МЕХАНИКА

УДК 551.21.01
DOI 10.17223/19988621/59/4

А.Ю. Албагачиев, В.А. Головешкин, Н.Н. Холин

ДИНАМИКА И РАЗРУШЕНИЕ МАГМАТИЧЕСКИХ СНАРЯДОВ ПРИ ПОДВОДНОМ ИЗВЕРЖЕНИИ ВУЛКАНОВ

Изучено движение и разрушение магматических снарядов в жидкой среде при извержении подводного вулкана. Получены соотношения для времени их движения в толще воды до полного торможения и для соответствующих ему глубин. Определено время достижения критических напряжений, при котором снаряды разрушаются из-за воздействия температурного градиента. Решена модельная задача для определения напряженного состояния магматического снаряда в результате воздействия силы сопротивления среды. Выявлен вклад возможного квазистатического вращения тела в его разрушение.

Ключевые слова: *вулкан*, *подводные извержения*, *магматические снаряды*, *критические напряжения*, *разрушение.*

В процессе извержения подводного вулкана взрывного типа большую роль играют фазовые превращения, происходящие в движущейся магме в условиях быстрой декомпрессии [1]. Сюда можно отнести и образование кристаллической фазы, на базе которой формируются магматические снаряды, представляющие собой раскаленные камни размером от нескольких сантиметров до нескольких метров и часто вылетающие из воды в атмосферу с большими скоростями. Так, например, при извержении в кальдере вулкана Академии наук со дна озера Карымское выстреливались базальтовые снаряды размером 1–1.5 м на расстояния до 5 км [2]. В полной мере проведение натурных и лабораторных исследований этого природного явления не представляется возможным. Поэтому математическое моделирование динамики и разрушения магматических снарядов является уникальным средством исследования на основе механики сплошной среды.

1. Динамика магматического снаряда

Рассматривается динамика движения магматического снаряда от устья жерла вулкана до океанической поверхности. Зная время движения к поверхности, можно оценить критическое напряженное состояние тела, при котором происходит его разрушение из-за неравномерности распределения температуры. Для анализа вертикального движения тела к свободной поверхности океана примем следующую систему уравнений:

$$\frac{mdV}{dt} = -mg - CS\frac{\rho}{2}V^2,$$

$$\frac{dH}{dt} = V, \tag{1.1}$$

где m – масса, V – скорость тела, t – время, g – ускорение свободного падения, C – коэффициент сопротивления среды, S – площадь поперечного сечения тела, ρ – плотность воды, H – расстояние, пройденное телом от точки старта. При $t = 0 : V = V_0$ (V_0 – начальная скорость тела) и $H = 0$. Решение системы уравнений (1.1) запишется в виде

$$V = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} V_0 \sqrt{\dfrac{CS\rho}{2mg}} - \sqrt{\dfrac{CS\rho g}{2m}}t\right)}{\sqrt{\dfrac{CS\rho}{2mg}}}, \tag{1.2}$$

$$H = \frac{2m}{CS\rho}\ln\left[\frac{\cos\left(\operatorname{arctg} V_0 \sqrt{\dfrac{CS\rho}{2mg}} - \sqrt{\dfrac{CS\rho g}{2m}}t\right)}{\cos\left(\operatorname{arctg} V_0 \sqrt{\dfrac{CS\rho}{2mg}}\right)}\right], \tag{1.3}$$

где коэффициент сопротивления среды C определяется из натурных наблюдений за скоростью выхода тела на поверхность океана. В некоторых работах делались попытки определения значения C независимым путем, но использование подобных подходов для конкретных расчетов проблематично.

