ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 Математика и механика № 59

УДК 517.928 MSC 34D15, 34D05 34E05, 34M60, 34E10, 34A12
DOI 10.17223/19988621/59/3

Д.А. Турсунов

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ, КОГДА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИМЕЮТ ПОЛЮСЫ

Исследуется асимптотическое поведение решения сингулярно возмущенной задачи Коши при нарушении условия асимптотической устойчивости, когда комплексно-сопряженные собственные значения матрицы-функции коэффициента линейной части имеют полюсы. Доказывается асимптотическая близость решения сингулярно возмущенной задачи Коши при нарушении асимптотической устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» к решению предельной системы на достаточно большом промежутке.

Ключевые слова: *асимптотическое поведение, сингулярно возмущенная задача Коши, сингулярное возмущение, малый параметр, система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, асимптотическая устойчивость, комплексно-сопряженные собственные значения.*

Как нам известно, многие актуальные задачи теории колебаний, теории радиотехнических приборов, теории автоматического регулирования, квантовой механики и др. сводятся к изучению систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Случаи, когда сингулярно возмущенные уравнения имеют явные решения, крайне редки. Даже для современных компьютеров задача определить поведение решения в пограничных слоях и при нарушении условия асимптотической устойчивости, при достаточно малых значениях параметра, – весьма трудоемкая задача. Важным инструментом при исследовании поведений решений подобных сингулярных задач являются асимптотические методы.

А.Н. Тихонов сформулировал достаточные условия, при выполнении которых решение возмущенной задачи и решение невозмущенной системы асимптотически близки [1, 2]. Далее эти достаточные условия стали называть условиями устойчивости. Затем, исследователей интересовало асимптотическое поведение решения задачи при нарушении условии устойчивости. Первой работой, когда нарушается условия устойчивости на отрезке [–1, 1], но выполняется предельный переход, является работа М.А. Шишковой [3], ученица Л.С. Понтрягина. Вслед за этой работой появились работы [4–16] и др. Во всех этих работах исследованы случаи, когда собственные значения имеют нули. В данной работе исследуется случай, когда комплексно-сопряженные собственные значения матрицы-функции коэффициента линейной части имеют полюсы. Доказывается асимптотическая близость решения сингулярно возмущенной задачи Коши при нарушении асимптотической устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» к решению предельной системы на достаточно большом промежутке.

Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + f(t),\ x(t_0,\varepsilon) = x^0, \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, $A(t)$ – квадратная матрица-функция второго порядка, с элементами $a_{jk}(t)$, $f(t) = \text{colon}\{f_1(t), f_2(t)\}$, $a_{jk}(t)$, $f_k(t)$ – аналитические функции, $(j, k = 1, 2)$, $x^0 = \text{colon}(\varepsilon,\varepsilon)$, $t \in [t_0,T_0]$, $t_0 = \text{ctg}(\pi/(2n-2))$, $t_0 < T_0$ – const, $3 < n \in \mathbf{N}$, матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения:

$$\lambda_1(t) = (t + i)^{-n},\ \lambda_2(t) = (t-i)^{-n},\ 1 < n \in \mathbf{N}.$$

Систему (1) при $\varepsilon = 0$ называют невозмущенной или предельной, эта предельная система имеет единственное решение: $\tilde{x}(t) = -A^{-1}(t) f(t)$.

Требуется доказать теорему

Теорема. Для решения задачи (1) справедлива асимптотическая оценка

$$\|x(t,\varepsilon) + A^{-1}(t)f(t)\| \le c\varepsilon, \text{ при } \text{ctg}(\pi/(2n-2)) \le t \le T_0,$$

где $0 < c$ – const, $t_0 < T_0$ – const, $t_0 = \text{ctg}(\pi/(2n-2))$, $3 < n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Как и в работе [14], в задаче (1) сделаем замену

$$x(t,\varepsilon) = B_0(t)y(t,\varepsilon) + g(t),$$

где $g(t) = -A^{-1}(t)f(t)$, $y(t,\varepsilon)$ – неизвестная вектор-функция,

$$B_0(t) = \begin{pmatrix} (\lambda_1(t) - a_{22}(t))/a_{21}(t) & (\lambda_2(t) - a_{22}(t))/a_{21}(t) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства: $B_0^{-1}(t)A(t)B_0(t) = D(t)$, где $D(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$.

Тогда получим задачу

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = D(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon B(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon h(t),\ y(t_0,\varepsilon) = y^0(\varepsilon), \tag{2}$$

где $B(t) = -B_0^{-1}(t)B'_0(t)$, $h(t) = -B_0^{-1}(t)g'(t)$, $\|y^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \varepsilon \to 0$.

От задачи (2) переходим к эквивалентной задаче:

$$y(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)y^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\big(B(\tau)z(\tau,\varepsilon) + h(\tau)\big)d\tau, \tag{3}$$

где $E(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_\tau^t D(s)ds\right)$.

