

И.А. Корелин, С.В. Поршнев

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВАРИАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ
ВХОДНОГО ПОТОКА НА МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ СМО**

Обсуждаются результаты исследования влияния случайных вариаций интенсивности входного потока на макроскопические характеристики нестационарной системы массового обслуживания (НСМО), в которых были выбраны статистические характеристики стохастической составляющей вариации интенсивности входного потока на основе анализа статистической информации. Построены оценки характеристик НСМО, на вход которой поступает поток заявок, интенсивности которых зависят от детерминированной и случайной составляющих.

Ключевые слова: нестационарные СМО; дискретно-событийное моделирование.

В настоящее время для обеспечения доступа посетителей на объекты проведения массовых мероприятий широко используются контрольно-пропускные системы (КПС) [1]. В связи с тем, что интенсивности потоков посетителей, проходящих через КПС, изменяются во времени, можно рассматривать КПС как нестационарную систему массового обслуживания (НСМО). (Напомним, что НСМО отличаются от стационарных систем массового обслуживания тем, что интенсивности поступления заявок на вход НСМО λ и интенсивности их обслуживания μ изменяются во времени, в том числе и случайно.) Изучение особенностей функционирования данных систем представляет несомненный интерес с практической точки зрения, поскольку полученные при этом результаты могут быть использованы для научного обоснования принимаемых конструкторских решений на этапе проектирования и модернизации нестационарных систем массового обслуживания (НСМО), а также для объективного оценивания особенностей функционирования данных систем при возникновении на объекте проведения массовых мероприятий нештатных ситуаций (террористический акт, пожар и т.д.).

Поскольку аналитическое исследование подобных систем удается провести для малого числа НСМО [2–4], для изучения их количественных характеристик целесообразно использовать подход, основанный на использовании имитационных моделей НСМО, работоспособность которого ранее была продемонстрирована авторами в [5]. В данном подходе используется кусочно-постоянная аппроксимация функции $\lambda = \lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^K (\theta(t - t_k) - \theta(t - t_{k+1})) \cdot \bar{\lambda}_k, \tag{1}$$

где $\theta(t - \xi)$ – функция Хэвисайда:

$$\theta(t - \xi) = \begin{cases} 0, & t < \xi, \\ 1, & t \geq \xi \end{cases} \tag{2}$$

($\bar{\lambda}_k$ – среднее значение функции $\lambda_{\text{exp}}(t)$ на интервале $[t_k, t_{k+1}]$).

При этом полагается, что на каждом из интервалов $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ моделируемую систему можно рассматривать как СМО, на вход которой поступает стационарный поток заявок с интенсивностью λ_k , а ее начальное состояние соответствует конечному состоянию СМО на интервале $[\tau_{k-2}, \tau_{k-1}]$. Однако оказывается, что интенсивность потока заявок на входе НСМО, как показывают результаты анализа информации о динамике процесса входа посетителей на футбольный стадион, собранной во время

проведения футбольных матчей, представляет собой аддитивную смесь детерминированной и случайной составляющих:

$$\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_k^{\text{det}} + \bar{\lambda}_k^{\text{rnd}}, \quad (3)$$

Отметим, что в ранее проведенных исследованиях [5] наличие случайной составляющей интенсивности $\bar{\lambda}_k^{\text{rnd}}$ при расчете макроскопических характеристик НСМО во внимание не принималась.

В статье изложены результаты исследования случайной составляющей интенсивности потока заявок, поступающих на вход НСМО, на оценки ее количественных характеристик.

1. Математическая модель нестационарной системы массового обслуживания

Структурная схема модели нестационарной одноканальной СМО с неограниченной очередью представлена на рис. 1.

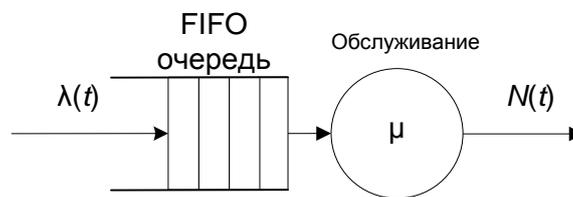


Рис. 1. Схема модели нестационарной СМО
Fig. 1 The block diagram of non-stationary QS

В данной модели предполагается, что на вход СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda(t)$, изменяющейся во времени. Основной характеристикой входного потока событий является мгновенная плотность потока $\lambda(t)$, вычисляемая по формуле

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t} = \frac{dM(t)}{dt}, \quad (4)$$

где $M(t)$ – математическое ожидание числа событий на интервале $[0, t]$.