Пусть в некоторый момент времени $t = t_*$ тело тормозится до нулевой скорости, тогда и из (1.2) следует

$$t_* = \sqrt{\frac{2m}{CS\rho g}} \operatorname{arctg} V_0 \sqrt{\frac{CS\rho}{2mg}} . \tag{1.4}$$

Соответствующая высота H_* – высота торможения до нулевой скорости, определяется из соотношения (1.3):

$$H_* = -\frac{2m}{CS\rho}\ln\left[\cos\left(\operatorname{arctg} V_0 \sqrt{\frac{CS\rho}{2mg}}\right)\right]. \tag{1.5}$$

Если глубина вулкана меньше величины H_*, то снаряд выстреливается в атмосферу. В природе выбросы пирокластических материалов из воды наблюдались для случаев, когда глубина устья жерла вулкана не превышала 400 м. Сравнение с натурными наблюдениями за выходом магматических снарядов позволяет дать оценку значения коэффициента сопротивления воды: $C = 0.17 - 0.25$. По известным значениям скорости вылета снаряда в атмосферу и размера толщи воды из соотношений (1.2) – (1.5) можно определить время его движения в воде и начальную скорость вылета в воду из жерла вулкана.

2. Фрагментация магматического снаряда в результате неоднородного распределения температуры

В процессе движения тела в воде на завершающем этапе его фрагментация может осуществляться за счет неоднородности распределения температурных напряжений. В работе [3] были получены следующие соотношения для радиальных напряжений σ_r и тангенциальных напряжений σ_φ, при известном законе распределения температуры $T(r)$:

$$\sigma_r(r) = \frac{2E}{1-\nu}\frac{\alpha_1}{r^3}\left[\frac{r^3}{R^3}\int_0^R T(z)z^2dz - \int_0^r T(z)z^2dz\right]; \quad (2.1)$$

$$\sigma_\varphi(r) = \frac{E}{1-\nu}\frac{\alpha_1}{r^3}\left[\frac{2r^3}{R^3}\int_0^R T(z)z^2dz - \int_0^r T(z)z^2dz - T(r)r^3\right]. \quad (2.2)$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, α_1 – коэффициент температурного расширения. Для оценки характера распределения температуры по радиусу рассматривается следующая модельная задача. Пусть имеется шар радиуса R с начальной температурой T_0, близкой к температуре плавления базальта (1500 °С), к которому на границе мгновенно «подводится» температура окружающей воды T_w, считающаяся в дальнейшем постоянной и равной нулю. Изменение температуры внутри шара описывается уравнением теплопроводности в сферической системе координат, которое при наличии сферической симметрии имеет решение в виде

$$T = A\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^n\frac{R}{r}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{R^2}\alpha t\right)\right]. \quad (2.3)$$

Здесь $T(r,t)$ – температура (функция радиуса r и времени t), α – коэффициент температуропроводности. Начальное условие: $T(r,0) = T_0$, граничное условие: $T(0,t) = T_w$. Приведенный коэффициент A представляет собой разность температуры на границе и начальной температуры тела (в нашем случае $A < 0$). Качественный анализ соотношений (2.1) и (2.2) показывает, что напряжение имеет положительное значение на поверхности шара и отрицательное значение в его центре. Напряжение σ_r всюду отрицательно и его максимум достигается в центре. Согласно формулам (2.1) и (2.3),

$$\sigma_r(r,t) = \frac{2E}{1-\nu}\alpha_1 A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{R^2}\alpha t\right)\times$$

$$\times\left[(-1)^{n+1}\frac{R^2}{r^2}\cos\left(\frac{n\pi r}{R}\right) + \frac{R^3}{r^3}\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)\right]. \quad (2.4)$$

Если величина $\alpha t/R^2$ порядка единицы, то для оценки возникающих напряжений достаточно ограничиться одним слагаемым:

$$\sigma_r(r,t) = \frac{2E}{1-\nu}\alpha_1 A\frac{2}{\pi^2}\exp\left(-\frac{\pi^2}{R^2}\alpha t\right)\left[-1 - \frac{R^2}{r^2}\cos\left(\frac{\pi r}{R}\right) + \frac{R^3}{r^3}\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)\right].$$