Пусть

$$y(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} v(t,\varepsilon) \\ w(t,\varepsilon) \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{pmatrix},\ h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix},$$

$$E_j(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t \lambda_j(s)ds\right), j = 1, 2;$$

$$P(v,w,t) = b_{11}(t)v(t,\varepsilon) + b_{12}(t)w(t,\varepsilon),\ Q(v,w,t) = b_{21}(t)v(t,\varepsilon) + b_{22}(t)w(t,\varepsilon).$$

Задачу (3) запишем в скалярном виде:

$$\begin{cases} v(t,\varepsilon)=v^0E_1(t,t_0,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)h_1(\tau)\,d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)P(v,w,\tau)\,d\tau, \\ w(t,\varepsilon)=w^0E_2(t,t_0,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)h_2(\tau)\,d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)Q(v,w,\tau)\,d\tau, \end{cases} \tag{4}$$

имеем $|v^0|=|v^0(t_0,\varepsilon)|=O(\varepsilon),\ |w^0|=|w^0(t_0,\varepsilon)|=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0.$

Задачу (4) будем решать методом последовательных приближений

$$v_0(t,\varepsilon)\equiv 0,\ \ w_0(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$v_1(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)E_1(t,t_0,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)h_1(\tau)\,d\tau,$$

$$w_1(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)E_2(t,t_0,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)h_2(\tau)\,d\tau,,$$

$$v_m(t,\varepsilon)=v_1(t,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_1(t,\tau,\varepsilon)P(v_{m-1},w_{m-1},\tau)\,d\tau\ ,$$

$$w_m(t,\varepsilon)=w_1(t,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E_2(t,\tau,\varepsilon)Q(v_{m-1},w_{m-1},\tau)\,d\tau\ \ ,$$

где $P(v_m,w_m,t)=b_{11}(t)v_m(t,\varepsilon)+b_{12}(t)w_m(t,\varepsilon),$

$$Q(v_m,w_m,t)=b_{21}(t)v_m(t,\varepsilon)+b_{22}(t)w_m(t,\varepsilon),\ |b_{kj}(t)|\le c_0/2,\ (k,j=1,2).$$

Далее при оценке функций $\nu_m(t,\varepsilon)$, $w_m(t,\varepsilon)$ переменную t будем считать комплексным переменным, следовательно, $\nu_m(t,\varepsilon)$, $w_m(t,\varepsilon)$ – комплексными величинами. Затем мы используем свойства аналитической функции [17]:

Значение интеграла от аналитической функции в односвязной области H не изменяется, если контур интегрирования непрерывно деформируется так, что его концы остаются неподвижными и он все время остается внутри H.

Пусть $t=t_1+it_2$, $\tau=\tau_1+i\tau_2$, где t_1, t_2, τ_1, τ_2 – действительные переменные, $i=\sqrt{-1}$. Нам следует рассматривать область тех точек $(t_1;t_2)$, для которых одновременно справедливы неравенства

$$u(t_1,t_2)\equiv \operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t_1+it_2}(s+i)^{-n}\,ds\le 0,\quad u(t_1,-t_2)\equiv \operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t_1+it_2}(s-i)^{-n}\,ds\le 0.$$

Проведем исследование последовательных приближений $\nu_m(t,\varepsilon)$ и $w_m(t,\varepsilon)$.

Имеют места неравенства:

$$|v_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le|v^0E_1(t_1,t_2,\varepsilon)|+|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)|;$$

$$|v_m(t_1,t_2,\varepsilon)|\le|v_1(t_1,t_2,\varepsilon)|+|J_m(t_1,t_2,\varepsilon)|; \tag{5}$$

$$|w_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le\left|w^0E_2(t_1,t_2,\varepsilon)\right|+\left|\tilde{J}_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|;$$

$$|w_m(t_1,t_2,\varepsilon)|\le|w_1(t_1,t_2,\varepsilon)|+\left|\tilde{J}_m(t_1,t_2,\varepsilon)\right|; \tag{6}$$

где

$$\left|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le \sum_j \int_{l_1^j} e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}} \left|h_1(\tau_1,\tau_2)\right| \sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2}\ ;$$

$$\left|\tilde{J}_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le \sum_j \int_{\tilde{l}_1^j} e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(\tau_1,-\tau_2)}{\varepsilon}} \left|h_2(\tau_1,\tau_2)\right| \sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2}\ ;$$

$$\left|J_m(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le \sum_j \int_{l_m^j} e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}} \left|P_{m-1}(v_{m-1},w_{m-1},\tau_1,\tau_2)\right| \sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2}\ ;$$

$$\left|\tilde{J}_m(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le \sum_j \int_{\tilde{l}_m^j} e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(\tau_1,-\tau_2)}{\varepsilon}} \left|Q_{m-1}(v_{m-1},w_{m-1},\tau_1,\tau_2)\right| \sqrt{d\tau_1^2+d\tau_2^2}\ ;$$

$l_m, \tilde{l}_m$ – пути интегрирования m-го приближения, соединяющие точки $(t_0\ ;0)$ $(t_1;t_2)$, l_m^j – отрезки этих путей.

