ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 Математика и механика № 59

УДК 517.54 MSC 26B30, 26B35
DOI 10.17223/19988621/59/2

А.Н. Малютина, У.К. Асанбеков

О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ С *s*-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

По известной теореме С.Л. Соболева функция класса $W^1_{s,loc}(R^n)$ при $s > n$ эквивалентна непрерывной функции. При $s < n$ этого свойства, вообще говоря, может и не быть. В настоящей работе мы обобщаем ранее полученный авторами результат (1983) и находим необходимые условия, при которых классы и подклассы отображений с s-усредненной характеристикой при $1 < s < n$ будет непрерывными. Примеры подклассов таких отображений, которые будут непрерывными с указанными выше s приведены авторами (2016).

Ключевые слова: *отображения с s-усредненной характеристикой, модуль непрерывности, класс.*

Область $G \subset R^n$, $f : G \to R^n$, $f \in W_n^1(G)$, $1 < s < n$, и пусть для любого $y \in G$ выполняются неравенства

$$\int\limits_G (\lambda(x,f))^s k(|x-y|)\,d\sigma_x < M\ ; \tag{1}$$

$$\int\limits_G \left(\lambda^*(x,f)\right)^{s^*} k(|x-y|)\,d\sigma_x < M^*, \tag{1'}$$

где функция $k(t)$ определена при $t > 0$, положительна, не возрастает и $\lim\limits_{t\to 0+} k(t) = +\infty$. В случае (1) будем говорить, что это отображение с (s, k)-усредненной характеристикой, а в случае (2) – отображение с (s^*, k)-усредненной характеристикой, где функция $f \in W_n^1(G,k,M)$, $1 < s < n$.

Теорема 1. *Пусть f – отображение с (s^*, k)-усредненной характеристикой и выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^a k^{-\frac{1}{s^*}}(t)\,t^{-\frac{n}{s^*}}\,dt < +\infty,\ a > 0. \tag{2}$$

Тогда шар

$$B\left(\frac{x+y}{2},\frac{3}{2}\rho\right) \subset G,\ \ |f(x)-f(y)| < \Psi(|x-y|),$$

где $\Psi(\rho) \to 0$ *при* $\rho \to 0$.

Доказательство. Оценим $|f(x)-f(y)|$. Возьмем шары $B(x,\rho)$, $B(y,\rho)$ и $B_1\left(\frac{x+y}{2},\frac{\rho}{2}\right)$. Пусть $z \in B_1$, тогда, оценивая модуль непрерывности, имеем

$$\left|f(x)-f(y)\right|\le\left|f(x)-f(z)\right|+\left|f(z)-f(y)\right|\le\int_x^z\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|dl_x+\int_y^z\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|dl_x .$$

Проинтегрируем последнее неравенство по всем $z\in B_1$:

$$\varkappa_n\left(\frac{\rho}{2}\right)^n\left|f(x)-f(y)\right|\le\int_{B_1}dz\int_x^z\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|dl_x+\int_{B_1}dz\int_y^z\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|dl_x\le\int_{|x-z|<\rho}dz\int_x^z\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|dl_x+\int_{|y-z|<\rho}dz\int_y^z\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|dl_x ,$$

где $\varkappa_n$ – объем единичного шара в R_n. Оценим последние интегралы, вводя обобщенные сферические координаты r,ω с центром соответственно в точках x и y

$$\int_{|x-z|<\rho}dz\int_x^z\left|\nabla f\right|dl_x=\int_{r\le\rho}\int_{|\omega|=1}r^{n-1}drd\omega\int_0^r\left|\nabla f(x+l\omega)\right|dl_xd\omega=$$

и далее, применяя теорему Фубини, получаем

$$=\int_{r\le\rho}r^{n-1}dr\int_{l\le r}\int_{|\omega|=1}\int_0^r\left|\nabla f(x+l\omega)\right|dl_xd\omega . \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(r)=\int_{B(x,r)}\left|\nabla f(z)\right|dz=\int_{r<\rho}r^{n-1}dr\int_{l\le r}\int_{|\omega|=1}\left|\nabla f(x+l\omega)\,dl_xd\omega\right| .$$