Для обслуживания очереди посетителей используется политика FCFS (first come – first service, первый вошел – первый вышел). Скорость обслуживания поступающих заявок определяется интенсивностью обслуживания μ заявок/мин. В работе принято допущение, что время на обслуживание одной заявки можно охарактеризовать как случайную величину с плотностью вероятности $p\{\xi\}$:

$$p\{\xi\} = \begin{cases} 0, & \text{при } \xi \leq 1, \\ \frac{2M[\xi]}{9(M[\xi]-1)}(\xi-1), & \text{при } 1 < \xi \leq M[\xi], \\ \frac{2M[\xi]}{9(M[\xi]-10)}(\xi-10), & \text{при } M[\xi] < \xi < 10, \\ 0, & \text{при } \xi \geq 10, \end{cases} \quad (5)$$

где $\xi \in [1, 10]$. В проведенном исследовании мы использовали случайные числа, генерируемые в соответствии с плотностью вероятности (5) и $M[\xi] = 4$ с. При этом средняя интенсивность обслуживания $\bar{\mu}$ составила 15 заявок/мин.

Анализ статистической информации выполнялся с использованием данных, собранных 05.05.2013 г. во время проведения футбольного матча между футбольными клубами «Крылья советов» и «Динамо» на стадионе «Металлург», г. Самара. Типичная зависимость $\lambda_{\text{exp}}(t)$, полученная во время проведения футбольного матча, приведена на рис. 2 [1].

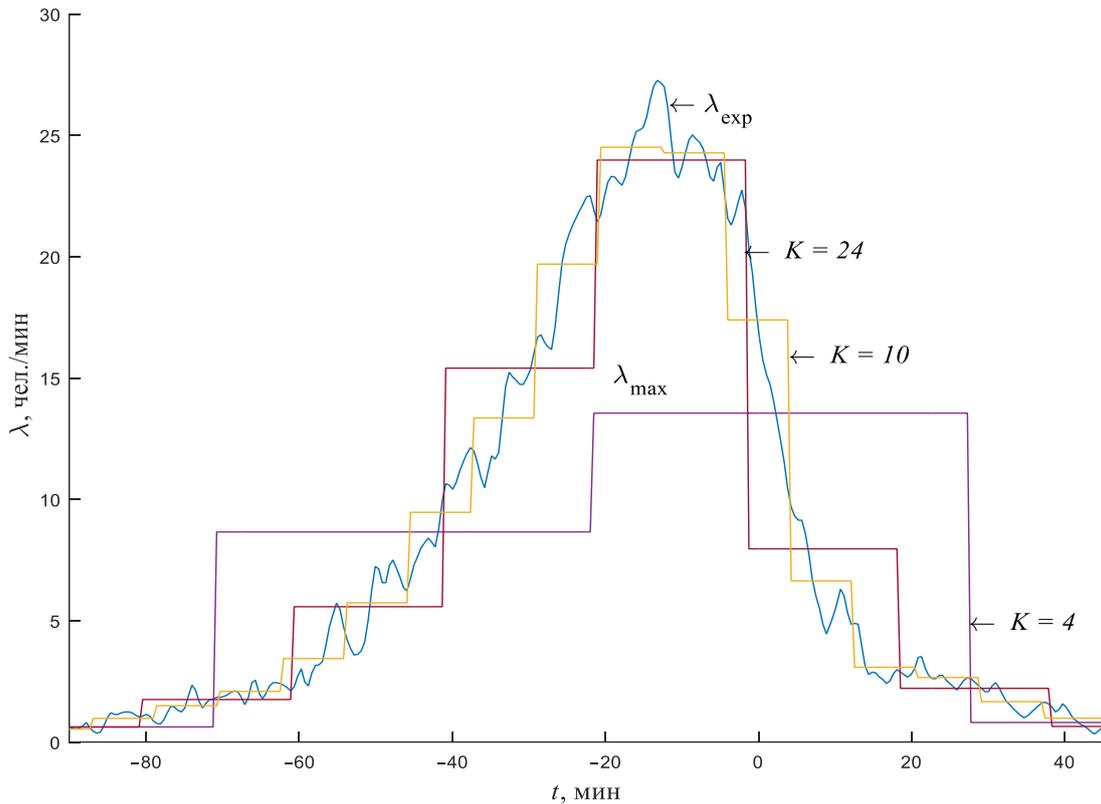


Рис. 2. Типичная зависимость $\lambda(t)$ нестационарной СМО (начало матча $t = 0$)
 Fig. 2. The dependences $\lambda(t)$ of non-stationary QS (the beginning of the match $t = 0$)

Доступ на стадион «Металлург» был открыт за 1,5 часа до начала футбольного матча. После открытия турникетов в течение времени $T_1 \approx 70$ мин интенсивность поступления заявок нарастала от 0 чел./мин до $\lambda_{\max} = 28$ чел./мин. Примерно за 15 мин до начала матча интенсивность поступления заявок начала уменьшаться. В последующие 50 мин ($T_2 \approx 50$) число заявок уменьшилось от $\lambda_{\max} = 28$ чел./мин до 0 чел./мин. Общее число посетителей N , вошедших через одно контрольно-пропускное устройство (турникет) на стадион «Металлург»,

$$N = \int_{-80}^{40} \lambda(t) dt, \quad (6)$$

составило 1 400 чел.