Собственные значения $A(t)$ в комплексной плоскости, соответственно в точках $(\pm i)$ имеют n-кратный полюс и

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) \equiv \operatorname{Re}\frac{(t\mp i)^n}{\left(t^2+1\right)^n} = \frac{\psi_n(t)}{\left(t^2+1\right)^n},\ \ \psi_n(t) = \operatorname{Re}(t\mp i)^n,$$

где

$$\psi_n(t) = \begin{cases} t^{2k} - C_{2k}^2 t^{2k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} C_{2k}^{2k-2} t^2 + (-1)^k C_{2k}^{2k}, & n = 2k,\ k \in \mathrm{N}, \\ t^{2k-1} - C_{2k-1}^2 t^{2k-3} + \ldots + (-1)^{k-2} C_{2k-1}^{2k-4} t^3 + (-1)^{k-1} C_{2k-1}^{2k-2} t, & n = 2k-1, \end{cases}$$

поэтому $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) < 0$, если $\psi_n(t) < 0$; $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) > 0$, если $\psi_n(t) > 0$; $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) = 0$, если $\psi_n(t) = 0$ или $t \to \infty$.

Если перейти к полярным координатам

$$t + i = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad \rho = \sqrt{t^2+1},\quad \varphi = \operatorname{arctg}(1/t),$$

то получим $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\rho,\varphi) = \rho^{-n}\cos(n\varphi)$.

Поэтому

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\rho,\varphi) < 0 \text{ при } \frac{4k+1}{2n}\pi < \varphi < \frac{4k+3}{2n}\pi;$$

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\rho,\varphi) > 0 \text{ при } \frac{4k+3}{2n}\pi < \varphi < \frac{4k+5}{2n}\pi;$$

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\rho,\varphi) = 0 \text{ при } \varphi = \frac{2k+1}{2n}\pi \text{ или } \rho \to \infty.$$

В полярных координатах начальная точка $(t_0;0)$ переходит в точку (ρ_0,φ_0), где

$$\rho_0 = \sqrt{1+t_0^2},\quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2(n-1)},\quad \frac{\pi}{2n} < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2n}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$u(t)-u(t_0)\equiv \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}(s+i)^{-n}\,ds=-\frac{\psi_{n-1}(t)}{(n-1)\left(t^2+1\right)^{n-1}}+\frac{\psi_{n-1}(t_0)}{(n-1)\left({t_0}^2+1\right)^{n-1}},$$

$$\psi_{n-1}(t)=\mathrm{Re}(t-i)^{n-1},\ n>1,$$

в полярных координатах функция $u(t)-u(t_0)$ имеет вид

$$u(\rho,\varphi)-u(\rho_0,\varphi_0)=-\frac{\cos(n-1)\varphi}{\rho^{n-1}}+\frac{\cos(n-1)\varphi_0}{\rho_0^{n-1}}.$$

При $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2(n-1)}$ имеем $\cos(n-1)\varphi_0=0$, поэтому

$$u(\rho,\varphi)-u(\rho_0,\varphi_0)=-\frac{\cos(n-1)\varphi}{\rho^{n-1}}.$$

При $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2(n-1)}$ и $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2(n-1)},\dfrac{\pi}{2(n-1)}\right]$ $u(\rho,\varphi)\le 0$. В декартовых координатах $t_0=\mathrm{ctg}(\pi/(2n-2))$, и поэтому $u(t)\le 0$ при $t\in[t_0,+\infty)$.

Оценим последовательные приближения. Исследование проведем в области H_α:

$$H_\alpha=\{(t_1;t_2):\ u(t_1,t_2)\le c(\alpha),\ u(t_1,-t_2)\le c(\alpha)\},$$

где

$$u(t_1,t_2)=-\frac{\psi_{n-1}(t_1,t_2)}{(n-1)\left(t_1^2+(t_2+1)^2\right)^{n-1}},$$

$$c(\alpha)=u(t_0+\alpha,0),\ 1<t_0,\ 0<\alpha<<1,\ (\alpha \text{ – достаточно малое число}).$$

Заметим, что если $u(t_1,t_2)\le 0$ и $u(t_1,-t_2)\le 0$ то $\|E(t_1,t_2,t_0,\varepsilon)\|=O(1)$ или $\|E(t_1,t_2,t_0,\varepsilon)y^0(\varepsilon)\|=O(\varepsilon)$.

Пусть

$$H=\{(t_1;t_2):\ u(t_1,t_2)\le u(T_0,0),\ u(t_1,-t_2)\le u(T_0,0)\},$$

$$H_0=\{(t_1;t_2):\ u(t_1,t_2)\le c(\alpha),\ u(t_1,-t_2)\le c(\alpha),\ t_1\le T_\alpha(t_2+1),\ t_1\le T_\alpha(1-t_2)\},$$

$$H_1=\{(t_1;t_2):\ u(t_1,-t_2)\le c(\alpha),\ T_\alpha(1-t_2)\le t_1\},$$

$$H_2=\{(t_1;t_2):\ u(t_1,t_2)\le c(\alpha),\ T_\alpha(1+t_2)\le t_1\},$$

где $u(T_0,0)<c(\alpha)$, $T_0<T_\alpha$ – абсцисса точки пересечения линии $u(t_1,t_2)=c(\alpha)$ и $u(t_1,-t_2)=c(\alpha)$, $t_0<T_0$ – const.

Рассмотрим линии уровня

$$u(t_1,t_2)=-\tilde{c}\ \text{ и }\ u(t_1,-t_2)=-\tilde{c},\qquad 0<\tilde{c}\ -const,$$

или в полярной системе координат

$$\frac{\cos(n-1)\varphi}{\rho^{n-1}}=(n-1)\tilde{c},\qquad \frac{\cos(n-1)\tilde{\varphi}}{\tilde{\rho}^{n-1}}=(n-1)\tilde{c}.$$

Линиями уровня является $(n-1)$-лепестковая роза. Область H_α полностью покрывается линиями уровня.

