# УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/47/1

**В.В. Домбровский, Т.Ю. Пашинская**

## СИНТЕЗ ПРОГНОЗИРУЮЩИХ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ И АДДИТИВНЫМИ ШУМАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Рассматривается задача управления с прогнозирующей моделью по обобщенному критерию для дискретных систем с сериально коррелированными параметрами и мультипликативными и аддитивными шумами. Относительно параметров предполагаются известными только первые и вторые условные моменты распределений. Изменяя весовые матрицы в обобщенном критерии, можно получать различные критерии управления: a) квадратичный критерий, b) критерий mean-variance. В работе синтезированы стратегии управления при наличии явных ограничений на управляющие воздействия.
**Ключевые слова:** управление с прогнозированием; мультипликативные шумы; сериально коррелированные параметры; ограничения.

Моделями со случайными параметрами и / или мультипликативными шумами описывается широкий класс реальных систем. Эффективным подходом к синтезу стратегий управления такими системами при ограничениях на состояния и / или управления является метод управления с прогнозирующей моделью (управление с прогнозированием, прогнозирующее управление) [1]. Управлению с прогнозированием системами со случайными параметрами и / или мультипликативными шумами посвящены работы [2–12].

В работах [2–6] рассматриваются системы с мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений, в присутствии так называемых «мягких» ограничений, т.е. вероятностных ограничений [2–4] или ограничений на математические ожидания состояний и управлений [5–6]. В работе [7] рассматриваются системы с мультипликативными шумами и случайными независимыми одинаково распределенными параметрами.

Прогнозирующее управление системами с зависимыми параметрами рассматривается в работах [8–12]. Метод управления с прогнозированием, основанный на генерации сценариев для систем со случайными параметрами, предложен в работах [8–10]. В [11] решена задача синтеза прогнозирующего управления для класса нелинейных систем, параметры которых изменяются в соответствии с эволюцией марковской цепи. В работе [12] рассматривается задача прогнозирующего управления системами с сериально коррелированными параметрами при условии, что известны только первые и вторые условные моменты распределения параметров.

В данной исследуется задача прогнозирующего управления для дискретных систем со случайными сериально коррелированными параметрами, возмущенных аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений. Относительно параметров предполагаются известными только первые и вторые условные моменты распределений. Синтезированы стратегии управления с учетом явных ограничений на управляющие переменные по обобщенному критерию, представляющему собой линейную комбинацию ожидаемых значений квадратичных форм по состоянию и управлению; квадратичной формы ожидаемых значений состояний системы; линейной части − ожидаемого значения состояния системы. Изменяя весовые матрицы в обобщенном критерии, можно получать различные критерии управления: a) квадратичный критерий, b) критерий mean-variance.

## 1. Постановка задачи

Пусть объект управления описывается уравнением

$$x(k+1)=\left(A_0(k+1)+\sum_{i=1}^{n}A_i(k+1)v_i(k+1)\right)x(k)+ \tag{1}$$

$$+\left(B_0[\eta(k+1),k+1]+\sum_{i=1}^{n}B_i[\eta(k+1),k+1]v_i(k+1)\right)u(k)+D[\eta(k+1),k+1]w(k+1),$$

где $x(k)\in\mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u(k)\in\mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $\eta(k)\in\mathbb{R}^{q}$ – последовательность случайных векторов; $A_i(k)\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, $B_i[\eta(k),k]\in\mathbb{R}^{n_x\times n_u}$, $(i=\overline{0,n})$, $D[\eta(k),k]\in\mathbb{R}^{n_x\times n_w}$; элементы матриц $B_i[\eta(k), k]$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $D[\eta(k), k]$ зависят от $\eta(k)$ линейно.

Аддитивные и мультипликативные шумы $\{v(k)\in\mathbb{R}^{n};\ k = 0, 1, \ldots\}$, $\{w(k)\in\mathbb{R}^{n_w};\ k = 0, 1, \ldots\}$ – векторы белых шумов с нулевыми средними и единичными матрицами ковариаций, причем $M\{w(k)v^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, $M\{\eta(k)v^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, $M\{\eta(k)w^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$ для всех $k$, $s$.

Пусть $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_k)_{k\geq 1}$ – поток σ-алгебр, где каждая из σ-алгебр $\mathfrak{F}_k$ порождается последовательностью $\{\eta(s)\colon s = 0, 1, 2, \ldots, k\}$ и интерпретируется как доступная информация до момента времени $k$ включительно.