Из рис. 2 видно, что зависимость $\lambda_{\text{exp}}(t)$ представляет собой аддитивную смесь детерминированной и случайной составляющих:

$$\lambda_{\text{exp}}(t) = \lambda_{\text{det}}(t) + \lambda_{\text{rnd}}(t). \quad (7)$$

При поиске удачной аппроксимации детерминированной составляющей обнаружено, что зависимость $\lambda(t)$ имеет ярко выраженный максимум в точке $t = T_0$. В этой связи для выделения из экспериментальной зависимости $\lambda_{\text{exp}}(t)$ случайной составляющей $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ на интервалах $[T_1; T_0]$, $[T_0; T_2]$ была использована кусочно-полиномиальная аппроксимация зависимости $\lambda_{\text{apр}}(t)$ (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что в первом приближении остатки кусочно-полиномиальной аппроксимации (зависимость $\lambda_{\text{rnd}}(t)$) можно рассматривать как случайные (точнее, «квазислучайные») числа, для оценки плотности распределения и функции распределения которых можно использовать аппроксимацию Розенבלата–Парзена [7, 8] с ядерной функцией типа Коши, как обеспечивающую наименьшее значение информационного функционала (рис. 4).

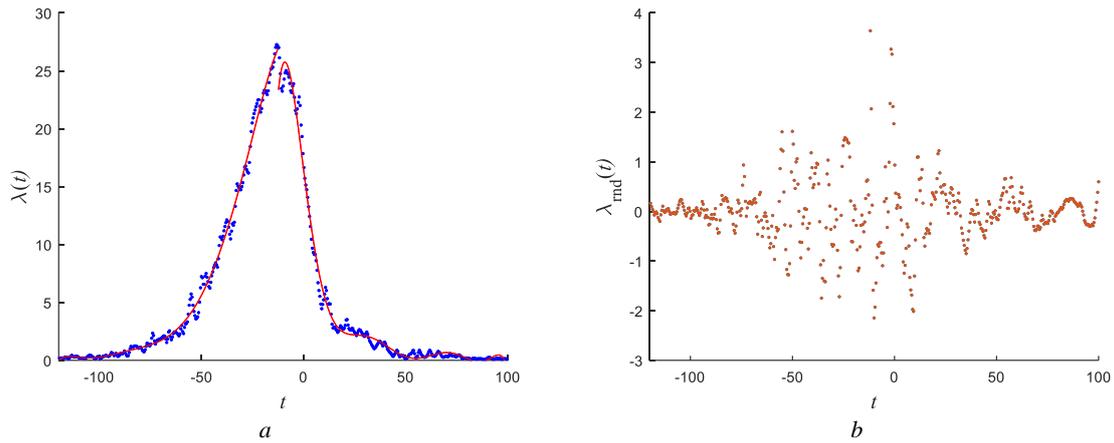


Рис. 3. Визуализация кривых $\lambda_{\text{appr}}(t)$, аппроксимирующих зависимость $\lambda_{\text{exp}}(t)$ (a).

Остатки кусочно-полиномиальной аппроксимации входной интенсивности $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ (b)

Fig. 3. Visualization of curve $\lambda_{\text{appr}}(t)$ approximating the dependence $\lambda_{\text{exp}}(t)$ (a).

Residuals $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ of piecewise polynomial approximation of input rate (b)