Причем её производная имеет вид

$$\varphi'(r)=r^{n-1}\int_{|\omega|=1}\left|\nabla f(x+r\omega)\,d\omega\right| .$$

Оценим функцию $\varphi(r)$:

$$\varphi(r)=\int_{B(x,r)}\left|\nabla f(z)\right|dz\le\left(\int_{B(x,r)}\left|\nabla f\right|^ndz\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_{B(x,r)}dz\right)^{\frac{n-1}{n}}=$$

$$=\left(\int_{B(x,r)}\frac{\left|\nabla f(z)\right|^n}{J(z,f)}\,\frac{J(z,f)}{k^{-\frac{1}{s^*}}(|z-x|)}k^{-\frac{1}{s^*}}(|z-x|)\,d\sigma_z\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_{B(x,r)}dz\right)^{\frac{n-1}{n}}\le$$

$$\le\left(\int_{B(x,r)}\left(\frac{\left|\nabla f(z)\right|^n}{J(z,f)}k^{\frac{1}{s^*}}(|z-x|)J^{\frac{1}{s^*}}(z,f)\right)^{s^*}d\sigma_z\right)^{\frac{1}{s^*}}\left(\int_{B(x,r)}J^{\frac{s^*-1}{s^*}}(z,f)k^{-\frac{1}{s^*}}(|z-x|)d\sigma_z\right)^{\frac{s^*-1}{s^*}}=$$

$$=\left(\int_{B(x,r)}\left(\frac{\left|\nabla f(z)\right|^n}{J(z,f)}\right)^p k(|z-x|)J(z,f)d\sigma_z\right)^{\frac{1}{s^*}}\left(\int_{B(x,r)}J(z,f)k^{-\frac{1}{s^*-1}}(|z-x|)d\sigma_z\right)^{\frac{s^*-1}{s^*}}\le$$

$$\le\left(\int_{B(x,r)}\lambda^*(z,f)\cdot k(|z-x|)d\sigma_z\right)^{\frac{1}{s^*}}\le M^{*\frac{1}{s^*}}k^{-\frac{1}{s^*}}(r)r^{\frac{n(s^*-1)}{s^*}} .$$

$$\varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} M^* \int\limits_{B(x,r)} \left(J(z,f) k^{\frac{1}{1-s^*}} (|z-x|) d\sigma_z \right)^{\frac{s^*-1}{s^*}} = M^* \varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} k^{\frac{1}{1-s^*}}(r) \int\limits_{B(x,r)} J(z,f) d\sigma_z \le$$

$$\le M^* \varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} k^{-\frac{1}{s^*}}(r) mf(B(x,r)) \le M^* \varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} \cdot c \cdot \left(k^{-\frac{1}{1-s^*}}(r) \right)^{\frac{s^*-1}{s^*}} \left(r^{\frac{n}{1-s^*}+1} \right)^{\frac{s^*-1}{s^*}} =$$

$$= \left(M^* \varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} \cdot c \cdot \left(k^{\frac{1}{s^*}}(r) \right) \left(r^{\frac{s^*-1-n}{s^*}} \right) \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}} M^* \cdot c \cdot k^{\frac{1}{s^*}}(r) \cdot r^{\frac{s-1-n}{s^*}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда

$$\int\limits_{l \le r} \int\limits_{|\omega|=1} \int\limits_0^r |\nabla f(x+l\omega)| dl_x d\omega = \int\limits_0^r \frac{\varphi'(l)}{l^{n-1}} dl_x = \int\limits_0^r \varphi(l)(n-1) l^{n-1} dl_x + \frac{\varphi(l)}{l^{n-1}} \Bigg|_{l=0}^{l=r} \le$$

$$\le M_1 (n-1) \int\limits_0^r k^{-\frac{1}{s^*}}(l) l^{-\frac{n}{s^*}} dl_x + \frac{\varphi(r)}{r^{n-1}},$$