Для процесса $\eta(k)$ предполагаются известными условные моменты распределений

$$M\left\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\right\}=\overline{\eta}(k+i),$$

$$M\left\{\eta(k+i)\eta^{T}(k+j)/\mathfrak{F}_k\right\}=\Theta_{ij}(k),\ (k=0,1,2,\ldots),\ (i,j=0,1,2,\ldots,d).$$

В дальнейшем будем использовать обозначения: для любой матрицы $\psi[\eta(k), k]$, зависящей от $\eta(k)$, $\overline{\psi}(k)=M\left\{\psi[\eta(k),k]/\mathfrak{F}_k\right\}$, не указывая зависимость матриц от $\eta(k)$.

На управляющие воздействия накладываются ограничения

$$u_{\min}(k)\leq S(k)u(k)\leq u_{\max}(k), \tag{2}$$

где $S(k)\in\mathbb{R}^{p\times n_u}$; $u_{\min}(k)$, $u_{\max}(k)\in\mathbb{R}^{p}$.

Для управления системой (1) при ограничениях (2) синтезируем закон управления по следующему правилу. На каждом шаге $k$ минимизируем критерий со скользящим горизонтом управления

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}M\{x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}- \tag{3}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}M\{x^{\mathrm{T}}(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}R_2(k+i)M\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}R_3(k+i)M\left\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}+\sum_{i=0}^{m-1}M\left\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\},$$

по последовательности прогнозирующих управлений $u(k/k), \ldots, u(k+m-1/k)$, зависящих от состояния системы $x(k)$ и доступной информации до момента времени $k$ включительно $\mathfrak{F}_k$, где $R_1(k + i) \geq 0$, $R_2(k+i) \geq 0$, $R(k+i) > 0$ – симметричные весовые матрицы соответствующей размерности, $R_3(k+i)$ – весовой вектор соответствующей размерности, $m$ – горизонт прогноза.

В качестве управления в момент времени $k$ берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояний $\mathfrak{F}_k$ и $x(k)$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

Изменяя весовые матрицы $R_1(k + i)$, $R_2(k+i)$ и $R_3(k+i)$ в (3), можно получить различные критерии управления.

**Задача 1.** Полагая $R_2(k+i)=0,\ (i=\overline{1,m}),$ имеем задачу прогнозирующего управления по квадратичному критерию

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}M\left\{x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}- \tag{4}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}R_3(k+i)M\left\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}+\sum_{i=0}^{m-1}M\left\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}.$$

Критерий (4) представляет собой линейную комбинацию квадратичной и линейной частей. При $R_3(k+i)=0$ имеем классический квадратичный критерий.

**Задача 2.** Пусть скалярный выход системы (1)

$$y(k) = L(k)x(k),$$

где $L(k)$ – вектор-строка соответствующей размерности.

Полагая

$$R_1(k+i)=R_2(k+i)=\mu(k+i)L^T(k+i)L(k+i),$$

$$R_3(k+i)=\lambda(k+i)L(k+i),(i=\overline{1,m}),$$

где $\mu(k+i)\geq 0$, $\lambda(k+i)\geq 0$ – скалярные величины, имеем задачу управления по критерию mean-variance:

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}\mu(k+i)M\left\{x^{\mathrm{T}}(k+i)L^{\mathrm{T}}(k+i)L(k+i)x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\lambda(k+i)L(k+i)M\left\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}+\sum_{i=0}^{m-1}M\left\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\},$$

который может быть представлен в виде:

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}\mu(k+i)M\left\{\left(y(k+i)-M\left\{y(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}\right)^2/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\lambda(k+i)M\left\{y(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}+$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}M\left\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}. \tag{5}$$

Параметры $\mu(k+i)$, $\lambda(k+i)$ характеризуют склонность к риску (risk-aversion) и определяют соотношение между ожидаемым выходом системы и вариацией в момент времени $k+i$.

**Замечание 1.** В критерии (5) по сравнению с классическим критерием mean-variance добавлены слагаемые, содержащие квадратичные формы от управлений. В общем случае наличие этих слагаемых гарантирует существование решения задачи управления (см. замечание 3).

## 2. Синтез стратегий управления с прогнозированием

Рассмотрим задачу минимизации критерия (3) по последовательности прогнозирующих управлений $u(k+i/k)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, при ограничениях (2) на траекториях системы (1).