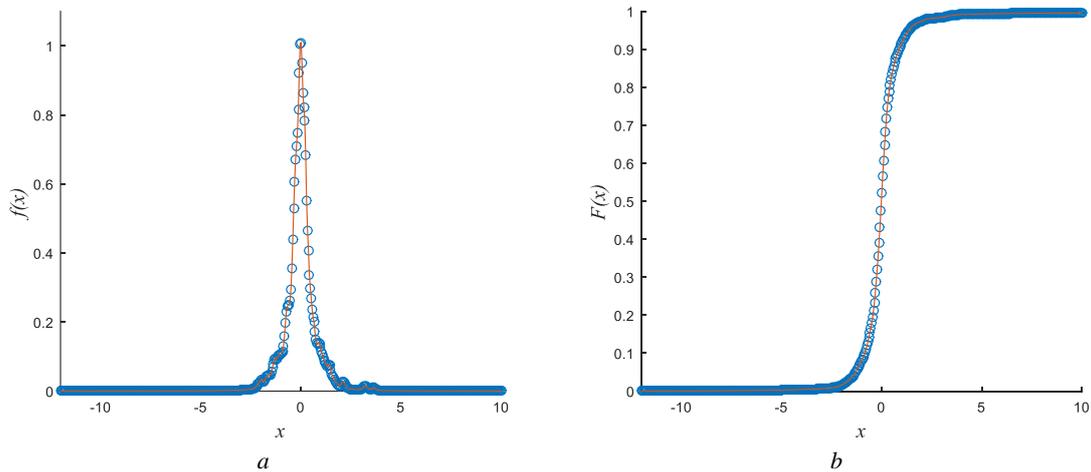


Рис. 4. Аппроксимация Розенблатта–Парзена плотности распределения случайной составляющей $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ (a).

Функция распределения случайной составляющей $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ (b)

Fig. 4. Rosenblatt–Parzen approximation of the probability density function of the input rate random component $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ (a).

The cumulative distribution function of input rate random component $\lambda_{\text{rnd}}(t)$ (b)

В предыдущих исследованиях [1] авторы использовали подход по эмулированию входного потока на основании статистической информации с матчей, проводимых на стадионах, полностью повторяя статистические свойства входного потока. Подход, при всей его эффективности, однако, также имеет известный недостаток, связанный с тем, что параметры модели, вообще говоря, оказываются зависящими от имеющейся статистической информации, собранной во время проведения футбольных матчей на стадионах. В проведенном исследовании полученная оценка функции распределения была использована для генерации случайной составляющей интенсивности потока заявок, поступающего на вход изучаемой НСМО. Детерминированная составляющая интенсивности потока заявок на вход НСМО выбрана синтетической, чтобы не привязываться к конкретному событию, и описывалась функцией

$$\lambda_{\text{det}}(t) = \sum_{k=0}^K (\theta(t-t_k) - \theta(t-t_{k+1})) \cdot \bar{\lambda}_k^{\text{det}}, \quad (8)$$

где $\theta(t + \xi)$ – функция Хэвисайда по формуле (2) и $\bar{\lambda}_k^{\text{det}}$ – среднее значение функции $\lambda_{\text{exp}}(t)$ на интервале $[t_k, t_{k+1}]$.

Число интервалов K кусочно-постоянной аппроксимации зависимости $\lambda_{\text{det}}(t)$ на основании предыдущих исследований [6] выбиралось равным 1 520.

2. Методика проведения вычислительных экспериментов

В проведенных вычислительных экспериментах были использованы следующие виды зависимостей интенсивности входного потока заявок от времени:

1) функция $\lambda_{\text{det}}(t)$, значения которой вычислялись в соответствии с (5) (на рис. 5 обозначена сплошной линией);

2) сумма значений функции $\lambda_{\text{det}}(t)$, вычисляемых в соответствии с (5), и случайной последовательности, сгенерированной в соответствие функцией распределения, оцененной по экспериментальным данным (на рис. 5 обозначена кружочками);

3) сумма значений функции $\lambda_{\text{det}}(t)$, вычисляемых в соответствии с (5), и случайной последовательности, генерируемой в соответствии с функцией распределения, оцененной по экспериментальным данным, на каждом из этапов статистического моделирования (зависимость $\lambda_{\text{det}}(t)$, использованная на первом шаге метода Монте-Карло, на рис. 5 обозначена кружочками, на других шагах алгоритма случайная составляющая изменяется).

Примеры зависимостей входной интенсивности потока заявок видов 2, 3 приведены на рис. 5.