При этом:

$$\sigma_r(0,t)=\frac{2E}{1-\nu}\alpha_1 A\frac{2}{3}\exp\left(-\frac{\pi^2}{R^2}\alpha t\right)\left(\frac{\pi^2-3}{\pi^2}\right). \tag{2.5}$$

При условии, что если величина $\alpha t/R^2$ мала, то тело успевает охладиться на малую глубину и для оценки характера распределения температуры можно использовать решение одномерной задачи теплопроводности [4]:

$$T(x,t)=A\left[1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz\right],$$

$$\sigma_r(0,t)=\frac{2E}{1-\nu}\frac{\alpha_1}{R^3}\left[\int\limits_0^{\infty}T(z,t)R^2dz\right]=\frac{2E}{1-\nu}\frac{\alpha_1}{R}\left[\int\limits_0^{\infty}T(z,t)dz\right]. \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует

$$\sigma_r(0,t)=\frac{2E}{1-\nu}2\alpha_1 A\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\alpha t}}{R}.$$

Известно, что для большинства материалов наибольшую опасность представляют максимальные напряжения сдвига: $\tau_m=\left(\sigma_r-\sigma_\varphi\right)/2$. Согласно статистической теории прочности, зависимость предела прочности от размера тела оценивается формулой

$$\tau_{\text{кр}}=\tau_*\left(\frac{l_*}{l}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{2.7}$$

где $\tau_{\text{кр}}$ – критическое значение напряжения сдвига; τ_*, l_* и m – эмпирические постоянные; l – характерный размер тела или его фрагмента.

Проведем оценки с использованием данных для базальта: коэффициент температурного расширения $\alpha_1=7.9\cdot10^{-6}$ 1/К, коэффициент температуропроводности $\alpha=10^{-6}$ м^2/с, модуль Юнга $E=10^{11}$ Н/м^2, коэффициент Пуассона $\nu=0.25$, предел прочности на сжатие $[\sigma_r]=2\cdot10^8$ Н/м^2. С учетом (2.7) следует, что время, необходимое для достижения критического напряжения $\sigma_r(0,t)=[\sigma_r]$, определяется из соотношения $\sqrt{\alpha t}/R\approx7\cdot10^{-2}$. Таким образом, время достижения критических напряжений $t_{\text{кр}}$, определяется формулой $t_{\text{кр}}=49\cdot10^{-4}R^2/\alpha$. В частности, для тела диаметром 6 см время достижения критических напряжений составит 4.9 с. Таким образом, если размер обломка порядка нескольких сантиметров, то возникающие градиенты температуры могут разрушить его до размеров вулканического пепла. Более крупные снаряды (10 см и выше) разрушаются послойно. Если в качестве размера l в критерии разрушения брать толщину охлажденного слоя , то периодически толщина достигает критического размера и происходит сбрасывание разрушенного слоя.

3. Разрушение магматического снаряда под действием силы сопротивления среды

Определим напряженно-деформированное состояние объекта в плоской упругой постановке. Магматический снаряд моделируется упругим цилиндром радиуса R плотности ρ. Заметим, что количественно результат будет отличаться от сферической модели, но для качественного исследования напряженного состояния тела это различие роли не играет. Предполагается, что скорость V направлена перпендикулярно оси цилиндра. На поверхности действует давление:

$$p = P_0 \cos^2 \varphi \text{, при } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \tag{3.1}$$

$p = 0$ с теневой (нижней) стороны. Угол φ отсчитывается от направления вектора скорости. Величина P_0 представляет собой скоростной напор – произведение квадрата скорости объекта на плотность воды. Поскольку плотность воды на три порядка выше плотности воздуха, то при равных скоростях тело в воде испытывает сопротивление внешней среды на три порядка выше сопротивления атмосферы. При рассмотрении движения магматического снаряда в воде следует учитывать факт быстрого торможения тела по причине квадратичной зависимости величины P_0 от скорости. Именно поэтому сопротивление воды движению тела существенно влияет на его разрушение лишь на начальном этапе. На более поздней стадии движения разрушение движущегося тела в большей степени определяется градиентом температуры. Отметим также, что здесь учитывается также возможное квазистатическое вращение тела при его движении к поверхности.