где
$$M_1 = M^* \cdot c \cdot \varkappa_n^{\frac{s^*-1}{s^*}}.$$

Остается показать, что

$$\lim_{l \to 0} \frac{\varphi(l)}{l^{n-1}} = 0.$$

Из определения функции φ и (4) следует неравенство

$$0 \le \frac{\varphi(l)}{l^{n-1}} \le ck^{-\frac{1}{s^*}}(l) l^{1-\frac{n}{s^*}}.$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{l \to 0+} k^{-\frac{1}{s^*}}(l) l^{1-\frac{n}{s^*}} = 0. \qquad (5)$$

По условию функция k монотонна. Применяя теперь (2), имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $0 < t < \delta$ и на основании критерия Коши будет выполнятся неравенство

$$\left| \int\limits_{0,5t}^t l^{-\frac{n}{s^*}} k^{-\frac{1}{v}} dl \right| = \left| \int\limits_{0,5t}^t l^{-\frac{n}{s^*}+1} \frac{k^{-\frac{1}{s^*}}(l)}{l} dl \right| = \mu \ln 2 < \varepsilon,$$

где
$$\inf \left| l^{-\frac{n}{s^*}+1} k^{-\frac{1}{s^*}}(l) \right| \le \mu \le \sup \left| l^{-\frac{n}{s^*}+1} k^{-\frac{1}{s^*}}(l) \right|, 1 \in [0,5t; t].$$

Так как

$$\mu \ln 2 \ge t^{-\frac{n}{s^*}+1} k^{-\frac{1}{s^*}}(0,5t) \ln 2,$$

то
$$(0{,}5t)^{-\frac{n}{s^*}} k^{-\frac{1}{s^*}}(0{,}5t) < \frac{\varepsilon}{2^{-\frac{n}{s^*}+1}\ln 2}.$$

Отсюда следует (5). В силу (3) и (4) имеем

$$\varkappa_n\left(\frac{p}{2}\right)^n |f(x)-f(y)| \le 2\int\limits_{r\le\rho} r^{n-1}\left(M_1(n-1)k^{-\frac{1}{s^*}}(l)l^{-\frac{n}{s^*}}dl + \frac{\varphi(r)}{r^{n-1}}\right)dr \le$$
$$\le 2M_1(n-1)\frac{\rho^n}{k}\int\limits_0^\rho k^{-\frac{1}{s^*}}(l)l^{-\frac{n}{s^*}}dl + 2\int\limits_{n\le\rho}\varphi(r)dr \le$$
$$\le 2M_1 n\rho^n\int\limits_0^\rho k^{-\frac{1}{s^*}}(l)l^{-\frac{n}{s^*}}dl + 2\varphi(\rho)\rho.$$

Оценим теперь модуль непрерывности:
$$|f(x)-f(y)| \le (\varkappa_n)^{-1} M_1\frac{(n-1)2^{n-1}}{n}\int\limits_0^\rho k^{-\frac{1}{s^*}}(l)l^{-\frac{n}{s^*}}dl + 2^{n+1}\frac{\varphi(\rho)}{\rho^{n-1}} = \Psi(\rho),$$

где $\Psi(\rho)\to 0$, при $\rho\to 0$.

В [2] такой результат получен для функций класса $W_p^1(G)$, $G\subset R^n$.