**Теорема.** Оптимальная стратегия прогнозирующего управления системой (1), минимизирующая критерий (3) со скользящим горизонтом $m$ при ограничениях (2), на каждом шаге $k$ определяется уравнением

$$u(k)=\begin{bmatrix}I_{n_u} & 0_{n_u} & \cdots & 0_{n_u}\end{bmatrix}U(k),$$

где $I_{n_u}$ – единичная матрица размерности $n_u$, $0_{n_u}$ – квадратная нулевая матрица размерности $n_u$, $U(k) = [u^{\mathrm{T}}(k/k), \ldots, u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)]^{\mathrm{T}}$ – вектор прогнозирующих управлений, который определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида:

$$Y(k+m/k)=\left[2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)-F(k)\right]U(k)+U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k) \quad (6)$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k)\le \overline{S}(k)U(k)\le U_{\max}(k), \quad (7)$$

где

$$\overline{S}(k)=\mathrm{diag}(S(k),...,S(k+m-1)),$$

$$U_{\min}(k)=[u_{\min}^{\mathrm{T}}(k),...,u_{\min}^{\mathrm{T}}(k+m-1)]^{\mathrm{T}},\ U_{\max}(k)=[u_{\max}^{\mathrm{T}}(k),...,u_{\max}^{\mathrm{T}}(k+m-1)]^{\mathrm{T}},$$

$H(k)$, $G(k)$, $F(k)$ – блочные матрицы вида

$$H(k)=\begin{bmatrix} H_{11}(k) & H_{12}(k) & \cdots & H_{1m}(k) \\ H_{21}(k) & H_{22}(k) & \cdots & H_{2m}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{m1}(k) & H_{m2}(k) & \cdots & H_{mm}(k) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$G(k)=\left[G_1(k) \quad G_2(k) \quad \cdots \quad G_m(k)\right], \quad (9)$$

$$F(k)=\left[F_1(k) \quad F_2(k) \quad \cdots \quad F_m(k)\right], \quad (10)$$

блоки которых равны

$$H_{tt}(k)=R(k+t-1)+\overline{L}_{22}(m-t)-\overline{N}_{22}(m-t), \quad (11)$$

$$H_{tf}(k)=M\left\{B_0^{\mathrm{T}}[\eta(k+t),k+t]\prod_{j=t+1}^{f-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)\left[L_{12}(m-f)-\overline{N}_{12}(m-f)\right]/\mathfrak{F}_k\right\},\ \ f>t, \quad (12)$$

$$H_{tf}(k)=\left(H_{ft}(k)\right)^{\mathrm{T}},\ \ f<t, \quad (13)$$

$$G_t(k)=\prod_{j=1}^{t-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)\left[\overline{L}_{12}(m-t)-\overline{N}_{12}(m-t)\right], \quad (14)$$

$$F_t(k)=\overline{K}_2(m-t), \quad (15)$$

$$\prod_{j=t+1}^{t}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)=1,$$

где

$$Q_1(t)=R_1(k+m-t)+L_{11}(t-1), Q_1(0)=R_1(k+m), \quad (16)$$

$$L_{11}(t)=\sum_{i=0}^{n}A_i^{\mathrm{T}}(k+m-t)Q_1(t)A_i(k+m-t), \quad (17)$$

$$L_{12}(t)=\sum_{i=0}^{n}A_i^{\mathrm{T}}(k+m-t)Q_1(t)B_i[\eta(k+m-t),k+m-t], \quad (18)$$

$$\overline{L}_{12}(t)=M\{L_{12}(t)/\mathfrak{F}_k\}, \quad (19)$$

$$\overline{L}_{22}(t)=\sum_{i=0}^{n}M\left\{B_i^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-t),k+m-t]Q_1(t)B_i[\eta(k+m-t),k+m-t]/\mathfrak{F}_k\right\}, \quad (20)$$

$$Q_2(t)=R_2(k+m-t)+N_{11}(t-1), Q_2(0)=R_2(k+m), \quad (21)$$

$$N_{11}(t)=A_0^{\mathrm{T}}(k+m-t)Q_2(t)A_0(k+m-t), \quad (22)$$

$$\overline{N}_{12}(t)=A_0^{\mathrm{T}}(k+m-t)Q_2(t)M\left\{B_0[\eta(k+m-t),k+m-t]/\mathfrak{F}_k\right\}, \quad (23)$$

