ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 47

УДК 519.6
DOI: 10.17223/19988605/47/10

Б.М. Шумилов

МУЛЬТИВЕЙВЛЕТЫ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНАМ

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ и Администрации Томской области, грант № 16-41-700400 р_а.

Представлена конструкция мультивейвлетов на основе эрмитовых сплайнов произвольной нечетной степени на конечном отрезке. Мультивейвлеты ортогональны многочленам той же степени и имеют наименьший носитель. Предложен алгоритм мультивейвлет преобразования с применением метода блочной матричной прогонки. Исследована устойчивость на больших сетках. Дан численный пример аппроксимации и сжатия данных для случая мультивейвлетов седьмой степени.
Ключевае слова: эрмитовы сплайны; мультивейвлеты; ортогональность многочленам.

Вейвлетом называется короткая или быстро затухающая волновая функция (всплеск), множество сжатий и смещений которой порождает пространство измеримых функций на всей числовой оси [1–3]. Основой для построения вейвлетов является наличие набора аппроксимирующих пространств $\ldots V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1} \ldots$, таких, что каждая базисная функция в V_{L-1} может быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций в V_L. В частности, таким свойством обладают сплайны – гладкие функции, склеенные из кусков многочленов степени m, на вложенной последовательности сеток. Если порядок склейки равен $m - 1$, то классические полуортогональные вейвлеты (элементы пространства V_L, ортогональные пространству V_{L-1}) имеют довольно большой носитель из $2m + 1$ шагов сетки. В случае аппроксимации на конечном интервале ситуация усугубляется, так как приходится учитывать краевые эффекты. Это препятствует их широкому использованию для решения задач математического моделирования. В отличие от этого эрмитовы сплайны нечетной степени $m = 2r + 1$ (соответствующие склейке порядка r) приводят к вейвлетам с носителем из трех шагов сетки, что, несомненно, предпочтительнее. Поскольку в базисе таких функций несколько, они называются мультивейвлетами [4–8]. В [9, 10] были предложены методы построения вейвлетов, ортогональных многочленам, с уменьшенными носителями. Идея уменьшения носителя вейвлета за счет замены свойства ортогональности пространству сплайнов на прореженной сетке ортогональностью многочленам представляется привлекательной. Действительно, с точки зрения скорости приближения гладких функций [3] данные типы вейвлетов эквивалентны, а ортогональность многочленам обеспечивает локально максимальную «похожесть» на наилучшее среднеквадратическое приближение.

В данной работе мы излагаем результаты исследования мультивейвлетов произвольной нечетной степени с носителем [0, 2], ортогональных многочленам той же степени, на конечном отрезке.

1. Построение системы базисных мультивейвлетов произвольной нечетной степени на конечном отрезке

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана вложенная последовательность равномерных сеток Δ^L: $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \ldots, 2^L$, $h = (b - a)/2^L$, $L \geq 0$. Мультивейвлеты возникают тогда, когда с каждым узлом сетки связано более одной базисной функции [4]. В частности, если базисные функции $\mathrm{N}^L_{i,k}(x) = \varphi_k(v - i)$, $k = 0, 1, \ldots, r$ $\forall i$, где $v = (x - a)/h$, с центрами в целых числах, порождены сжатиями и сдвигами $r + 1$ функций вида [11. С. 82]:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} (-1)^k \omega_k(-t) & \text{при } -1 \le t \le 0, \\ \omega_k(t) & \text{при } \ 0 \le t \le 1, \\ 0, & t \notin [-1,1], \end{cases}$$

где $\omega_k(t) = (1-t)^{r+1} \sum\limits_{\beta=0}^{r-k} \frac{(r+\beta)!}{k!\beta!r!} t^{k+\beta}, k = 0,1,\ldots,r,$ то при условии отсечения выступающих за концы отрезка половинок функций $\varphi_0(t)$, …, $\varphi_r(t)$ полученное пространство V_L является пространством эрмитовых сплайнов степени $2r + 1$ гладкости C^r.