Определим пути интегрирования:

1) если $(t_1;t_2)\in H_0$, то $l_m = l_m^1 \cup l_m^2 \cup l_m^3$, $\tilde{l}_m = \tilde{l}_m^1 \cup \tilde{l}_m^2 \cup \tilde{l}_m^3$. При этом $\tilde{l}_m$ симметрично l_m относительно действительной оси и

$l_m^1 : \tau_2 = 0, \quad t_0 \le \tau_1 \le t_0 + \alpha;\ u(\tau_1, 0) = -\dfrac{\psi_{n-1}(\tau_1, 0)}{(n-1)(\tau_1^2+1)^{n-1}}$;

l_m^2 : верхняя часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_2) = u(t_0 + \alpha, 0)$, $t_0 + \alpha \le \tau_1 \le t_1^*$, t_1^* – абсцисса точки пересечения линии уровня с прямой $\tau_2 + 1 = (t_2 + 1)\tau_1/t_1$;

$l_m^3 : (\tau_2+1)t_1 = (t_2+1)\tau_1, t_1 \le \tau_1 \le t_1^*,\ u(\tau_1,\tau_2) = u(t_1,t_2)\dfrac{t_1^{n-1}}{\tau_1^{n-1}}$;

2) если $(t_1;t_2)\in H_1$, то $l_m = l_m^1 \cup l_m^2 \cup l_m^3$, $\tilde{l}_m = \tilde{l}_m^1 \cup \tilde{l}_m^2 \cup \tilde{l}_m^3 \cup \tilde{l}_m^4 \cup \tilde{l}_m^5$. Заметим, что $\tilde{l}_m$ несимметрично l_m относительно действительной оси. Здесь l_m та же l_m, что в H_0, поэтому определим $\tilde{l}_m$:

$\tilde{l}_m^1 : \tau_2 = 0,\ t_0 \le \tau_1 \le t_0 + \alpha;\ u(\tau_1, 0) = -\dfrac{\psi_{n-1}(\tau_1)}{(n-1)(\tau_1^2+1)^{n-1}}$;

$\tilde{l}_m^2$: нижняя часть линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2) = u(t_0 + \alpha, 0)$, $t_0 + \alpha \le t_1 \le T_\alpha$;

$\tilde{l}_m^3$: отрезок прямой $1-\tau_2 = \dfrac{1-t_2}{t_1}\tau_1$, $u(\tau_1,-\tau_2) = u(t_1,-t_2)\dfrac{t_1^{n-1}}{\tau_1^{n-1}}$, $t_0 + \alpha \le t_1 \le T_\alpha$;

$\tilde{l}_m^4$: часть линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2) = u\left(t_1+\alpha_0, 1+\dfrac{t_2-1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$, $t_1^* \le \tau_1 \le t_1 + \alpha_0$; t_1^* – абсцисса точки пересечения линии уровня $u(\tau_1,-\tau_2) = u\left(t_1+\alpha_0, 1+\dfrac{t_2-1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$ с прямой с $1-\tau_2 = (1-t_2)\tau_1/t_1$;

$\tilde{l}_m^5$: отрезок прямой $1-\tau_2 = \dfrac{1-t_2}{t_1}\tau_1$, $t_1 \le \tau_1 \le t_1^*$, $u(\tau_1,-\tau_2) = u(t_1,-t_2)\dfrac{t_1^{n-1}}{\tau_1^{n-1}}$;

3) если $(t_1;t_2)\in H_2$, то $l_m = l_m^1 \cup l_m^2 \cup l_m^3 \cup l_m^4 \cup l_m^5$, $\tilde{l}_m$ – та же $\tilde{l}_m$, что и в H_0. Определим l_m:

$l_m^1 : \tau_2 = 0,\ t_0 \le \tau_1 \le t_0 + \alpha;\ u(\tau_1, 0) = -\dfrac{\psi_{n-1}(\tau_1)}{(n-1)(\tau_1^2+1)^{n-1}}$;

l_m^2 : верхняя часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_2) = u(t_0 + \alpha, 0)$, $t_0 + \alpha \le t_1 \le T_\alpha$;

l_m^3 : отрезок прямой $\tau_2 + 1 = \dfrac{t_2+1}{t_1}\tau_1$, $t_0 + \alpha \le t_1 \le T_\alpha$, $u(\tau_1,\tau_2) = u(t_1,t_2)\dfrac{t_1^{n-1}}{\tau_1^{n-1}}$;

l_m^4: часть линии уровня $u(\tau_1,\tau_2) = u\left(t_1+\alpha_0, -1+\dfrac{t_2+1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$, $t_1^* \le \tau_1 \le t_1 + \alpha_0$; t_1^* – абсцисса точки пересечения линии уровня $u(\tau_1,\tau_2) = u\left(t_1+\alpha_0, -1+\dfrac{t_2+1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right)$ с прямой с $\tau_2 + 1 = (t_2+1)\tau_1/t_1$;

l_m^5 : отрезок $\tau_2+1=(t_2+1)\tau_1/t_1$, $t_1\le\tau_1\le t_1^*$, $u(\tau_1,\tau_2)=u(t_1,t_2)\dfrac{t_1^{n-1}}{\tau_1^{n-1}}$.

