ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

УДК 519.21
DOI: 10.17223/19988605/47/9

Е.П. Полин, С.П. Моисеева, С.В. Рожкова

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ M|M|∞ В МАРКОВСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается неоднородная система массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, функционирующая в условиях изменяющейся внешней среды. На вход СМО поступает пуассоновский поток, интенсивность потока и дисциплина обслуживания поступающей заявки определяются состоянием внешней среды и имеют экспоненциальное распределение с соответствующими параметрами, не меняющими свои значения до окончания обслуживания. Решается задача исследования многомерного случайного процесса – числа заявок, обслуживаемых с разной интенсивностью в системе, методом асимптотического анализа. Доказано, что распределение вероятностей рассматриваемого процесса при условии эквивалентно растущего времени обслуживания является многомерным гауссовским.

Ключевые слова: бесконечнолинейная система массового обслуживания; случайная среда; метод асимптотического анализа.

Большинство современных технических систем, в том числе систем передачи информации и телекоммуникационных систем, функционирует в рамках изменяющейся внешней среды, причем ее изменения носят как регулярный, так и случайный характер. Влияние этих факторов на систему представляет значительный интерес в условиях быстро развивающихся технических возможностей современного мира. Поэтому исследование систем, работающих в случайной среде, является частью глобальной задачи исследования устойчивости систем к внешним воздействиям и представляется актуальным и интересным как в теоретическом, так и в прикладном плане.

Классические модели СМО, активно исследовавшиеся в середине прошлого столетия, не учитывали возможностей изменения параметров систем во времени, что существенно ограничивало область их применения. Со временем появлялись качественно новые системы управления и связи, возникала необходимость в более адекватном описании случайных процессов, имеющих место в этих системах.

Возникновение в последние несколько десятилетий новых практических задач, связанных с появлением систем гибкого автоматического производства, в которых возможны отключение, переподключение и переналадка оборудования, систем управления запасами и экономических систем, информационно-вычислительных сетей и сетей связи, дало существенный толчок к развитию исследований систем с изменяемыми параметрами [1, 2].

Такие системы в теории массового обслуживания называются системами массового обслуживания, функционирующими в случайной среде [3]. Эти СМО более адекватно по сравнению с классическими системами отображают реальные процессы, связанные с изменяющейся во времени внешней случайной средой и реакцией самой системы на такие изменения.

Одной из первых работ, посвященных исследованию систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде, была работа [4], в которой рассмотрена однолинейная система в предположении, что среда может находиться только в двух состояниях. Эта система была исследована также в работе [5], а затем обобщена на случай произвольного конечного числа состояний внешней среды [6]. Также имеется много работ, посвященных исследованию бесконечнолинейных систем как в марковских [7–9], так и полумарковских [10–12] случайных средах. В разных работах рассмотрены различные варианты реакции заявок на переход среды в новое состояние. Например, в работе [13] представлен случай, при котором в момент смены состояния среды все заявки немедленно покидают систему. В работе [14] исследован вариант, при котором в момент перехода среды в новое состояние заявки, имеющиеся в системе, переходят на соответствующий новый режим обслуживания. В этой же работе рассматривается случай, предполагающий, что режим обслуживания заявок не меняется до тех пор, пока они не покинут систему.

Исследование систем с непуассоновскими входящими потоками [15] требует применения специальных методов. Например, в работе [16] получены числовые характеристики изучаемого процесса с помощью метода моментов. Для более детального исследования применяются асимптотические методы [17] при различных условиях.

В настоящей работе рассматривается неоднородная система массового обслуживания M|M|∞. Интенсивность входящего потока определяется состоянием случайной среды заявок. Отличительной особенностью является зависимость параметров обслуживания от состояния среды. Рассматривается случай, когда эти параметры не меняют свои значения до окончания обслуживания. Таким образом, приборы в рассматриваемой системе являются неоднородными (гетерогенными) [18], поэтому такую СМО будем называть неоднородной СМО, функционирующей в случайной среде.