На любой сетке Δ^L, $L \ge 0$, интерполяционный эрмитов сплайн $(2r + 1)$-й степени может быть представлен как

$$\mathrm{S}^L(x) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,k}\, \mathrm{N}_{i,k}^L(x), \quad a \le x \le b, \tag{1}$$

где коэффициенты $C_i^{L,k}$, $k = 0, \ldots, r$, являются значениями и соответствующими производными аппроксимируемой функции $f(x)$, помноженными на h в соответствующей степени: $\{f^{(k)}(i\cdot h)\cdot h^k, k = 0, \ldots, r, i = 0, \ldots, 2^L\}$, в узлах сетки.

Поскольку сетка Δ^{L-1}, $L \ge 1$, получена из Δ^L посредством удаления каждого второго узла, то соответствующее пространство V_{L-1} с базисными функциями $\mathrm{N}^{L-1}_{i,k}$, с носителями, в два раза большими по ширине, и центрами в четных целых числах, вложено в V_L. Остаток W_{L-1} от разности пространств V_L и V_{L-1}, размерности $(r + 1)\cdot(2^L + 1 - 2^{L-1} - 1) = (r + 1)2^{L-1}$, называется пространством вейвлетов.

В классической теории вейвлетов базисные функции W_{L-1} ортогональны всем базисным сплайнам на прореженной сетке V_{L-1} по отношению к некоторому скалярному произведению. Это означает, что пространство V_L представляет прямую сумму V_{L-1} и W_{L-1}: $V_L = V_{L-1} \oplus W_{L-1}$. В отличие от этого, будем искать вейвлеты $\mathrm{M}^L_{i,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r\ \forall i$, как линейные комбинации базисных эрмитовых сплайнов на сетке Δ^{L+1}, удовлетворяющие условиям ортогональности многочленам $(2r + 1)$-го порядка [12]

$$\int_a^b \mathrm{M}_{i,k}^L(x) x^m dx = 0,\ \ k = 0,1,\ldots,r\ \forall i\ (m = 0,1,\ldots,2r+1) \tag{2}$$

и имеющие минимальные из возможных носителей.

Теорема. Система функций $\mathrm{M}^L_{i,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r$, $i = 1, 2, \ldots, 2^L$, удовлетворяющих условиям (2) с носителями не более чем из двух шагов сетки Δ^L, существует и образует базис в пространстве W_L.

Доказательство.

а) Пусть $L \ge 1$, и носители вейвлетов $[x_{2i-1}, x_{2i+p+1}]$, $p \ge 1$, полностью располагаются внутри отрезка аппроксимации $[a, b]$. При $p \ge 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 2^L - 1 - [p/2]$ имеем разложение

$$\mathrm{M}_{i,k}^L(x) = \sum_{l=0}^{r} \sum_{j=0}^{p} \alpha_j^l \varphi_l(t-j), t = (x - x_{2i})/h, \quad -1 \le t \le p+1. \tag{3}$$

Разложение (3) подставим в (2) и вычислим все необходимые интегралы, учитывая при этом, что подынтегральные выражения обращаются в нуль вне носителей вейвлетов. Условия ортогональности (2) определяют однородную систему $2r + 2$ уравнений относительно коэффициентов вейвлета $\mathrm{M}_{i,k}^L(x)$. В силу линейной независимости на интервалах $[x_{2i-1}, x_{2i+p+1}]$ базисных функций $\mathrm{N}_{2i+l,k}^{L+1}(x)$, $l = 0, \ldots, r$, $j = 0, 1, \ldots, p$, и поверочных функций x^m, $m = 0, 1, \ldots, 2r + 1$ [1], ранг полученной системы равняется $\min[2r + 2, (r + 1)(p + 1)]$. Если предположить, что носитель вейвлета равен трем шагам сетки Δ^{L+1}, т.е. $p = 1$, то однородная система становится квадратной и, будучи невырожденной, может иметь только тривиальное решение. Поэтому будем далее считать, что носитель вейвлета равен четырем шагам сетки Δ^{L+1}, те вейвлет построен из $3r + 3$ базисных сплайнов. В этом случае ранг матрицы равен $2r + 2$. Поэтому однородная система $2r + 2$ уравнений с $3r + 3$ неизвестными имеет $r + 1$ линейно независимых частных решений. Длина носителей, полученных для каждого номера i вейвлетов, равна длине носителей базисных сплайнов на сетке Δ^L. Их линейная независимость вытекает из того факта, что они представляют собой множество сдвигов ненулевых функций с компактными носителями. При этом количество вейвлетов, полностью лежащих внутри отрезка аппроксимации, равно $(r + 1)(2^L - 2) = (r + 1)2^L - 2(r + 1)$, что на $2(r + 1)$ меньше разности между размерностями пространств V_{L+1} и V_L: $(r + 1)(2^{L+1} + 1) - (r + 1)(2^L + 1) = (r + 1)2^L$.