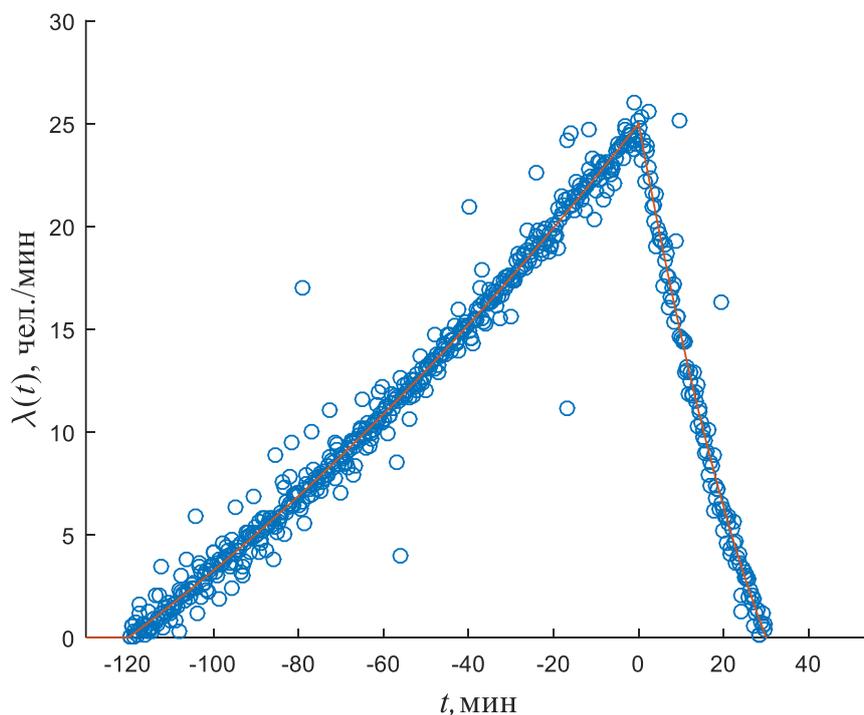


Рис. 5. Зависимости $\lambda(t)$ нестационарной СМО (начало матча $t = 0$)

Fig. 5. $\lambda(t)$ are dependences of non-stationary QS (the beginning of the match $t = 0$)

Блок-схема алгоритма, использовавшегося при проведении статистического моделирования, представлена на рис. 6. (Здесь обозначение $\text{exprnd}(\lambda_i)$ означает генерацию реализации экспоненциально распределенных величин с параметром λ_i).