1. Постановка задачи

Рассматривается неоднородная система массового обслуживания M|M|∞ с неограниченным числом приборов, функционирующая в случайной среде, имеющей конечное множество состояний $s = 1, ..., S$. Процесс изменения состояний внешней среды является цепью Маркова $s(t)$, которая задается матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = [q_{ik}]$, $i, k = 1, ..., S$. Дисциплина обслуживания определяется следующим образом: если заявка поступает с интенсивностью λ_n, $n = 1, ..., S$, то она обслуживается случайное время, распределенное по экспоненциальному закону $F_n(x) = 1 - e^{-\mu_n x}$, которое не меняется при изменении состояния среды. Таким образом, в системе одновременно обслуживаются заявки с разными параметрами обслуживания (рис. 1).

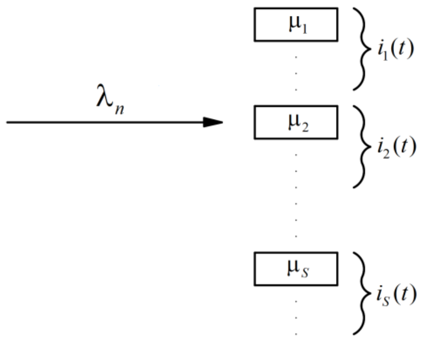

Рис. 1. Система массового обслуживания M|M|∞ в случайной среде
Fig.1. Queuing system M|M|∞ in a random environment

Обозначим $i_l(t)$ – число заявок, обслуживаемых с интенсивностью μ_l. Ставится задача исследования многомерного случайного процесса $\mathbf{i}(t) = [i_1(t), i_2(t), ..., i_S(t)]$.

Так как $\{i_1(t), i_2(t), ..., i_S(t)\}$ – немарковский случайный процесс, то будем рассматривать многомерную цепь Маркова $\{i_1(t), i_2(t), ..., i_S(t), s(t)\}$.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим $P(i_1, i_2, ..., i_S, n, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, ..., i_S(t) = i_S, s(t) = n\}$, $\mathbf{e}_1 = [1, 0, ..., 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, ..., 0]$, ..., $\mathbf{e}_n = [0, 0, ..., 1]$, тогда для стационарного распределения вероятностей $P(\mathbf{i}, n)$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$-\left(\lambda_n + \sum_{l=1}^{S} \mu_l i_l\right) P(\mathbf{i}, n) + \lambda_n P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_n, n) + \sum_{l=1}^{S} \mu_l (i_l + 1) P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_l, n) + \sum_{\nu} q_{\nu n} P(\mathbf{i}, \nu) = 0, \ \forall n = \overline{1, S}.$$

Тогда для частичных характеристических функций вида

$$H(u_1,u_2,...,u_S,n)=H(\mathbf{u},n)=\sum_{i_1}e^{ju_1i_1}\sum_{i_2}e^{ju_2i_2}...\sum_{i_S}e^{ju_Si_S}P(\mathbf{i},n),\ \forall n=\overline{1,S},$$

имеем следующую систему уравнений:

$$j\sum_{k=1}^{S}\mu_k\left(e^{-ju_k}-1\right)\frac{\partial H(\mathbf{u},n)}{\partial u_k}=\lambda_n H(\mathbf{u},n)\left(e^{ju_n}-1\right)+\sum_{\nu}q_{\nu n}H(\mathbf{u},\nu),\ \forall n=\overline{1,S}.$$

Систему уравнений для $H(\mathbf{u}, n)$ в матричном виде запишем следующим образом:

$$j\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u})\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}=\mathbf{h}(\mathbf{u})\left(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{u})+\mathbf{Q}\right), \tag{1}$$

где

$$\mathbf{h}(\mathbf{u})=\left[H(\mathbf{u},1),H(\mathbf{u},2),...,H(\mathbf{u},S)\right],\ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u})=\left[\mu_1(e^{-ju_1}-1),\mu_2(e^{-ju_2}-1),...,\mu_S(e^{-ju_S}-1)\right],$$

$$\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial H(\mathbf{u},1)}{\partial u_1} & ... & \frac{\partial H(\mathbf{u},S)}{\partial u_1}\\ ... & ... & ...\\ \frac{\partial H(\mathbf{u},1)}{\partial u_S} & ... & \frac{\partial H(\mathbf{u},S)}{\partial u_S}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}\lambda_1(e^{ju_1}-1) & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2(e^{ju_2}-1) & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_S(e^{ju_S}-1)\end{bmatrix}.$$

Полученная система уравнений является основной для дальнейших исследований. Предлагается провести анализ характеристик рассматриваемой СМО с помощью метода асимптотического анализа.