Вблизи концов отрезка интервалы интегрирования не выходят за пределы отрезка. Поэтому с учетом того, что по краям отрезка $[a, b]$ от выступающих за концы отрезка функций $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_r(t)$ остается по половинке, граничные вейвлеты отличаются от вейвлетов, предложенных выше, при условии ортогональности многочленам $(2r + 1)$-й степени. Аналогичные рассуждения приводят к двум системам линейно независимых функций $w_0(t), \ldots, w_r(t)$ отдельно на левом и на правом концах, дополняющих до базиса построенную выше вейвлет-систему.

б) Пусть $L = 0$. Вычисления снова дают $r + 1$ линейно независимых частных решений, которые дают базис в пространстве $V_1 - V_0$ с размерностью $(r + 1)\cdot 3 - (r + 1)\cdot 2 = (r + 1)$. Теорема доказана.

В соответствии с правилами линейной алгебры сформулируем следующий алгоритм построения эрмитовых мультивейвлетов нечетной степени.

Следствие. Введем в рассмотрение три матрицы размерности $(2r+2)\times(r+1)$ с элементами

$$R_{m,l}^{j} = \int_{j-1}^{j+1} \varphi_l(2t-j)t^m dt,\ j = 0,1,2,\ l = 0,1,\ldots,r,\ m = 0,1,\ldots,2r+1$$

и составим из них блочную квадратную матрицу $(2r + 2)$-го порядка вида $[R^0|R^2]$. Тогда при условии, что коэффициенты разложения (3) $\alpha_1^l = \{1, l = k; 0, l \neq k\}$, каждый из $r + 1$ столбцов матрицы $\left[\mathrm{A}_0^{\text{inner}} \big/ \mathrm{A}_2^{\text{inner}}\right] = -[R^0 \,|\, R^2]^{-1} R^1$ дает значения коэффициентов $\alpha_j^l,\ j = 0,2,\ l = 0,1,\ldots,r,$ соответствующего k-го базисного вейвлета, полностью лежащего внутри отрезка аппроксимации. На левом конце отрезка элементы матрицы R^0 вычисляются по укороченному интервалу:

$$R_{m,l}^{0} = \int_{0}^{1} \varphi_l(2t)t^m dt,\ l = 0,1,\ldots,r,\ m = 0,1,\ldots,2r+1,$$

а коэффициенты разложения (3) $\alpha_j^l,\ j = 1,2,\ l = 0,1,\ldots,r,$ соответствующего k-го базисного вейвлета даются значениями столбцов матрицы $\left[\mathrm{A}_1^{\text{left}} \big/ \mathrm{A}_2^{\text{left}}\right] = -[R^1 \,|\, R^2]^{-1} R^0$ при условии, что коэффициенты $\alpha_0^l = \{1, l = k; 0, l \neq k\}$. Аналогично на правом конце отрезка аппроксимации элементы матрицы R^2 вычисляются по укороченному интервалу:

$$R_{m,l}^{2} = \int_{1}^{2} \varphi_l(2t-2)t^m dt,\ l = 0,1,\ldots,r,\ m = 0,1,\ldots,2r+1,$$

а коэффициенты разложения (3) $\alpha_j^l,\ j = 0,1,\ l = 0,1,\ldots,r,$ соответствующего k-го базисного вейвлета даются значениями столбцов матрицы $\left[\mathrm{A}_0^{\text{right}} \big/ \mathrm{A}_1^{\text{right}}\right] = -[R^0 \,|\, R^1]^{-1} R^2$ при условии, что коэффициенты $\alpha_2^l = \{1, l = k; 0, l \neq k\}$. При $L = 0$ все интегралы вычисляются по интервалу $[0, 2]$, а граничных вейвлетов не возникает: $\left[\mathrm{A}_0^{\text{center}} \big/ \mathrm{A}_2^{\text{center}}\right] = -[R^0 \,|\, R^2]^{-1} R^1$ при условии, что $\alpha_1^l = \{1, l = k; 0, l \neq k\}$.