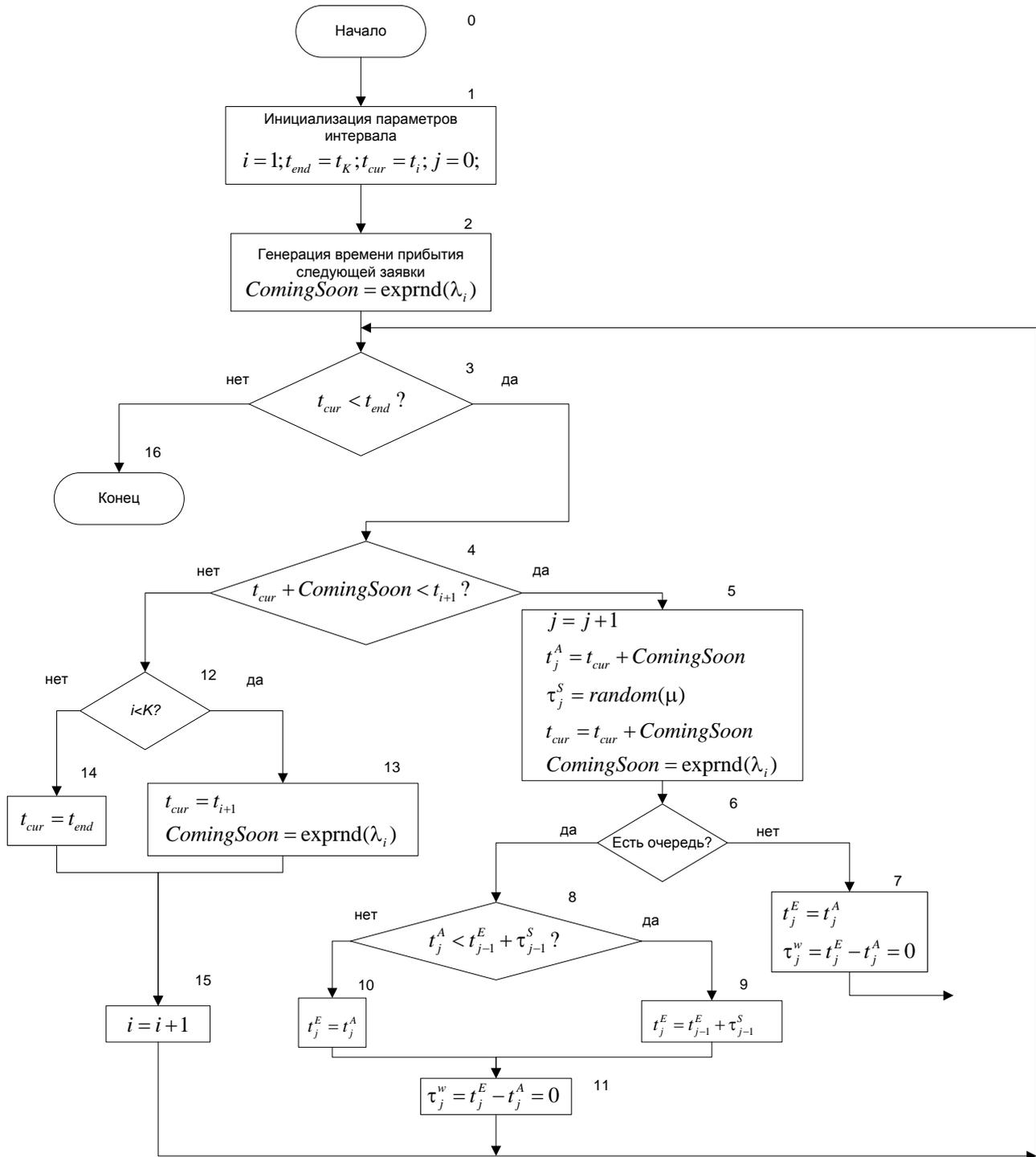


Рис. 6. Блок-схема методики проведения статистического моделирования НСМО

Fig. 6. A block diagram of the methodology for simulation of NQS

Из рис. 6 видно, что на каждом из интервалов кусочно-постоянной аппроксимации входной интенсивности в течение интервала генерировались времена прибытия заявки t^A с экспоненциальным законом распределения и интенсивностью, равной усредненному значению интенсивности прибытия. Интервал времени обслуживания τ^S генерировался в соответствии с (2). Для каждой заявки вычислялось время ее поступления в очередь t^E , для этого поочередно просматривались все заявки, находившиеся на данном временном интервале в очереди:

$$t_i^E = \begin{cases} t_i^A, & t_i^A \geq t_{i-1}^E + \tau_{i-1}^S, \\ t_i^A + (t_{i-1}^E + \tau_{i-1}^S - t_i^A), & t_i^A < t_{i-1}^E + \tau_{i-1}^S. \end{cases} \quad (9)$$

Отметим, что, как очевидно, для первой заявки $t_1^E = t_1^A$.

Для количественного описания особенностей работы данных НСМО, следуя [6], были использованы: зависимость длины очереди посетителей (в терминах СМО – длины очереди заявок) от времени

$$L = L(t_k) = |Q|, \text{ где } Q = \{q_n : t_n^A < t_k \cap t_n^E > t_k\}, \quad (10)$$

среднее время ожидания посетителя (в терминах СМО – заявки) в очереди от времени

$$\tau^w = \tau^w(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^{|Q|} (t_i^E - t_i^A)}{|Q|}, \text{ где } Q = \{q_n : t_n^E \leq t_k \cap t_n^E > t_{k-1}\}, \quad (11)$$

а также зависимость числа вошедших на стадион посетителей от времени (в терминах СМО – число обслуженных заявок)

$$N_{out} = N_{out}(t_k) = |Q|, \text{ где } Q = \{q_n : t_n^E < t_k\}, \quad (12)$$

где $t_k = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{K}(k-1)$, $k = \overline{1, K}$, K – количество интервалов кусочно-линейной аппроксимации $\lambda(t)$.

3. Анализ экспериментальных результатов

Примеры зависимостей выбранных количественных характеристик представлены на рис. 7.

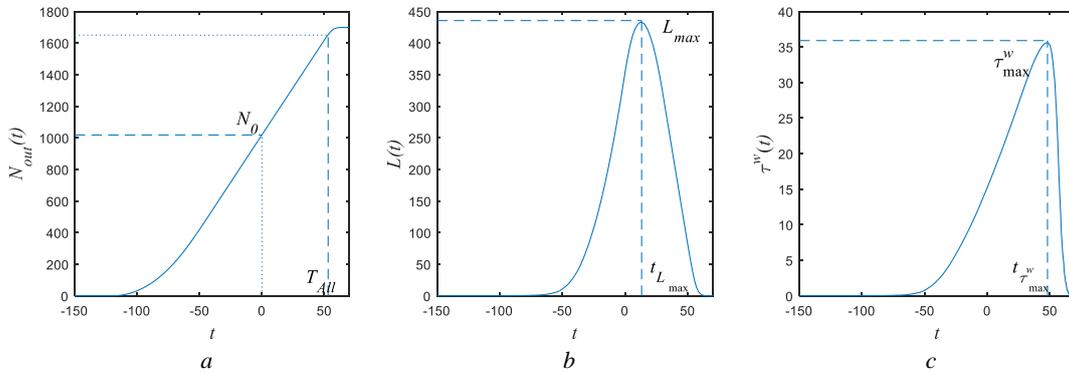


Рис. 7. Зависимости: а – числа вошедших от времени $N_{out}(t)$; б – длины очереди от времени $L(t)$; в – времени ожидания обслуживания от времени $\tau^w(t)$

Fig. 7. Dependencies: а – the numbers of entered from time $N_{out}(t)$; б – the length of the queue from the time $L(t)$; в – waiting time for maintenance from time $\tau^w(t)$

Из рис. 7 видно, что для каждой из зависимостей можно указать характерные точки, представляющие интерес для инженеров, проектировщиков, служб безопасности объектов проведения массовых мероприятий (макроскопические характеристики КПС).