3. Метод асимптотического анализа

Предлагаемый метод асимптотического анализа реализуется в построении последовательности асимптотик возрастающего порядка, в котором асимптотика первого порядка, аналогично закону больших чисел, определяет асимптотическое среднее значение числа занятых приборов. Асимптотика второго порядка, аналогично центральной предельной теореме, позволяет построить гауссовскую аппроксимацию распределения вероятностей числа занятых приборов в системе.

3.1. Асимптотика первого порядка

Решение системы (1) будем находить в асимптотическом условии эквивалентно растущего времени обслуживания, т.е. при $\mu_i \to 0$, $i = 1, ... S$. Обозначим $\mu_i = q_i\varepsilon$ (ε – бесконечно малая величина) и в (1) выполним замены $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{x}$ (т.е. $u_i = \varepsilon x_i$), $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \varepsilon)$, получим уравнение для $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \varepsilon)$:

$$j\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\varepsilon)\frac{\partial\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial\mathbf{x}}=\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\left(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x},\varepsilon)+\mathbf{Q}\right), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\varepsilon)=\left[\left(e^{-j\varepsilon x_1}-1\right)q_1,...,\left(e^{-j\varepsilon x_S}-1\right)q_S\right]$, $\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x},\varepsilon)=\mathrm{diag}\left[\lambda_i\left(e^{j\varepsilon x_i}-1\right)\right]$, $i=\overline{1,S}$.

В (2) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим, что $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x})\mathbf{Q}=\mathbf{0},$$

поэтому $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ будем искать в виде

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x})=\mathbf{r}\Phi_1(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Здесь $\Phi_1(\mathbf{x}) = \Phi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ – неизвестная скалярная функция n переменных, $n = 1, ..., S$, $\mathbf{r}$ – вектор-строка стационарного распределения вероятностей значений цепи Маркова $s(t)$, определяемая системой уравнений

$$\mathbf{rQ}=\mathbf{0}$$

и условием нормировки $\mathbf{re} = 1$, где $\mathbf{e}$ – единичный вектор.

Разложив экспоненты в (2) в ряд Тейлора до первого порядка, получим

$$-j\left[x_1q_1,...,x_Sq_S\right]\frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial \mathbf{x}}=\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\begin{bmatrix}\lambda_1x_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2x_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_Sx_S\end{bmatrix}+O(\varepsilon^2)\,. \tag{4}$$

Домножив (4) на единичный вектор справа, имеем:

$$-j\left[x_1q_1,...,x_Sq_S\right]\begin{bmatrix}\sum_i \frac{\partial F_1(i,\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial x_1}\\ \sum_i \frac{\partial F_2(i,\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial x_2}\\ ...\\ \sum_i \frac{\partial F_2(i,\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\begin{bmatrix}\lambda_1x_1\\ \lambda_2x_2\\ ...\\ \lambda_Sx_S\end{bmatrix}+O(\varepsilon^2)\,. \tag{5}$$

В (5), положив ε → 0 и подставив разложение (3), получим

$$-j\left[x_1q_1,...,x_Sq_S\right]\begin{bmatrix}\sum_i r_i\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}\\ \sum_i r_i\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}\\ ...\\ \sum_i r_i\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_S}\end{bmatrix}=\Phi_1(\mathbf{x})\mathbf{r}\begin{bmatrix}\lambda_1x_1\\ \lambda_2x_2\\ ...\\ \lambda_Sx_S\end{bmatrix}.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных для $\Phi_1(\mathbf{x})$:

$$\sum_{i=1}^{S}x_iq_i\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_i}=j\sum_{i=1}^{S}r_i\lambda_ix_i\Phi_1(\mathbf{x})\,. \tag{6}$$