2. Построение и обращение блока фильтров

Если упорядочить базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки, $\varphi^L = \left[N_{0,0}^L, N_{0,1}^L, \ldots, N_{0,r}^L, N_{1,0}^L, N_{1,1}^L, \ldots, N_{2^L,r}^L\right]$, то можно записать функции φ^{L-1} в виде линейных комбинаций функций φ^L: $\varphi^{L-1} = \varphi^L P^L$. Здесь блоки матрицы P^L составлены из коэффициентов масштабных (калибровочных) соотношений [13]:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{2} H_k \begin{bmatrix} \varphi_0(2t-k) \\ \varphi_1(2t-k) \\ \vdots \\ \varphi_r(2t-k) \end{bmatrix},$$

где $H_2 = U^{-1}\Lambda U$, $\Lambda = \operatorname{diag}\left(2^{-r-1},...,2^{-2r-1}\right)$, матрица U размерности $(r+1)\times(r+1)$ задана элементами $U_{k,j} = (-1)^{r+1+k-j} \dfrac{(r+1+k)!}{(r+1+k-j)!}, k, j = 0,1,\ldots,r$, $H_1 = \operatorname{diag}\left(1,2^{-1},...,2^{-r}\right)$, $S = \operatorname{diag}\left(1,-1,...,(-1)^{-r}\right)$, $H_0 = SH_2S^{-1}$. Аналогично запишем базисные вейвлет-функции $(2r + 1)$-й степени на уровне масштабирования L в виде матрицы-строки: $\psi^L = \left[M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, \ldots, M_{1,r}^L, ..., M_{2^L,r}^L \right]$. Тогда для уровня $L - 1$ можно выразить функции ψ^{L-1} в виде линейных комбинаций функций φ^L, т.е. $\psi^{L-1} = \varphi^L Q^L$, где блоки матрицы Q^L составлены из коэффициентов разложения (3). Соответствующие коэффициенты сплайна будем собирать в вектор $C^L = \left[C_0^{L,0}, C_0^{L,1}, \ldots, C_0^{L,r}, C_1^{L,0}, ..., C_{2^L}^{L,r} \right]^{\mathrm{T}}$, а соответствующие вейвлет-коэффициенты – в вектор $D^L = \left[D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, \ldots, D_1^{L,r}, ..., D_{2^L}^{L,r} \right]^{\mathrm{T}}$ (здесь символ $^{\mathrm{T}}$ обозначает операцию транспонирования). С использованием обозначений для блочных матриц процесс получения C^L из C^{L-1} и D^{L-1} может быть записан как [14]

$$C^L = [P^L \,|\, Q^L] \left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}} \right]. \tag{4}$$

Ниже представлены примеры матриц $[P^L \,|\, Q^L]$, соответствующих L = 1, 2, 3:

$$[P^1 \,|\, Q^1] = \begin{bmatrix} H_1 & O & \mathrm{A}_0^{\text{center}} \\ H_2^T & H_0^T & I \\ O & H_1 & \mathrm{A}_2^{\text{center}} \end{bmatrix}, [P^2 \,|\, Q^2] = \begin{bmatrix} H_1 & O & O & I & O \\ H_2^T & H_0^T & O & \mathrm{A}_1^{\text{left}} & O \\ O & H_1 & O & \mathrm{A}_2^{\text{left}} & \mathrm{A}_0^{\text{right}} \\ O & H_2^T & H_0^T & O & \mathrm{A}_1^{\text{right}} \\ O & O & H_1 & O & I \end{bmatrix},$$

$$[P^3 \,|\, Q^3] = \begin{bmatrix} H_1 & O & O & O & O & I & O & O & O \\ H_2^T & H_0^T & O & O & O & \mathrm{A}_1^{\text{left}} & O & O & O \\ O & H_1 & O & O & O & \mathrm{A}_2^{\text{left}} & \mathrm{A}_0^{\text{inner}} & O & O \\ O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & I & O & O \\ O & O & H_1 & O & O & O & \mathrm{A}_2^{\text{inner}} & \mathrm{A}_0^{\text{inner}} & O \\ O & O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & I & O \\ O & O & O & H_1 & O & O & O & \mathrm{A}_2^{\text{inner}} & \mathrm{A}_0^{\text{right}} \\ O & O & O & H_2^T & H_0^T & O & O & O & \mathrm{A}_1^{\text{right}} \\ O & O & O & O & H_1 & O & O & O & I \end{bmatrix}.$$