Для всех последовательных приближений путь интегрирования не меняется соответственно в областях H_0, H_1, H_2.

Произведем вычисления последовательных приближений.

Пусть $(t_1;t_2)\in H_0$, тогда

$$j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0}^{t_0+\alpha}e^{\frac{\psi_{n-1}(\tau_1)}{\varepsilon(n-1)\left(\tau_1^2+1\right)^{n-1}}}d\tau_1;\quad K(t_1,t_2,\varepsilon)=e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}};$$

$$j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0+\alpha}^{t_1^*}e^{-\frac{u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}d\tau_1;\ j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)\int_{t_1}^{t_1^*}e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1,$$

$$\left|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|\le j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)+j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)+j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon);$$
$$\left|\tilde{J}_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|\le \tilde{j}_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)+\tilde{j}_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)+\tilde{j}_{13}(t_1,t_2,\varepsilon).$$

Оценим эти интегралы:

$$j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0}^{t_0+\alpha}e^{-\frac{u(\tau_1,0)}{\varepsilon}}d\tau_1=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0}^{t_0+\alpha}\frac{-\varepsilon\, d\left(e^{-\frac{u(\tau_1,0)}{\varepsilon}}\right)}{u'(\tau_1,0)}=$$

$$=O(\varepsilon)K(t_1,t_2,\varepsilon)\left(\frac{e^{-\frac{u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}}{-u'(t_0+\alpha,0)}+\frac{e^{-\frac{u(t_0,0)}{\varepsilon}}}{-u'(t_0,0)}-\int_{t_0}^{t_0+\alpha}\frac{u''(\tau_1,0)}{\left(u'(\tau_1,0)\right)^2}e^{-\frac{u(\tau_1,0)}{\varepsilon}}d\tau_1\right),$$

так как $u(t_1,t_2)-u(t_0+\alpha,0)\le 0$, $u(t_0+\alpha,0)<0$, $u(t_0,0)=0$; $u'(\tau_1,0)\ne 0$

при $t_0\le\tau_1\le t_0+\alpha<\mathrm{ctg}(\pi/2n)$, $u(t_1,t_2)-u(\tau_1,0)\le 0$.

Следовательно, для интеграла $j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)$ получим оценку $j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$.

$$j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0+\alpha}^{t_1^*}e^{-\frac{u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}d\tau_1=O(1)e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}};$$

$$j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_1}^{t_1^*}e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int_{t_1}^{t_1^*}e^{-\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\int_{t_1}^{t_1^*}e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int_{t_1}^{t_1^*}e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1-t_1\right)(n-1)t_1^{n-2}}{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\frac{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}{-u(t_1,t_2)(n-1)t_1^{n-2}}\left(1-e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0.$$

Так как $t_0 = \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{2(n-1)} > 1,\ n > 3$, и $t_0 \le \tau_1 \le t_1$, то справедливы неравенства $\sum_{j=1}^{n} t_1^{n-j} t_0^{j-1} \le \sum_{j=1}^{n} t_1^{n-j}\tau_1^{j-1} \le n t_1^{n-1}$ или

$$-(t_1-\tau_1)u(t_1,t_2)\sum_{j=1}^{n} t_1^{n-j} t_0^{j-1} \le -(t_1-\tau_1)u(t_1,t_2)\sum_{j=1}^{n} t_1^{n-j}\tau_1^{j-1} \le -(t_1-\tau_1)u(t_1,t_2)\,n t_1^{n-1},$$

где $u(t_1,t_2) < 0$.

Получим

$$\begin{cases} \left|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le c_1\left(\varepsilon + e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right), \\ \left|\tilde{J}_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le c_1\left(\varepsilon + e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right). \end{cases} \tag{7}$$

2) Пусть $(t_1;t_2)\in H_2$, тогда

$$\left|\tilde{J}_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right| \le c_1\left(\varepsilon + e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right);\ \text{оценим } |J_1(t_1,t_2,\varepsilon)|:$$

$$j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0}^{t_0+\alpha} e^{\frac{\psi_{n-1}(\tau_1)}{\varepsilon(n-1)\left(\tau_1^2+1\right)^{n-1}}}d\tau_1;\quad K(t_1,t_2,\varepsilon) = e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}};$$

$$j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0+\alpha}^{T_\alpha} e^{-\frac{u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}d\tau_1;$$

$$j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_1+\alpha_0}^{T_\alpha} e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1;$$

$$j_{14}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_1^*}^{t_1+\alpha_0} e^{-\frac{\tilde{c}}{\varepsilon}}d\tau_1;\ \tilde{c} = u\left(t_1+\alpha_0, -1+\frac{t_2+1}{t_1}(t_1+\alpha_0)\right);$$

$$j_{15}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2\varepsilon)\int_{t_1}^{t_1^*} e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1.$$

Тогда

$$|J_1(t_1,t_2,\varepsilon)| \le j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon) + j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon) + j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon) + j_{14}(t_1,t_2,\varepsilon) + j_{15}(t_1,t_2,\varepsilon).$$