Нетрудно показать, что решение уравнения (6) имеет вид:

$$\Phi_1(\mathbf{x})=C_2\exp\left\{j\left(\frac{r_1\lambda_1x_1}{q_1}+...+\frac{r_S\lambda_Sx_S}{q_S}\right)\right\}.$$

Учитывая начальное условие $\Phi_1(\mathbf{0})=1$, функция $\Phi_1(\mathbf{x})$ примет вид:

$$\Phi_1(\mathbf{x})=\exp\left\{j\left(\frac{r_1\lambda_1x_1}{q_1}+...+\frac{r_S\lambda_Sx_S}{q_S}\right)\right\},$$

тогда

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x})=\mathbf{r}\exp\left\{j\left(\frac{r_1\lambda_1x_1}{q_1}+...+\frac{r_S\lambda_Sx_S}{q_S}\right)\right\}.$$

Осуществив обратные замены $\frac{x_i}{q_i}=\frac{u_i}{\varepsilon q_i}=\frac{u_i}{\mu_i}$, получаем

$$\mathbf{h}(\mathbf{u})=\mathbf{r}\exp\left\{j\left(r_1u_1\frac{\lambda_1}{\mu_1}+...+r_Su_S\frac{\lambda_S}{\mu_S}\right)\right\}.$$

Домножив на единичный вектор **e**, получим

$$H(\mathbf{u})=M\left\{e^{j(u_1i_1+...+u_Si_S)}\right\}=\exp\left\{j\sum_{i=1}^{S}r_iu_i\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right\}.$$

Данное равенство будем называть приближением характеристической функции первого порядка. Оно определяет среднее число занятых приборов каждого типа в системе.

3.2. Асимптотика второго порядка

Для более детального исследования проведем асимптотический анализ второго порядка.

Определим характеристическую функцию в виде

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}_2(\mathbf{u}) \exp\left\{ j \sum_{i=1}^{S} r_i u_i \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right\},$$

тогда из (1) получим систему дифференциальных уравнений вида

$$j\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{h}_2(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{h}_2(\mathbf{u})\big(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{u}) + \mathbf{Q}\big) + \mathbf{h}_2(\mathbf{u})\mathbf{A}(\mathbf{u}),$$

или

$$j\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{h}_2(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{h}_2(\mathbf{u})\big(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{u}) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{u})\big), \tag{7}$$

здесь

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{S} r_k \lambda_k \left(e^{-ju_k} - 1\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{S} r_k \lambda_k \left(e^{-ju_k} - 1\right) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{S} r_k \lambda_k \left(e^{-ju_k} - 1\right) \end{bmatrix}.$$

Выполнив в (7) замены $\mu_i = q_i \varepsilon^2$, $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{x}$ (т.е. $u_i = \varepsilon x_i$), $\mathbf{h}_2(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \varepsilon)$, получим матричное дифференциальное уравнение для $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \varepsilon)$:

$$j\varepsilon\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\varepsilon) \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{x},\varepsilon)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}_2(\mathbf{x},\varepsilon)\big(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x},\varepsilon) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{x},\varepsilon)\big). \tag{8}$$

Осуществив предельный переход при $\varepsilon \to 0$, для $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{F}_2(\mathbf{x},\varepsilon)$ получим уравнение

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x})\mathbf{Q} = 0,$$

решение которого запишем в виде

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{r}\Phi_2(\mathbf{x}),$$

где функция $\Phi_2(\mathbf{x})$ будет определена ниже.

Решение $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}, \varepsilon)$ уравнения (8) будем искать в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\varepsilon) = \Phi_2(\mathbf{x})\left\{ \mathbf{r} + j\varepsilon \mathbf{f}_2 \sum_{i=1}^{S} x_i \right\} + O(\varepsilon^2),$$