$$\overline{N}_{22}(t)=M\left\{B_0^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-t),k+m-t]\}/\mathfrak{F}_k\right\}Q_2(t)M\left\{B_0[\eta(k+m-t),k+m-t]/\mathfrak{F}_k\right\}, \quad (24)$$

$$Q_3(t)=R_3(k+m-t)+K_1(t-1), Q_3(0)=R_3(k+m), \quad (25)$$

$$K_1(t)=Q_3(t)A_0(k+m-t), \quad (26)$$

$$\overline{K}_2(t)=Q_3(t)M\left\{B_0[\eta(k+m-t),k+m-t]/\mathfrak{F}_k\right\}. \quad (27)$$

Оптимальный вектор прогнозирующих управлений без учета ограничений равен

$$U(k)=-H^{-1}(k)\left[G^{\mathrm{T}}(k)x(k)-\frac{1}{2}F^{\mathrm{T}}(k)\right]. \quad (28)$$

При этом оптимальное значение критерия (3) имеет вид:

$$\begin{gathered}J^{opt}(k+m/k)=x^{\mathrm{T}}(k)[L_{11}(m-1)-N_{11}(m-1)+G(k)H^{-1}(k)G^{\mathrm{T}}(k)]x(k)-\\-K_1(m-1)x(k)-x^T(k)G(k)H^{-1}(k)F^{\mathrm{T}}(k)+\frac{1}{4}F(k)H^{-1}(k)F^{\mathrm{T}}(k)+\\+\sum_{t=1}^{m}tr\left\{Q_1(m-t)\overline{W}(m-t)\right\},\end{gathered} \quad (29)$$

где

$$\overline{W}(t)=M\left\{D[\eta(k+m-t),k+m-t]D^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-t),\ k+m-t]/\mathfrak{F}_k\right\}. \quad (30)$$

**Замечание 2.** В силу линейной зависимости матриц $B_i[\eta(k), k]$ ($i$ = 0, 1, …, $n$), $D[\eta(k), k]$ от случайных параметров, условные математические ожидания в выражениях (11)–(15), (30) можно вычислить без затруднений.

**Замечание 3.** (Существование и единственность решения). При условии $R_1(k+i) \geq R_2(k+i)$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}M\{x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}\geq\\ \geq M\{x^{\mathrm{T}}(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}R_2(k+i)M\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}.\end{gathered} \quad (31)$$

Таким образом, при выполнении (31) и с учетом того, что $R(k+i) > 0$, критерий (3) является выпуклым. Поскольку критерий (6) получен посредством преобразования критерия (3), сохраняющего условия выпуклости, условия $R_1(k+i) \geq R_2(k+i)$ и $R(k+i) > 0$ гарантируют, что решение задачи квадратичного программирования с критерием (6) существует и единственно, если ограничения (7) совместны.

***Доказательство.*** Рассмотрим следующие выражения:

$$\begin{gathered}J^{(1)}(k+m/k)=M\{\sum_{i=1}^{m}x^{\mathrm{T}}(k+i/k)R_1(k+i)x(k+i/k)-R_3(k+i)x(k+i/k)+\\+u^T(k+i-1)R(k+i-1)u(k+i-1)/x(k),\mathfrak{F}_k\},\end{gathered} \quad (32)$$

$$J^{(2)}(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}M\left\{x^{\mathrm{T}}(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}R_2(k+i)M\left\{x(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\right\}. \quad (33)$$

Очевидно, что

$$J(k+m/k)=J^{(1)}(k+m/k)-J^{(2)}(k+m/k). \quad (34)$$

Рассмотрим $J^{(1)}(k+m/k)$. Полагая $v_0(k)$ = 1 ($k$ = 0, 1, …), можно представить (1) в виде:

$$\begin{gathered}x(k+1)=\sum_{i=0}^{n}A_i(k+1)v_i(k+1)x(k)+\\+\sum_{i=0}^{n}B_i[\eta(k+1),k+1]v_i(k+1)u(k)+D[\eta(k+1),k+1]w(k+1).\end{gathered} \quad (35)$$