Оценим эти интегралы:

$$j_{11}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0;$$

$$j_{12}(t_1,t_2,\varepsilon) = O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int_{t_0+\alpha}^{T_\alpha} e^{-\frac{u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}d\tau_1 = O(1)e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}};$$

$$j_{13}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int\limits_{t_1+\alpha_0}^{T_\alpha} e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int\limits_{t_1+\alpha_0}^{T_\alpha} e^{-\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\int\limits_{t_1+\alpha_0}^{T_\alpha} e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon(T_\alpha)^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int\limits_{t_1+\alpha_0}^{T_\alpha} e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1-t_1\right)(n-1)t_1^{n-2}}{\varepsilon(T_\alpha)^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\frac{\varepsilon(T_\alpha)^{n-1}}{-u(t_1,t_2)(n-1)t_1^{n-2}}\left(1-e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0;$$

$$j_{14}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K(t_1,t_2,\varepsilon)\int\limits_{t_1^*}^{t_1+\alpha_0} e^{-\frac{\tilde c}{\varepsilon}}d\tau_1=O\left(\varepsilon^k\right),\varepsilon\to 0\,.$$

Действительно пусть $c_t=u(t_1,t_2)$, тогда $c_t-\tilde c<0$ так как $t_1<t_1^*<t_1+\alpha_0$.

$$j_{15}(t_1,t_2,\varepsilon)=O(1)K\int\limits_{t_1}^{t_1^*} e^{-\frac{u(t_1,t_2)t_1^{n-1}}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int\limits_{t_1}^{t_1^*} e^{-\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon\tau_1^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\int\limits_{t_1}^{t_1^*} e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1^{n-1}-t_1^{n-1}\right)}{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}}d\tau_1=O(1)\int\limits_{t_1}^{t_1^*} e^{\frac{u(t_1,t_2)\left(\tau_1-t_1\right)(n-1)t_1^{n-2}}{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}}d\tau_1=$$

$$=O(1)\frac{\varepsilon(t_1^*)^{n-1}}{-u(t_1,t_2)(n-1)t_1^{n-2}}\left(1-e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)=O(\varepsilon).$$

В области H_2 справедлива оценка (7).

3) Пусть $(t_1;t_2)\in H_1$, тогда справедлива оценка (7). Так как $u(t_1,t_2)=u(t_0+\alpha,0)$ и $u(t_1,-t_2)=u(t_0+\alpha,0)$, l_m и $\tilde l_m$ симметричны относительно действительной оси (здесь l_m та же l_m, что и в H_2) то имеем

$$\left|\tilde J_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|\le c\left(\varepsilon+e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right).$$

Для первого приближения в области $H_\alpha=H_1\cup H_2\cup H_0$ справедливы оценки

$$\left|v_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|\le c\left(\varepsilon+e^{\frac{u(t_1,t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right),\qquad \left|w_1(t_1,t_2,\varepsilon)\right|\le c\left(\varepsilon+e^{\frac{u(t_1,-t_2)-u(t_0+\alpha,0)}{\varepsilon}}\right),$$

а в области $H\subset H_\alpha$ справедливы оценки

$|v_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le c_1\varepsilon$, $|w_1(t_1,t_2,\varepsilon)|\le c_1\varepsilon$, так как в области H

$u(t_1,t_2)\le u(T_0,0)<u(t_0+\alpha,0)$, $u(t_1,-t_2)\le u(T_0,0)<u(t_0+\alpha,0)$.

Поэтому имеем

$|P(v_1,w_1,t_1,t_2)|\le c_1c_0\varepsilon$; $|Q(v_1,w_1,t_1,t_2)|\le c_1c_0\varepsilon$.

Для остальных последовательных приближений путь интегрирования не меняется соответственно в областях H_0, H_1, H_2. Учитывая (5), (6), в области H имеем

$$|v_2(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_2(\varepsilon)\varepsilon,\ |w_2(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_2(\varepsilon)\varepsilon,\ c_2(\varepsilon) = c_1(1 + c_0\varepsilon);$$

$$|v_3(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_3(\varepsilon)\varepsilon,\ |w_3(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_3(\varepsilon)\varepsilon,\ c_3(\varepsilon) = c_1(1 + c_2(\varepsilon)c_0\varepsilon);$$

$$\ldots$$

$$|v_m(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_m(\varepsilon)\varepsilon,\ |w_m(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c_m(\varepsilon)\varepsilon,\ c_m(\varepsilon) = c_1(1 + c_{m-1}(\varepsilon)c_0\varepsilon),$$

где
$$c_m(\varepsilon) = c_1\left(\sum_{j=0}^{m-2}(c_1c_0\varepsilon)^j + c_1^{m-2}(c_0\gamma\varepsilon)^{m-1}\right) \le \frac{c_1}{1-c_1c_0\varepsilon},\ c_m(\varepsilon) \le c;$$

следовательно, в области H последовательности $\{v_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$, $\{w_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$ равномерно ограничены.