в котором естественно полагать выполнение условия $\mathbf{f}_2\mathbf{e} = 0$, и, подставив которое в (8), получим

$$j\varepsilon\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\varepsilon)\left\{ \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \left(\mathbf{r} + j\varepsilon \mathbf{f}_2 \sum_{i=1}^{S} x_i \right) + \Phi_2(\mathbf{x}) j\varepsilon \mathbf{f}_2 \right\} =$$

$$= \Phi_2(\mathbf{x})\left(\mathbf{r} + j\varepsilon \mathbf{f}_2 \sum_{i=1}^{S} x_i \right)\big(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x},\varepsilon) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{x},\varepsilon)\big) + O(\varepsilon^3),$$

$$j\varepsilon\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\varepsilon) \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{r} = \Phi_2(\mathbf{x})\left(\mathbf{r} + j\varepsilon \mathbf{f}_2 \sum_{i=1}^{S} x_i \right)\big(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x},\varepsilon) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{x},\varepsilon)\big) + O(\varepsilon^2). \tag{9}$$

Для того чтобы определить неизвестный вектор $\mathbf{f}_2$, разложим в ряд экспоненты в равенстве (9):

$$\Phi_2(\mathbf{x})\left(j\varepsilon \mathbf{r}\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}) + j\varepsilon \mathbf{f}_2 \mathbf{Q} \sum_{i=1}^{S} x_i - j\varepsilon \mathbf{r}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \right) = O(\varepsilon^2), \tag{10}$$

где

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\lambda_1x_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2x_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_Sx_S\end{bmatrix},\ \mathbf{A}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{S}r_k\lambda_kx_k & 0 & ... & 0\\ 0 & \sum_{k=1}^{S}r_k\lambda_kx_k & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \sum_{k=1}^{S}r_k\lambda_kx_k\end{bmatrix},\ \mathbf{g}=\left[x_1q_1,...,x_Sq_S\right].$$

Далее поделим равенство (10) на ε и выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим уравнение

$$\mathbf{r\Lambda}(\mathbf{x})+\mathbf{f}_2\mathbf{Q}\sum_{i=1}^{S}x_i-\mathbf{rA}(\mathbf{x})=0. \qquad (11)$$

Равенство (11) запишем покомпонентно:

$$\left[r_1\lambda_1x_1,...,r_S\lambda_Sx_S\right]+\left[f_1q_{11}+...+f_Sq_{S1},...,f_1q_{1S}+...+f_Sq_{SS}\right](x_1+...+x_S)-$$
$$-\left[r_1\left(r_1\lambda_1x_1+...+r_S\lambda_Sx_S\right),...,r_S\left(r_1\lambda_1x_1+...+r_S\lambda_Sx_S\right)\right]=0,$$

откуда получаем матричное уравнение для $\mathbf{f}_2$

$$\mathbf{f}_2\mathbf{Q}=\mathbf{r}\left(\mathbf{B}-\mathbf{\Lambda}\right), \qquad (12)$$

где

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_S\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}r_1\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & r_2\lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & r_S\lambda_S\end{bmatrix}.$$

Перейдем к определению $\Phi_2(\mathbf{x})$.

В (9) разложим экспоненты в ряд до второго порядка, получим

$$(-j\varepsilon)^2\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x})\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{r}=\Phi_2(\mathbf{x})\mathbf{r}\left(j\varepsilon\mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{x})+\frac{(j\varepsilon)^2}{2}\mathbf{\Lambda}_2(\mathbf{x})+\mathbf{Q}-j\varepsilon\mathbf{A}(\mathbf{x})+\right. \qquad (13)$$
$$\left.+\frac{(j\varepsilon)^2}{2}\mathbf{A}_2(\mathbf{x})\right)+\Phi_2(\mathbf{x})j\varepsilon\mathbf{f}_2\sum_{i=1}^{S}x_i\left(j\varepsilon\mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{x})+\mathbf{Q}-j\varepsilon\mathbf{A}(\mathbf{x})\right)+O(\varepsilon^3),$$

где

$$\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{x})=\varepsilon\left[x_1q_1,...,x_Sq_S\right],\ \mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{x})=\mathrm{diag}\left[\lambda_ix_i\right],$$

$$\mathbf{\Lambda}_2(\mathbf{x})=\mathrm{diag}\left[\lambda_ix_i^2\right],\ \frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{r}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}r_1 & ... & \frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}r_S\\ ... & ... & ...\\ \frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_S}r_1 & ... & \frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_S}r_S\end{bmatrix}.$$