1. Максимальное значение величины x_{max} :

$$x_{max} = \max(x), \text{ где } x \in \{L, \tau^w\}. \quad (13)$$

2. Значение аргумента $t_{x_{max}}$, в котором $x(t)$ достигает максимального значения:

$$t_{x_{max}} = \arg \max_t (x(t)), \text{ где } x \in \{L, \tau^w\}. \quad (14)$$

3. Число посетителей, вошедших к моменту начала матча:

$$N_0 = |Q|, \text{ где } Q = \{q_n : t_n^E < t = 0\}. \quad (15)$$

4. Время, необходимое для обслуживания всех посетителей:

$$T_{All} = \{t : N(t) \geq 0,97 \cdot N_{\max}\}, \text{ где } N_{\max} = \max(N(t)). \quad (16)$$

Совокупность значений выбранных макроскопических показателей, вычисляемых на каждом шаге метода Монте-Карло, представляет собой некоторые случайные последовательности, для оценки плотности распределения которых была использована аппроксимация Розенблатта–Парзена [7, 8]. Оценки квантилей изученных случайных последовательностей представлены в таблице.

Оценки квантилей распределений количественных показателей НСМО

Параметр	Метод вычисления $\lambda(t)$ (см. Методика проведения вычислительных экспериментов)								
	1			2			3		
Доверительная вероятность	0,05	0,5	0,95	0,05	0,5	0,95	0,05	0,5	0,95
L_{\max}	371,3	439,4	512,2	369,4	437	508,9	372,7	438,9	502,1
$t_{L_{\max}}$	8,8	12,8	16,9	8,3	12,1	16,2	8,2	12,4	16,5
τ_{\max}^{iv}	31	36,6	42,5	30,6	36,4	42	31	36,6	41,9
$t_{\tau_{\max}^{iv}}$	42	49,5	57,5	41,3	48,7	56,1	42	49,4	56,8
N_0	979	1 018,6	1 057,5	981,3	1 019,8	1 058,8	979,6	1 018,3	1 059,2
T_{All}	46,8	52,8	59,4	46,1	52,2	58,4	46,8	52,7	58,7

Из таблицы видно, что значения соответствующих квантилей распределений выбранных макроскопических характеристики НСМО оказались отличными друг от друга. В этой связи в соответствии с критерием типа Колмогорова–Смирнова была проведена проверка статистической значимости отличий данных распределений друг от друга. Оказалось, что отличия изученных распределений макроскопических характеристики НСМО на уровне доверительной вероятности $p = 10^{-4}$ для изученных диапазонов значений интенсивностей входного потока заявок статистически незначимы. Следовательно, при изучении НСМО в режиме, когда на ее вход поступает поток заявок, детерминированная составляющая которого вычисляется в соответствии с (5), а случайная составляющая находится в диапазоне интенсивностей, аналогичном диапазону изменения данной величины во время проведения футбольных матчей, оказывается достаточным учитывать только детерминированную составляющую $\lambda(t)$, что позволяет существенно сократить время исследования.

Заключение

Исследованы макроскопические характеристики НСМО при кусочно-полиномиальном изменении детерминированной составляющей входной интенсивности в диапазоне [0, 25] чел./мин.

Получены оценки макроскопических характеристик НСМО, на вход которой поступает поток заявок, интенсивность которых представляет собой смесь детерминированной и случайной составляющих.

Обнаружено, что случайная составляющая интенсивности поступления заявок, выявленная в работе, не оказывает существенного влияния на оценки макроскопических характеристик изученной НСМО. В этой связи при оценке макроскопических характеристик контрольно-пропускных систем, используемых на футбольных стадионах, достаточно использовать детерминированную зависимость $\lambda(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поршнев С.В., Якоб Д.А. Исследование особенностей функционирования информационных контрольно-пропускных систем объектов проведения массовых мероприятий. Екатеринбург : Ин-т экономики УрО РАН, 2014. 216 с.
2. Clarke A.B. A waiting line process of Markov type // Ann. Math. Statist. 1956. No. 27. P. 452–459.
3. Koopman B.O. Air-terminal queues under time-dependent conditions // Operation Research. 1972. № 20. P. 1089–1114.