Выражая последовательно все $x(k+i/k)$ через $x(k)$ с использованием уравнения системы (35) и подставляя результат в (32), получим:

$$J^{(1)}(k+m/k)=x^{\mathrm{T}}(k)L_{11}(m-1)x(k)+$$
$$+2x^{\mathrm{T}}(k)\sum_{t=1}^{m}\prod_{j=1}^{t-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)\overline{L}_{12}(m-t)u(k+t-1/k)+ \tag{36}$$
$$+\sum_{t=1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)\left[\overline{L}_{22}(m-t)+R(k+t-1)\right]u(k+t-1/k)+$$
$$+2\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{f=t+1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)M\{B_0^{\mathrm{T}}[\eta(k+t),k+t]\prod_{j=t+1}^{f-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)L_{12}(m-f)/\mathfrak{F}_k\}u(k+f-1/k)+$$
$$+\sum_{t=1}^{m}tr\left\{Q_1(m-t)\overline{W}(m-t)\right\}-K_1(m-1)x(k)-\sum_{t=1}^{m}\overline{K}_2(m-t)u(k+t-1/k),$$

где $Q_1(t)$, $L_{11}(t)$, $L_{12}(t)$, $\overline{L}_{12}(t)$, $\overline{L}_{22}(t)$ определяются уравнениями (16)–(20) и

$$\prod_{j=t+1}^{t}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)=1,$$

$K_1(t)$, $\overline{K}_2(t)$ определяются уравнениями (26)–(27), $\overline{W}(t)$ имеет вид (30).

Рассмотрим выражение (33) для $J^{(2)}(k+m/k)$. Выражая последовательно все $M\{x(k+s)/x(k),\mathfrak{F}_k\}$ через $x(k)$ с использованием уравнения системы (1), получим:

$$M\{x(k+s)/x(k),\mathfrak{F}_k\}=\prod_{j=1}^{s}A_0(k+s-j+1)x(k)+$$
$$+\sum_{t=1}^{s}\prod_{j=1}^{s-t}A_0(k+s-j+1)M\{B_0[\eta(k+t),k+t]/\mathfrak{F}_k\}u(k+t-1/k). \tag{37}$$

Подставляя (37) в (33) и преобразовав выражение, получим

$$J^{(2)}(k+m/k)=x^{\mathrm{T}}(k)N_{11}(m-1)x(k)+ \tag{38}$$
$$+2x^{T}(k)\sum_{t=1}^{m}\prod_{j=1}^{t-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)\overline{N}_{12}(m-t)u(k+t-1/k)+\sum_{t=1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)\overline{N}_{22}(m-t)u(k+t-1/k)+$$
$$+2\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{f=t+1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+t-1/k)M\{B_0^{\mathrm{T}}[\eta(k+t),k+t]/\mathfrak{F}_k\}\prod_{j=t+1}^{f-1}A_0^{\mathrm{T}}(k+j)\overline{N}_{12}(m-f)u(k+f-1/k),$$

где $N_{11}(t)$, $\overline{N}_{12}(t)$, $\overline{N}_{22}(t)$ определяются уравнениями (22)–(24).

С учетом (36), (38) и (34) критерий (3) можно записать в матричном виде:

$$J(k+m/k)=x^{\mathrm{T}}(k)[L_{11}(m-1)-N_{11}(m-1)]x(k)-K_1(m-1)x(k)+ \tag{39}$$
$$+\left[2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)-F(k)\right]U(k)+U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k)+\sum_{t=1}^{m}tr\left\{Q_1(m-t)\overline{W}(m-t)\right\},$$

где матрицы $H(k)$, $G(k)$, $F(k)$ имеют вид (8)–(15), матрицы $L_{11}(t)$, $N_{11}(t)$, $K_1(t)$, $\overline{W}(t)$ определяются уравнениями (17), (22), (26), (30) соответственно.

Нетрудно показать, что оптимальный вектор прогнозирующего управления без учета ограничений имеет вид (28), оптимальное значение критерия (6) при этом определяется в виде (29).

Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (39) при ограничениях (2), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (6) при ограничениях (7). Теорема доказана.