Умножим выражение (13) на единичный вектор $\mathbf{e}$:

$$(-j\varepsilon)^2\sum_{i=1}^{S}x_iq_i\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_i}=$$
$$=\Phi_2(\mathbf{x})\left\{j\varepsilon\sum_{i=1}^{S}r_i\lambda_ix_i+\frac{(j\varepsilon)^2}{2}\sum_{i=1}^{S}r_i\lambda_ix_i^2-j\varepsilon\sum_{i=1}^{S}r_i\lambda_ix_i+\frac{(j\varepsilon)^2}{2}\sum_{i=1}^{S}r_i\lambda_ix_i^2\right\}+ \qquad (14)$$
$$+\Phi_2(\mathbf{x})\left\{(j\varepsilon)^2\sum_{i=1}^{S}x_i\sum_{j=1}^{S}f_j\lambda_jx_j+j\varepsilon\sum_{i=1}^{S}x_i\mathbf{f}_2\mathbf{Qe}\right\}+O(\varepsilon^3).$$

Учитывая (11), из (14) получаем дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных для функции $\Phi_2(\mathbf{x})$:

$$\sum_{i=1}^{S} x_i q_i \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \Phi_2(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{i=1}^{S} r_i \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} x_i x_j f_j \lambda_j \right\} \tag{15}$$

Решение уравнения (15) имеет вид:

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i x_i^2}{q_i} + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} \frac{x_i x_j f_j \lambda_j}{q_i + q_j} \right\},$$

тогда

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{r} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i x_i^2}{q_i} + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} \frac{x_i x_j f_j \lambda_j}{q_i + q_j} \right\}.$$

Осуществив обратные замены $x_i^2 = \frac{u_i^2 q_i}{\mu_i}$, $x_i x_j = \frac{u_i u_j}{\varepsilon^2}$, $q_i + q_j = \frac{\mu_i + \mu_j}{\varepsilon^2}$, получаем

$$\mathbf{h}_2(\mathbf{u}) = \mathbf{r} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i u_i^2}{\mu_i} + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} \frac{u_i u_j f_j \lambda_j}{\mu_i + \mu_j} \right\},$$

откуда

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{r} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i u_i^2}{\mu_i} + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} \frac{u_i u_j f_j \lambda_j}{\mu_i + \mu_j} + j \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i u_i}{\mu_i} \right\}.$$

Домножив на единичный вектор **e**, получим

$$H(\mathbf{u}) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i u_i^2}{\mu_i} + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j \neq i}^{S} \frac{u_i u_j f_j \lambda_j}{\mu_i + \mu_j} + j \sum_{i=1}^{S} \frac{r_i \lambda_i u_i}{\mu_i} \right\}.$$

Асимптотическая характеристическая функция числа занятых приборов разного типа в системе имеет вид гауссовской характеристической функции с вектором математического ожидания и матрицей ковариации:

$$\mathbf{a} = \left[\frac{r_1 \lambda_1}{\mu_1}, \ldots, \frac{r_S \lambda_S}{\mu_S} \right], \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{r_1 \lambda_1}{\mu_1} & \frac{f_2 \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} & \ldots & \frac{f_S \lambda_S}{\mu_1 + \mu_S} \\ \frac{f_1 \lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} & \frac{r_2 \lambda_2}{\mu_2} & \ldots & \frac{f_S \lambda_S}{\mu_1 + \mu_S} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{f_1 \lambda_1}{\mu_1 + \mu_S} & \frac{f_2 \lambda_2}{\mu_1 + \mu_S} & \ldots & \frac{r_S \lambda_S}{\mu_S} \end{bmatrix}.$$

Заключение

В данной работе исследована математическая модель системы M|M|∞, функционирующей в условии изменяющейся внешней среды. С помощью метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания доказано, что распределение вероятностей числа занятых приборов разного типа в системе является многомерным гауссовским.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеева С.П., Полин Е.П. Исследование математической модели бесконечнолинейной СМО с входящим MAP-потоком переменной интенсивности // Доклады 12-й Междунар. азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем». 12–16 декабря 2016 г. Новосибирск, 2016. С. 380–384.