В рамках упругой постановки имеем

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\frac{4}{3\pi}\frac{P_0}{R}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{4}{3\pi}\frac{P_0}{R}\sin\varphi, \tag{3.2}$$

где σ_{rr}, $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора напряжений.

Связь тензора напряжений с соответствующими составляющими тензора деформаций определяется упругим законом:

$$\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}, \tag{3.3}$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi},$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе, ε_{rr}, $\varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора деформаций, $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$.

Для ε_{rr}, $\varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ имеем

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r},$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right),$$

где u, v – радиальные и азимутальные перемещения.

Граничные условия таковы:

$$\sigma_{rr} = P_0 \cos^2 \varphi \text{, при } |\varphi| \le \pi/2 ;$$

$$\sigma_{rr} = 0 \text{, при } \frac{\pi}{2} \le |\varphi| \le \pi ;$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0 \text{, при } 0 \le |\varphi| \le \pi .$$

Используя соотношения (3.1) – (3.3) для определения перемещений u, v, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, ее решение ищется в виде сумм тригонометрических рядов [3].

Расчеты показывают, что максимальное сдвиговое напряжение τ_m достигается на луче $\varphi = 0$ на расстоянии $r = 0.21R$, при этом $\tau_{\text{кр}} = 0.26P_0$. Величина P_0 зависит от скорости движения тела и с падением скорости вследствие торможения пропорционально квадрату скорости падает и сопротивление среды. Поэтому критические значения максимального напряжения сдвига достигаются на начальной стадии движения. Если тело вращается с умеренной скоростью так, что волновыми эффектами можно пренебречь, то внутри тела образуется полость, в которой действуют максимальные напряжения сдвига.

Проведем качественный анализ перераспределения напряжений на начальном этапе процесса разрушения с учетом возможного вращения объекта. Предположим, что на луче $\varphi = 0$ при $r = R_1 = 0.21R$ имеется круговая полость радиуса R_0. Тензор напряжений $\tilde{\sigma}$ представляется в виде $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 + \Delta\tilde{\sigma}$, где $\tilde{\sigma}_0$ – тензор напряжений, соответствующий решению для сплошного объекта без полости, $\Delta\tilde{\sigma}$ – дополнительная составляющая (вызванная наличием полости). Поскольку размер полости предполагается малым, то в ее окрестности компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}_0$ в системе координат X, Y, где ось X направлена по вектору скорости, соответственно равны

$$\sigma_{xx}^0 = -0.61P_0 ,$$

$$\sigma_{yy}^0 = -0.09P_0 ,$$

$$\sigma_{xy}^0 = 0 ,$$

где σ_{xx}^0, σ_{xy}^0, σ_{yy}^0 – компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}_0$ в системе координат X, Y.

Фактически, поставленная задача сводится к задаче о двуосном растяжении плоскости, ослабленной круговым отверстием радиуса R_0. Отметим, что максимальное сдвиговое напряжение $\tau_{\text{кр}}$ на границе $r = R_0$ достигается при $\varphi = \pm\pi/2$ и равно соответственно, $\tau_{\text{кр}} = 0.48P_0$. Следовательно, $\tau_{\text{кр}}$ существенно возрастает, то есть образование разрушенных зон приводит к еще большей активизации процесса разрушения.