Рассмотрим ряды

$$v_1(t_1,t_2,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{m-1}\left(v_{j+1}(t_1,t_2,\varepsilon) - v_j(t_1,t_2,\varepsilon)\right),$$

$$w_1(t_1,t_2,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{m-1}\left(w(t_1,t_2,\varepsilon)_{j+1} - w_j(t_1,t_2,\varepsilon)\right),$$

они сходятся, так как для каждого члена ряда имеют место оценки:

$$|v_m(t_1,t_2,\varepsilon) - v_{m-1}(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c\varepsilon^m,\ |w_m(t_1,t_2,\varepsilon) - w_{m-1}(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c\varepsilon^m,\ m = 1,2,\ldots$$

В области H последовательность $\{v_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$ имеет предел $v(t_1,t_2,\varepsilon)$, а последовательность $\{w_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$ имеет предел $w(t_1,t_2,\varepsilon)$, причем $\{v_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$, $\{w_m(t_1,t_2,\varepsilon)\}$ представляют собой решения задачи (4), при $n > 1$, и справедливы оценки $|v(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c\varepsilon$, $|w(t_1,t_2,\varepsilon)| \le c\varepsilon$ или

$$\|x(t,\varepsilon) + A^{-1}(t)f(t)\| \le c\varepsilon,\ \text{при } \operatorname{ctg}(\pi/(2n-2)) \le t \le T_0,$$

где $0 < c$, $t_0 < T_0$ – постоянные числа, $t_0 = \operatorname{ctg}(\pi/(2n-2))$, $3 < n \in \mathbf{N}$.

Заключение

Исследование показало, что в задаче Коши для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений затягивание потери устойчивости существенно зависит от собственных значений матрицы коэффициентов линейной части системы. Если комплексно сопряженные собственные значения имеют нули, то затягивание потери устойчивости происходит на конечном отрезке [3–7, 10, 11, 13–16]. А если комплексно сопряженные собственные значения имеют полюсы, то затягивание потери устойчивости происходит на достаточно большом отрезке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. Т. 22 (64). С. 193–204.
2. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.
3. *Шишкова М.А.* Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 3. С. 576–579.
4. *Ривкинд В.Я., Новиков С.П., Петков В.М., Мясников В.П., Федорюк М.В., Кучеренко В.В., Давыдов А.А., Нейштадт А.И., Кружков С.Н., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., Сухов Ю.М., Шухов А.Г., Вайнберг Б.Р., Бахтин В.И., Вайнштейн А.Г., Шапиро Б.З.,*

Кондратьев Б.З., *Олейник О.А.*, *Вишик М.И.*, *Куксин С.Б.*, *Королев А.Г.*, *Ильяшенко Ю.С.* Заседания семинара имени И.Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики // УМН. 1985. Т. 40 № 5(245). С. 295–307.
5. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях I // Диф. урав. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067
6. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях II // Диф. урав. 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
7. *Нейштадт А.И.*, *Сидоренко В.В.* Запаздывание потери устойчивости в системе Циглера / Препринт. М.: Институт прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша, 1995.
8. *Neishtadt A.I. Sidorenko V.V.* Stability loss delay in a Ziegler systemi // J. App. Maths. Mechs. 1997. V. 61. No. 1. P. 15–25.
9. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Archiv 1952. V. 20. N 1. S. 49–56.
10. *Арнольд В.И.*, *Афраймович В. С.*, *Ильяшенко Ю. С.*, *Шильников Л. П.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1986. Т. 5. С. 5–218.
11. *Ломов С.А.*, *Сафонов В.Ф.* Асимптотическое интегрирование линейных задач в области «неустойчивости» // Изв . АН КиргССР . 1983. № 3. С. 14–29.
12. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. 3-е изд., доп. М.: Наука, 1990. 128 с.
13. *Турсунов Д.А.*, *Турсунов Э.А.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач при нарушении условия устойчивости // Естественные и технические науки. 2007. № 3(29). С. 12–16.
14. *Турсунов Д.А.* Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2018. № 54. С. 46–57. DOI: 10.17223/19988621/54/4.
15. *Alybaev K.*; *Murzabaeva A.* Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 1997. No. 1. DOI: 10.1063/1.5049070.
16. *Талиев А.А.* Затягивание потери устойчивости для сингулярно возмущенных уравнений с непрерывными правыми частями // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2014. № 4 (30). С. 36–42.
17. *Лаврентьев М.А.*, *Шабат Б.Ф.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 739 с.

Статья поступила13.02.2019 г.

Tursunov D.A. ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM IN THE CASE OF A CHANGE IN THE STABILITY, WHEN THE EIGENVALUES HAVE POLES *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 16–28

DOI 10.17223/19988621/59/3

Keywords: asymptotic behavior, singularly perturbed Cauchy problem, singular perturbation, small parameter, system of ordinary differential equations with a small parameter at the derivative, asymptotic stability, complex conjugate eigenvalues.

In this paper, the Cauchy problem for a normal system of two linear inhomogeneous ordinary differential equations with a small parameter at the derivative is considered. The coefficient matrix of the linear part of the system has complex conjugate eigenvalues. These eigenvalues have poles in the complex plane. The real parts of the complex conjugate eigenvalues in the considered interval change signs from negative to positive ones. A singularly perturbed Cauchy problem is investigated in the case of instability, i.e., when the asymptotic stability condition is violated.

The aim of the research is to construct the principal term of the asymptotic behavior of the Cauchy problem solution when the asymptotic stability condition is violated and to prove that the solution of the singularly perturbed Cauchy problem is asymptotically close to the solution of the limit system on a sufficiently large interval when the asymptotic stability of the stationary point in the plane of “rapid motions” is violated.