2. Таташев А.Г. Система массового обслуживания с переменной интенсивностью входного потока // Автоматика и телемеханика. 1995. № 12. С. 78–84.
3. Дудин С.А., Дудина О.С. Многоканальная система обслуживания с марковским входным потоком нетерпеливых запросов, функционирующая в случайной среде // Информатика. 2015. № 1. С. 45–55.
4. Eisen M., Tainiter M. Stochastic variations in queueing processes // Opens. Res. 1963. V. 11. P. 922–927.
5. Naor P., Yechiali U. Queueing problems with heterogeneous arrivals and service // Opens. Res. 1971. V. 19, No. 3. P. 722–734.
6. Yechiali U. A queueing tipe birth and death process defined as a continuous time markov chain // Opens. Res. 1973. V. 21, No. 2. P. 604–629.
7. Baykal-Gursoy M., Xiao W. Stochastic Decomposition in M/M/∞ Queues with Markov Modulated Service Rates // Queueing Syst. 2004. V. 48. P. 75–88.
8. O'Cinneide C.A., Purdue P. The M/M/∞ Queue in a random environment // J. Appl. Prob. 1986. V. 23. P. 175–184.
9. Blom J., Kella O., Mandjes M., Thorsdottir H. Markov-Modulated Infinite-Server Queues with General Service Times // Queueing Syst. 2014. V. 76. P. 403-424.
10. D'Auria B. M/M/∞ queues in semi-Markovian random environment // Queueing Syst. 2008. V. 58. P. 221–237.
11. Falin G. The M/M/∞ Queue in Random Environment // Queueing Syst. 2008. V. 58. P. 65–76.
12. Fralix B.H., Adan I.J.B.F. An infinite-server queue influenced by a semi-markovian environment // Queueing Syst. 2009. V. 61. P. 65–84.
13. Linton D., Purdue P. An M/G/∞ Queue with m customer types subject to periodic clearing // Opsearch, 1979. V. 16. P. 80–88.
14. Назаров А.А., Баймеева Г.В. Исследование системы M/M/∞ в полумарковской случайной среде // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11/2. С. 198–203.
15. Моисеев А.Н., Моисеева С.П. Исследование входящего потока для GRID-системы с адаптируемым выделением вычислительных ресурсов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 81–87.
16. Полин Е.П. Исследование системы MMPP(n)|M(n)|∞ методом моментов // Труды Томского государственного университета. Т. 302. Сер. физико-математическая. Томск : Издательский Дом ТГУ, 2018. С. 306–311.
17. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
18. Убонова Е.Г., Панкратова Е.В. Гауссовская аппроксимация для системы массового обслуживания MMPP/M/∞ с разнотипным обслуживанием // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11/2. С. 225–230.

Поступила в редакцию 8 октября 2018 г.

Polin E.P., Moiseeva S.P., Rozhkova S.V. (2019) ASIMPTOTIC ANALYSIS OF HETEROGENEOUS QUEUING SYSTEM M|M|∞ IN A MARKOV RANDOM ENVIRONMENT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 75–83

DOI: 10.17223/19988605/47/9

In this paper, an inhomogeneous queuing system with an unlimited number of servers operating in a random environment is considered.

The arrival process is a Poisson Process, the process of changing the state of the environment is a Markov chain, which is given by the matrix of infinitesimal characteristics. The service discipline is defined as follows: if the customer comes with some intensity, then it is served by a random time distributed according to an exponential distribution with the corresponding parameter, which does not change when, the state of the environment changes.

We proposed the characteristic functions method and the asymptotic analysis method to study the system. Using partial characteristic functions, we obtained the matrix equation which allows us to determine the main characteristics of the system». Applying the asymptotic analysis method, we obtained the solution of this equation under the condition of an infinitely growing servicing time. It determines the average number of occupied servers of each type in the system.

For a more detailed study, we used an asymptotic analysis of the second order, as a result we showed that the asymptotic characteristic function of the number of occupied servers of each type in the system has the form of a Gaussian characteristic function and the probability distribution of the number of occupied servers of each type in the system under the condition of an infinitely growing service time is a multidimensional Gaussian distribution.

Keywords: infinite-server queue; asymptotic analysis method; random environment.