4. Luchak G. The solution of the single channel queueing equations characterized by a time-dependent arrival rate and a general class of holding times // *Operation Research*. 1956. No. 4. P. 711–732.
5. Поршневу С.В., Корелин И.А. Исследование особенностей нестационарной одноканальной системы массового обслуживания в разрезе числа обслуженных заявок // *Cloud of Science*. 2017. Т. 4, № 3. С. 366–375.
6. Korelin I.A., Porshnev S.V. Rationale choosing interval of a piecewise-constant approximation of input rate of non-stationary queue system // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018. № 944. 012060.
7. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function // *Ann. Math. Statist.* 1956. No. 27. P. 832–837.
8. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode // *Ann. Math. Statist.* 1962. No. 33. 1065–1076.

Поступила в редакцию 22 ноября 2018 г.

Korelin, I.A., Porshnev S.V. (2019) THE STUDY OF INFLUENCE OF RANDOM VARIATIONS OF INPUT RATE TO MACROSCOPIC INDICATORS OF A NON-STATIONARY QUEUEING SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 57–65

DOI: 10.17223/19988605/47/7

Access control systems (ACS) are widely used to provide safe and comfortable passing for public events. The input rate of the flows of visitors passing through the ACS varies in the time. That is why ACS can be considered as non-stationary queueing system (NQS). The study of the features of the functioning of such systems is of great interest from a practical point of view. The obtained results could be used as a scientific justification for the design decisions that are accepted at the design and modernization stage of NQS. In addition, an objective assessment of the features of the functioning of these systems in moment of incident on an object for carrying out mass events (terrorist act, fire, etc.) need to be done.

In simulation the input rate is similar to the function approximating the dependence $\lambda = \lambda(t)$, fixed during the football matches. The results of simulation NQS, which receives on the input flow of requests with the rate $\lambda = \lambda(t)$, changing in time are some of NQS characteristics. The dependence of the queue length, the waiting time in service queue and the number of visitors entered from time were calculated. The averaged dependencies of the NQS characteristics on time should be considered as functions. These functions have significant values that can be useful for engineers, designers and also appropriate security services: the number of entered visitors at the beginning of the event, the maximum length of the queue of visitors, the maximum waiting time in the queue and the corresponding time points. We propose to call them macroscopic characteristics of NQS. Taking into account that the dependencies recorded during the football matches contain both deterministic and random components, a priori, we can expect that the random part will influence the macroscopic characteristics listed above.

The results of the conducted statistical modeling showed that in the studied range of variations in the input rate of requests, this component does not have a significant effect on the selected macroscopic indicators of NQS.

Keywords: non-stationary queueing system (NQS); discrete-event modeling.

KORELIN Ivan Andreevich (Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation).

E-mail: korelin.ivan@gmail.com

PORSHNEV Sergey Vladimirovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation).

E-mail: sergey_porshnev@mail.ru

REFERENCES

1. Porshnev, S.V. & Jakob, D.A. (2014) *Issledovanie osobennostey funktsionirovaniya informatsionnykh kontrol'no-propusknykh sistem ob"ektov provedeniya massovykh meropriyatiy* [The study of the functioning of information systems checkpoints objects of mass event]. Ekaterinburg: Ural Branch RAS.
2. Clarke, A.B. (1956) A waiting line process of Markov type. *Annals of Mathematical Statistics*. 27. pp. 452–459. DOI: 10.1214/aoms/1177728268
3. Koopman, B.O. (1972) Air-terminal queues under time-dependent conditions. *Operation Research*. 20. pp. 1089–1114. DOI: 10.1287/opre.20.6.1089
4. Luchak, G. (1956) The solution of the single channel queueing equations characterized by a time-dependent arrival rate and a general class of holding times. *Operation Research*. 4. pp. 711–732.
5. Porshnev, S. & Korelin, I. (2017) Non-stationary single-channel queueing system features research in context of number of served queries. *Cloud of Science*. 4(3). pp. 366–375. (In Russian).
6. Korelin, I.A. & Porshnev, S.V. (2018) Rationale choosing interval of a piecewise-constant approximation of input rate of non-stationary queue system. *Journal of Physics: Conference Series*. 944(1).
7. Rosenblatt, M. (1956) Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics*. 27. pp. 832–837.
8. Parzen, E. (1962) On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics*. 33. pp. 1065–1076. DOI: 10.1214/aoms/1177704472.