In the study, methods of the stationary phase, saddle point, successive approximations, and L.S. Pontryagin’s idea – the transition to a complex plane – are applied.

An asymptotic estimate is obtained for the solution of a singularly perturbed Cauchy problem in the case where the asymptotic stability of a stationary point in the plane of “rapid motions” is violated. The principal term of the asymptotic expansion of the solution is constructed. It has a positive power with respect to a small parameter. The asymptotic proximity of the solution of the singularly perturbed Cauchy problem to the solution of the limit system on a sufficiently large interval is proved when the asymptotic stability of the stationary point in the plane of “rapid motions” is violated.

The obtained results can find applications in chemical kinetics, in the study of Ziegler's pendulum, etc.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 34D15, 34D05 34E05, 34M60, 34E10, 34A12

TURSUNOV Dilmurat A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Osh State University, Kyrgyzstan). E-mail: tdaosh@gmail.com

REFERENCES

1. Tikhonov A.N. (1948) O zavisimosti resheniy differentsial’nykh uravneniy ot malogo parametra [On the dependence of the solutions of differential equations on a small parameter]. *Mat. Sb.* (*N.S.*). 22(64). pp. 193–204.
2. Tikhonov A.N. (1952) Sistemy differentsial’nykh uravneniy soderzhashchikh malyye parametry pri proizvodnykh [Systems of differential equations containing small parameters at the derivatives]. *Mat. Sb.* (*N.S.*). 31(73). pp. 575–586.
3. Shishkova M.A. (1973) Rassmotreniye odnoy sistemy differentsial’nykh uravneniy s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh [Consideration of a system of differential equations with a small parameter at higher derivatives]. *Dokl. AN SSSR*. 209(3). pp. 576–579.
4. Rivkind V. Ya., Novikov S. P., Petkov V. M., Myasnikov V. P., Fedoryuk M. V., Kucherenko V. V., Davydov A. A., Neishtadt A. I., Kruzhkov S. N., Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D., Sukhov Yu. M., Shukhov A. G., Vainberg B. R., Bakhtin V. I., Vainshtein A. G., Shapiro B. Z., Kondrat'ev V. A., Oleinik O. A., Vishik M. I., Kuksin S.B., Korolev A. G., Ilyashenko Yu. S. (1985) Sessions of the Petrovskii seminar on differential equations and mathemathical problems of physics. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40:5(245). pp. 295–307.
5. Neishtadt A.I. (1987) O zatyagivanii poteri ustoychivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh I [Prolongation of the loss of stability in the case of dynamic bifurcations. I]. *Differ. Uravn*. 23(12). pp. 2060–2067
6. Neishtadt A.I. (1988) O zatyagivanii poteri ustoychivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh II [Prolongation of the loss of stability in the case of dynamic bifurcations. II] *Differ. Uravn*. 24(2). pp. 171–176.
7. *Neishtadt A.I. Sidorenko V.V.* (1995) *Zapazdyvanie poteri ustojchivosti v sisteme Tsiglera* [The delayed of the stability loss in Ziegler's system]. Preprint. Moscow: M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics.
8. Neishtadt A.I. Sidorenko V.V. (1997) Stability loss delay in a Ziegler system. *J. Appl. Math. Mech.* 61(1). pp. 15–25.
9. Ziegler H. (1952) Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. *Ing. Archiv*. 20(1). pp. 49–56.
10. Arnold V.I., Afraimovich V.S., Ilyashenko Yu.S., Shilnikov L.P. (1986) Teoriya bifurkatsiy [Bifurcation theory]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr*. 5. Moscow: VINITI. pp. 5–218.
11. Lomov S.A., Safonov V.F. (1983). Asimptoticheskoe integrirovanie lineynykh zadach v oblasti «neustoychivosti» [Asymptotic integration of linear problems in the region of instability]. *Izv. AN KirgSSR*. 3. pp. 14–29.
12. Arnold V.I. (1990) *Teoriya katastrof* [*The theory of catastrophes*]. Moscow: Nauka. 128 p.

13. Tursunov D.A., Tursunov E.A. (2007) Asimptoticheskoe razlozhenie reshenij singuljarno vozmushhennyh zadach pri narushenii uslovija ustojchivosti [Asymptotic expansion of solutions of singularly perturbed problems when the stability condition is violated]. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki.* 3(29). pp. 12–16.
14. Tursunov D.A. (2018) Asimptotika resheniya zadachi Koshi pri narushenii ustoychivosti tochki pokoya v ploskosti «bystrykh dvizheniy» [Asymptotics of the Cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of “rapid motions”]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 54. pp. 46–57. DOI: 10.17223/19988621/54/4.
15. Alybaev K., Murzabaeva A. (2018) Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy. *AIP Conference Proceedings*. 1997(1). DOI: 10.1063/1.5049070.
16. Taliev A.A. (2014) Zatyagivanie poteri ustoychivosti dlya singulyarno vozmushchennykh uravneniy s nepreryvnymi pravymi chastyami [Stability loss protraction for singularly perturbed equations with continuous right-hand sides]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 4(30). pp. 36–42.
17. Lavrent'ev M.A., Shabat B.F. (1973) Metody teorii funkcii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of a function of a complex variable]. Moscow: Nauka. 739 p.

Received: February 13, 2019