## Заключение

В данной работе предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по обобщенному критерию для дискретных систем с сериально коррелированными параметрами, мультипликативными и аддитивными шумами. Относительно случайных параметров достаточно знать только условные первые и вторые моменты распределений. Изменяя весовые матрицы в обобщенном критерии, можно получать различные критерии управления: а) квадратичный критерий, b) критерий mean-variance. Синтезированы стратегии управления с учетом явных ограничений на управляющие воздействия. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии включает решение последовательности задач квадратичного программирования.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Mayne D.Q. Model predictive control: Recent developments and future promise // Automatica. 2014. V. 50, No. 12. P. 2967–2986.
2. Cannon M., Kouvaritakis B., Wu X. Model predictive control for systems with stochastic multiplicative uncertainty and probabilistic constrains // Automatica. 2009. V. 45, No. 1. P. 167–172.
3. Farina M., Scattolini R. Model predictive control of linear systems with multiplicative unbounded uncertainty and chance constraints // Automatica. 2016. V. 70. P. 258–265.
4. Farina M., Giulioni L., Scattolini R. Stochastic linear Model Predictive Control with chance constraints : a review // Journal of Process Control. 2016. V. 44. P. 53–67.
5. Farina M., Scattolini R. Model predictive control of linear systems with multiplicative unbounded uncertainty and average constraints // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48, No. 23. P. 266–271.
6. Primbs J.A., Sung C.H. Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. V. 54, No. 2. P. 221–230.
7. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативным шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2005. V. 4. P. 84–97.
8. Bemporad A., Di Cairano S. Model-Predictive Control of Discrete Hybrid Stochastic Automata // IEEE Transactions on Automatic Control. 2011. V. 56, No. 6. P. 1307–1321.
9. Calafiore G.C., Fagiano L. Stochastic model predictive control of LPV systems via scenario optimization // Automatica. 2013. V. 49. P. 1861–1866.
10. Patrinos P., Soparasakis P., Sarimveis H., Bemporad A. Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems // Automatica. 2014. V. 50, No. 10. P. 2504–2514.
11. Dombrovskii V., Obyedko T., Samorodova M. Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions // Automatica. 2018. V. 87. P. 61–68.
12. Dombrovskii V., Obyedko T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica. 2015. V. 54, No. 4. P. 325–331.


Поступила в редакцию 29 июня 2018 г.

Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Yu. (2019) MODEL PREDICTIVE CONTROL FOR DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH SERIALLY CORRELATED PARAMETERS AND MULTIPLICATIVE AND ADDITIVE NOISES UNDER CONSTRAINTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 4–11

DOI: 10.17223/19988605/47/1

Let the control object is described by the equation:

$$x(k+1)=\left(A_0(k+1)+\sum_{i=1}^{n}A_i(k+1)v_i(k+1)\right)x(k)+ \tag{1}$$

$$+\left(B_0[\eta(k+1),k+1]+\sum_{i=1}^{n}B_i[\eta(k+1),k+1]v_i(k+1)\right)u(k)+D[\eta(k+1),k+1]w(k+1),$$

where $x(k)\in\mathbb{R}^{n_x}$ is the vector of state; $u(k)\in\mathbb{R}^{n_u}$ is the vector of control; $\eta(k)\in\mathbb{R}^{q}$ is the stochastic vector; $A_i(k)\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, $B_i[\eta(k),k]\in\mathbb{R}^{n_x\times n_u},(i=\overline{0,n})$, $D[\eta(k),k]\in\mathbb{R}^{n_x\times n_w}$. All of the elements of $B_i[\eta(k), k]$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $D[\eta(k), k]$ are assumed to be linear functions of $\eta(k)$; $\{v(k)\in\mathbb{R}^{n}$ ; $k = 0, 1, \ldots\}$, $\{w(k)\in\mathbb{R}^{n_w}$ ; $k = 0, 1, \ldots\}$ are white noise vectors with zero mean and unique covariance matrix, $E\{w(k)v^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, $E\{\eta(k)v^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, $E\{\eta(k)w^{\mathrm{T}}(s)\}$ =0 for all $k$, $s$.

Let $\mathbb{F}=(\mathfrak{F}_k)_{k\geq 1}$ be the complete filtration with σ-field $\mathfrak{F}_k$ generated by the $\{\eta(s)$: $s = 0, 1, 2, \ldots, k\}$ that models the flow of information to time $k$.