Замечание. Теорема 1 представляет собой аналог леммы Мори [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: ЛГУ, 1950. 255 с.; Новосибирск, 1962. 255 с.
2. *Никулина Н.Г.*, *Малютина А.Н.* О непрерывности функций одного класса // Экстремальные задачи теории функций: сб. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1983. С. 47–52.
3. *Елизарова М.А.*, *Малютина А.Н.* Отображения с *s*-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.144 p.
4. *Асанбеков У.К.*, *Малютина А.Н.* Вычисление модуля сферического кольца // Комплексный анализ и приложения: материалы VIII Петрозаводской Международной конференции. 2016. С. 103–106.
5. *Alipova K.*, *Elizarova M.*, *Malyutina A.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // Комплексный анализ и его приложения: материалы VII Петрозаводской Международной конференции. 2014. С. 12–17.
6. *Ладыженская О.А.*, *Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
7. *Сингулярные* интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

Статья поступила 17.03.2019 г.

Malyutina A.N., Asanbekov U.K. ON THE MODULE OF CONTINUITY OF MAPPINGS WITH AN *s*-AVERAGED CHARACTERISTIC. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 11–15

DOI 10.17223/19988621/59/2

Keywords: spatial mappings with an *s*-averaged characteristic, modulus of continuity, mapping class.

We continue studying analytical properties of non-homeomorphic mappings with an s-averaged characteristic. O. Martio proposed the theory of Q-homeomorphisms (2001). The concept of Q-homeomorphisms was extended to maps with branching (2004). In this paper, we study analytical properties of non-homeomorphic mappings with an s-averaged characteristic and consider the question of continuity of mappings with an s-averaged characteristic. By the well-known Sobolev theorem, a function of class $W^1_{s,loc}\left(R^n\right)$ for is equivalent to a continuous function. This property does not hold when $s < n$. The authors presented such example for mappings with an s-averaged characteristic in 2016.

In this paper, we generalize the result obtained earlier to a more general class of mappings with an s-averaged characteristic. Relevant examples are built. The purpose of this paper is to indicate the necessary conditions under which mappings from classes and subclasses of mappings with an s-averaged characteristic $1 < s < n$ will be continuous. Here, n is the dimension of the space, and s is the averaging parameter. We proved a theorem in which we obtain necessary conditions for the continuity of such mappings that are with the abovementioned s. Earlier, such a result was obtained for functions of the class $W^1_{s,loc}\left(R^n\right)$. The theorem is an analogue of the Mori lemma.

MALYUTINA Aleksandra Nikolaevna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk, State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nmd@math.tsu.ru

ASANBEKOV Urmat Kubatovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: urmat_1396@mail.ru

REFERENCES

1. Sobolev S.L. (1950) *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Leningrad: Leningrad State University.
2. Nikulina N.G., Malyutina A.N. (1983) O nepreryvnosti funktsii odnogo klassa [On continuity of functions of a certain class]. *Ekstremal'nye zadachi teorii funktsii* [Extremum problems of the theory of functions]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 47–52.
3. Malyutina A.N., Elizarova M.A. (2013) *Otobrazheniya s s-usrednennoy kharakteristikoy. Opredelenie i svoystva* [Mappings with the s-averaged characteristic. Definition and properties] LAP Lambert Academic Publishing.
4. Asanbekov U.K., Malyutina A.N. (2016) Vychislenie modulya sfericheskogo kol'tsa [Calculation of the modulus of the spherical ring]. *Kompleksnyi analiz i prilozheniya. Materialy VIII Petrozavodskoi mezhdunarodnoi konferentsii* [Complex analysis and applications. Proceedings of the 8th Petrozavodsk International Conference]. pp. 103–106.
5. Alipova K., Elizarova M., Malyutina A. (2014) Examples of the mappings with s-averaged characteristic. *Kompleksnyy analiz i prilozheniya. Materialy VII Petrozavodskoy mezhdunarodnoy konferentsii* [Complex analysis and its applications. Proceedings of the 7th Petrozavodsk International Conference]. pp. 12–17.
6. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. (1973) *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and quasi-linear equations of the elliptical type]. Moscow: Nauka.
7. Stein E.M. (1971), *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton: Princeton University Press.

Received: March 17, 2019