POLIN Evgeny Pavlovich (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: polin_evgeny@mail.ru
MOISEEVA Svetlana Petrovna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: smoiseeva@mail.ru

ROZHKOVA Svetlana Vladimirovna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: rozhkova@tpu.ru

REFERENCES

1. Moiseeva, S.P. & Polin, E.P. (2016) [Investigation of the mathematical model of an infinite-linear queuing system with an incoming MAP arrival process of variable intensity]. *Problemy optimizatsii slozhnykh sistem* [Problems of Optimization of Complex Systems]. Proc. of the 12th International Seminar. Novosibirsk. December 12–16, 2016. Novosibirsk. pp. 380–384. (In Russian).
2. Tatashev, A.G. (1995) Queuing system with arrival process of variable intensity. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 12. pp. 78–84. (In Russian).
3. Dudin, S.A. & Dudina O.S. (2015) Multi-channel queuing system with a Markov arrival process of impatient requests, operating in a random environment. *Informatika*. 1. pp. 45–55. (In Russian).
4. Eisen, M. & Tainiter, M. (1963) Stochastic variations in queueing processes. *Operations Research.* 1(11). pp. 922–927. DOI: 10.1287/opre.11.6.922
5. Naor, P. & Yechiali, U. (1971) Queueing problems with heterogeneous arrivals and service. *Operations Research*. 19(3). pp. 722–734. DOI: 10.1287/opre.19.3.722
6. Yechiali, U. (1973) A queueing tipe birth and death process defined as a continuous time markov chain. *Operations Research.* 21(2). pp. 604–629. DOI: 10.1287/opre.21.2.604
7. Baykal-Gursoy, M. & Xiao, W. (2004) Stochastic decomposition in M/M/∞ queues with markov modulated service rates. *Queueing Systems.* 48. pp. 75–88. DOI: 10.1023/B:QUES.0000039888.52119.1d
8. O'Cinneide, C.A. & Purdue, P. (1986) The M/M/∞ queue in a random environment. *Journal of Applied Probability.* 23(1). pp. 175–184. DOI: 10.2307/3214126
9. Blom, J., Kella, O., Mandjes, M. & Thorsdottir, H. (2014) Markov-modulated infinite-server queues with general service times. *Queueing Systems.* 76. pp. 403–424. DOI: 10.1007/s11134-013-9368-4
10. D'Auria, B. (2008) M/M/∞ queues in semi-Markovian random environment. *Queueing Systems.* 58. pp. 221–237. DOI: 10.1007/s11134-008-9068-7
11. Falin, G. (2008) The M/M/∞ Queue in Random Environment. *Queueing Systems*. 58. pp. 65–76. DOI: 10.1007/s11134-007-9059-0
12. Fralix, B.H. & Adan, I.J.B.F. (2009) An infinite-server queue influenced by a semi-Markovian environment. *Queueing Systems.* 61. pp. 65–84. DOI: 10.1007/s11134-008-9100-y
13. Linton, D. & Purdue, P. (1979) An M/G/∞ queue with m customer types subject to periodic clearing. *Opsearch*. 16 pp. 80–88.
14. Nazarov, A.A. & Baymeeva, G.V. (2015) Issledovanie sistemy M/M/∞ v polumarkovskoy sluchaynoy srede [Investigation of the system M/M/∞ in a semi-Markov random environment]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 58(11/2). pp. 198–203.
15. Moiseev, A.N. & Moiseeva, S.P. (2012) Investigation of input flow for the GRID-system with adaptive providing of computing resources. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(20). pp. 81–87. (In Russian).
16. Polin, E.P. (2018) Issledovanie sistemy MMPP(n)|M(n)|∞ metodom momentov [Investigation of the MMPP(n)|M(n)|∞ system by the method of moments]. *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universi-teta. Ser. fiziko-matematicheskaya*. 302. pp. 306–311.
17. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analysis in queuing theory]. Tomsk: NTL.
18. Ubonova, E.G. & Pankratova, E.V. (2015) Gaussovskaya approksimatsiya dlya sistemy massovogo obsluzhivaniya MMPP/M/∞ s razno-tipnym obsluzhivaniem [Gaussian approximation for the MMPP/M/∞ queuing system with a heterogeneous service]. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 58(11/2). pp. 225–230.