We allow the parameters $\eta(k)$ to be serially correlated. Let us assume that we know the first- and second-order conditional moments for the stochastic vector $\eta(k)$ about $\mathfrak{F}_k$ :

$$E\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\}=\bar{\eta}(k+i), \qquad E\left\{\eta(k+i)\eta^{\mathrm{T}}(k+j)/\mathfrak{F}_k\right\}=\Theta_{ij}(k),(k=0,1,2,...),(i,j=0,1,2,...,d).$$

We impose the following inequality constraints on the control inputs (element-wise inequality):

$$u_{\min}(k)\le S(k)u(k)\le u_{\max}(k); S(k)\in\mathbb{R}^{p\times n_u}; u_{\min}(k),u_{\max}(k)\in\mathbb{R}^p. \tag{2}$$

For control of system (1), we synthesize the strategies with a predictive control model. At each step $k$ we minimize the following criterion with a receding horizon

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}E\{x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}-\sum_{i=1}^{m}E\{x^{\mathrm{T}}(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}R_2(k+i)E\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}- \tag{3}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}R_3(k+i)E\{x(k+i)/x(k),\mathfrak{F}_k\}+\sum_{i=0}^{m-1}E\{u^{\mathrm{T}}(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\},$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive controls $u(k/k), \ldots, u(k+m-1/k)$ dependent on the system state $x(k)$ and information up to time $k$ $\mathfrak{F}_k$, under constraints (2); where $R_1(k+i)\ge 0, R_2(k+i)\ge 0, R(k+i)>0$ are given symmetric weight matrices of corresponding dimensions; $R_3(k+i)$ is a given vector of corresponding dimension; $m$ is the prediction horizon.

Different cost functions can be obtained from criterion (3) after setting the coefficients $R_1(k+i)$, $R_2(k+i)$, and $R_3(k+i)$ to some appropriate values.

**Problem 1.** Taking $R_2(k+i)=0,$ we have the MPC problem with quadratic criterion.

**Problem 2.** Let system (1) have a scalar output $y(k)=L(k)x(k)$, where $L(k)$ is a vector of appropriate dimension. Taking

$$R_1(k+i)=R_2(k+i)=\mu(k+i)L^T(k+i)L(k+i),\ \ R_3(k+i)=\lambda(k+i)L(k+i),(i=\overline{1,m}),$$

where $\mu(k+i)\ge 0$, $\lambda(k+i)\ge 0$ are scalar values, we have a mean-variance optimization problem.

Keywords: model predictive control; serially correlated parameters; multiplicative noises; constrains..

*DOMBROVSKII Vladimir Valentinovich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

*PASHINSKAYA Tatiana Yurievna* (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

REFERENCES

1. Mayne, D.Q. (2014) Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*. 50(12). pp. 2967–2986. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.128
2. Cannon, M., Kouvaritakis, B. & Wu, X. (2009) Model predictive control for systems with stochastic multiplicative uncertainty and probabilistic constrains. *Automatica*. 45(1). pp. 167–172. DOI: 10.1016/j.automatica.2008.06.017
3. Farina, M. & Scattolini, R. (2016) Model predictive control of linear systems with multiplicative unbounded uncertainty and chance constraints. *Automatica*. 70. pp. 258–265. DOI: 10.1016/j.automatica.2016.04.008
4. Farina, M., Giulioni, L. & Scattolini, R. (2016) Stochastic linear Model Predictive Control with chance constraints – A review. *Journal of Process Control*. 44. pp. 53–67. DOI: 10.1016/j.jprocont.2016.03.005
5. Farina, M. & Scattolini, R. (2015) Model predictive control of linear systems with multiplicative unbounded uncertainty and average constraints. *IFAC-PapersOnLine*. 48(23). pp. 266–271. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.294
6. Primbs, J.A. & Sung, C.H. (2009) Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise. *IEEE Trans. Automat. Control*. 54(2). pp. 221–230. DOI: 10.1109/ACC.2007.4282237
7. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2005) Predictive control of random-parameter systems with multiplicative noise. Application to investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 66(4). pp. 583–595. DOI: 10.1007/s10513-005-0102-5
8. Bemporad, A. & Di Cairano, S. (2011). Model-Predictive Control of Discrete Hybrid Stochastic Automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 56(6). pp. 1307–1321. DOI: 10.1109/TAC.2010.2084810
9. Calafiore, G.C. & Fagiano, L. (2013) Stochastic model predictive control of LPV systems via scenario optimization. *Automatica*. 49. pp. 1861–1866. DOI: 10.1016/j.automatica.2013.02.060
10. Patrinos, P., Soparasakis, P., Sarimveis, H. & Bemporad, A. (2014) Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems. *Automatica*. 50(10). pp. 2504–2514. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.08.031
11. Dombrovskii, V., Obyedko, T. & Samorodova, M. (2018) Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions. *Automatica*. 87. pp. 61–68. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.09.018
12. Dombrovskii, V. & Obyedko, T. (2015) Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization. *Automatica*. 54. pp. 325–331. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.02.021