Заключение

Проводится исследование разрушения магматических снарядов в процессе их движения в воде от устья жерла вулкана до поверхности океана. Решается задача о вертикальном движении тела с учетом силы сопротивления среды. Получены выражения для времени движения до полного торможения и соответствующей этому времени глубины. Определяется время достижения критических напряжений $t_{кр}$, приводящих к разрушению тела за счет градиента температуры. Приводится оценка значений $t_{кр}$, позволяющая обосновать минимальный размер магматических снарядов, наблюдаемых в природе. Решается модельная задача об определении напряженного состояния упругого тела в результате действия силы сопротивления среды, а также влияние возможного квазистатического вращения на его разрушение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кедринский В.К., Давыдов М.Н., Чернов А.А., Такаяма К.* Начальная стадия взрывного извержения вулканов: динамика состояния магмы в волнах разгрузки // Докл. РАН. 2006. Т.407. № 2. С.190–193.
2. *Федотов С.А.* Одновременное извержение двух вулканов Камчатки в январе 1996 г. // Земля и Вселенная. 1996. № 3. С.60–65.
3. *Холин Н.Н., Головешкин В.А., Андрущенко В.А.* Математические модели волновых явлений в конденсированных средах и динамика метеороидов. М.: Ленанд, 2015. 216 с.
4. *Нигматулин Р.И.* Механика сплошной среды. М.: Гэотар, 2014. 739 с.

Статья поступила 26.09.2018 г.

Albagachiev A.Yu., Goloveshkin V.A., Kholin N.N. DYNAMICS AND DESTRUCTION OF VOLCANIC BOMBS AT UNDERWATER VOLCANIC ERUPTION *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 59. pp. 29–36

DOI 10.17223/19988621/59/4

Keywords: volcano, underwater eruptions, volcanic bombs, critical stresses, destruction.

In this paper, the motion and destruction of volcanic bombs in a liquid medium at underwater volcanic eruption are studied. The equations determining the time of their motion until full braking is achieved in a water column and the corresponding depths are obtained. Two possible mechanisms of volcanic bomb destruction are examined. The first is based on the influence of the non-homogeneous temperature field on the bomb stress-strain behavior. A test problem of the stress-strain state of heated ball with lower temperature specified on its surface is considered as a model. The problem is solved in an elastic quasi-static formulation. The equations for main characteristics of the strain-stress state are obtained. Using the statistical theory of strength, which determines the dependence of the ultimate stress on the body size, the time to peak stresses at which the bombs are destroyed due to the temperature gradient is determined. The second mechanism is based on the effect of the drag force of the medium. A test problem of the cylinder motion in the direction perpendicular to its axe is considered as a model. The problem is solved within the framework of the classical theory of elasticity on the assumption of plane strain state. Using the quasistatic formulation, the problem for determining stress state of the volcanic bomb resulting from the medium drag force is solved. The most probable areas for fracture initiation are detected. The contribution of possible quasistatic rotation of the bomb to its destruction is studied qualitatively.

ALBAGACHIEV Ali Yusupovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: Albagachiev@Yandex.ru

GOLOVESHKIN Vasiliy Adamovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, MIREA – Russian Technological University, Institute of Applied Mechanics of RAS, Moscow, Russian Federation). E-mail: nikshevolog@ya.ru

KHOLIN Nikolay Nikolaevich (Doctor of Technical Sciences, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation). E-mail: mostu@bk.ru

REFERENCES

1. Kedrinskiy V.K., Davydov M.N., Chernov A.A., Takayama K. (2006) The initial stage of explosive volcanic eruption: the dynamic of magma state in depression waves. *Doklady Physics*. 51(3). pp. 140–143. DOI: 10.1134/S1028335806030116.
2. Fedotov S.A. (1996) Odnovremennoe izverzhenie dvukh vulkanov Kamchatki v yanvare 1996 g. [Simultaneous eruption of two volcanoes in Kamchatka in January, 1996]. *Zemlya i vselennaya*. 3. pp. 60–65.
3. Kholin N.N, Goloveshkin V.A., Andrushchenko V.A. (2015) *Matematicheskie modeli volnovykh yavleniy v kondensirovannykh sredakh i dinamika meteoroidov* [Mathematical models of the wave phenomena in condensed media and meteoroid dynamics]. Moscow: Lenand.
4. Nigmatulin R.I. (2014) *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Moscow: Geotar.

Received: September 26, 2018