. Uhlig D. Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity // LNCS. 1987. V. 278. P. 462–469.
4. Алехина М. А., Барсукова О. Ю. Синтез надежных схем в базисе, состоящем из функции Вебба, в P_k // Изв. вузов. Математика. 2019. № 7. С. 15–28.
5. Алехина М. А. Рекуррентные соотношения для ненадежностей схем при однотипных константных неисправностях типов 0 и $k - 1$ в базисе, состоящем из функции Вебба, в P_k // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 4. С. 25–30.
6. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 2001. 385 с.
7. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992. 192 с.
8. Алехина М. А. Надежность двойственных схем в P_k // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 1. С. 3–13.

REFERENCES

1. Pippenger N. On networks of noisy gates. 26 Symp. Foundation on Computer Science, 21–23.10.1985, Portland, pp. 30–38.

2. *Ortyukov S. I.* Ob izbytochnosti realizatsii bulevykh funktsiy skhemami iz nenadezhnykh ehlementov [On the redundancy of the implementation of Boolean functions by circuits from unreliable elements]. Proc. Workshop Discr. Math. and its Appl., Moscow, MSU Publ., 1989. pp. 166–168. (in Russian)
3. *Uhlig D.* Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity. LNCS, 1987, vol. 278, pp. 462–469.
4. *Alekhina M. A. and Barsukova O. Yu.* Sintez nadezhnykh skhem v bazise, sostoyashchem iz funktsii Vebba, v P_k [The synthesis of reliable circuit in the basis consisting of the Webb function, in P_k]. Russian Mathematics, 2019, no. 7, pp. 15–28. (in Russian)
5. *Alekhina M. A.* Rekurrentnye sootnosheniya dlya nenadezhnostej skhem pri odnotipnykh konstantnykh neispravnostyakh tipov 0 i $k - 1$ v bazise, sostoyashchem iz funktsii Vebba, v P_k [Recurrent relations for unreliability of circuits under single-type constant faults of types 0 and $k - 1$ in the basis consisting of the Webb function in P_k]. University Proc. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences, 2018, vol. 4, pp. 25–30. (in Russian)
6. *Yablonskii S. V.* Vvedenie v diskretnuyu matematiku [Introduction into Discrete Mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 2001. 385 p. (in Russian)
7. *Redkin N. P.* Nadezhnost' i diagnostika skhem [Reliability and Diagnostics of Circuits]. Moscow, MSU Publ., 1992. 192 p. (in Russian)
8. *Alekhina M. A.* Nadezhnost' dvoystvennykh skhem v P_k [Reliability of dual circuit in P_k]. University Proc. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences, 2017, vol. 1, pp. 3–13. (in Russian)