Здесь O обозначает матрицу $(r + 1)$-го порядка с нулевыми коэффициентами, тогда как I – единичная матрица $(r + 1)$-го порядка. Обратный процесс разбиения коэффициентов C^L на более грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} состоит в решении системы линейных уравнений (4). Разрешимость данной системы гарантирована линейной независимостью базисных функций.

Процедуру разбиения C^L на часть C^{L-1}, соответствующую низшему масштабу, и уточняющие коэффициенты D^{L-1} можно применить рекурсивно и к самой этой части C^{L-1}. Следовательно, исходные значения можно представить в виде иерархии грубых версий с масштабами C^0, C^1, …, C^{L-1} и уточняющих деталей D^0, D^1, …, D^{L-1}. Результирующее вейвлет-разложение эрмитового сплайна $(2r+1)$-й степени $S^L(x)$ может быть записано в виде:

$$S^L(x) = \sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{i=0}^{1} C_i^{0,k}\,\mathrm{N}_{i,k}^0(x) + \sum_{j=0}^{L-1}\sum_{i=0}^{2^j} D_i^{j,k}\,\mathrm{M}_{i,k}^j(x)\right),\quad a \le x \le b.$$

При этом по величине вейвлет-коэффициентов D^j, $j = 0, 1,\dots, L-1$, можно судить о значимости соответствующих уточняющих деталей. Незначимые убираются с целью сжатия информации.

3. Проблема устойчивости мультивейвлет-преобразования

При больших L матрицу $[P^L \mid Q^L]$ следует сделать блочной трехдиагональной, изменив порядок неизвестных так, чтобы блоки матриц P^L и Q^L перемежались (см. [15]):

$$[P^L \mid Q^L] = \begin{pmatrix} H_1 & I & 0 & \cdots & 0 \\ H_2^T & A_1^{\text{left}} & H_0^T & \ddots & \vdots \\ 0 & A_2^{\text{left}} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_1^{\text{right}} & H_0^T \\ 0 & \cdots & 0 & I & H_1 \end{pmatrix}, L > 1.$$

Тогда можно применить для решения системы (4) алгоритм блочной матричной прогонки [16]. Введем для $L > 1$ обозначения $\mathbf{L} = \text{blocktridiag}\{H_2^T, 0, 0; A_2^{\text{left}}, 0, 0; H_2^T, 0, 0; A_2^{\text{inner}}, 0, 0; \dots ; I, 0, 0\}$; $\mathbf{U} = \text{blocktridiag}\{0, 0, I; 0, 0, H_0^T; 0, 0, A_0^{\text{inner}}; \dots ; 0, 0, A_0^{\text{right}}; 0, 0, H_0^T\}$; $\mathbf{T} = \text{blockdiag}\{T_i, i = 0, 1,\dots , 2^L\}$. В результате получим

$$[P^L \mid Q^L] = (\mathbf{L}+\mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{U}+\mathbf{T}), \tag{5}$$

где для блоков T_i справедливы выражения [17]

$$\begin{gathered} T_1 = H_1;\, T_2 = A_1^{\text{left}} - H_2^T T_1^{-1};\, T_3 = H_1 - A_2^{\text{left}} T_2^{-1} H_0^T; \\ T_i = I - H_2^T T_{i-1}^{-1} A_0^{\text{inner}};\, T_{i+1} = H_1 - A_2^{\text{inner}} T_i^{-1} H_0^T \ (i = 4, 6,\dots, 2^L - 2); \\ T_{2^L} = A_1^{\text{right}} - H_2^T T_{2^L-1}^{-1} A_0^{\text{right}};\ T_{2^L+1} = H_1 - T_{2^L}^{-1} H_0^T. \end{gathered} \tag{6}$$

Аналогично для $L = 1$ имеют место $T_1 = H_1; T_2 = I - H_2^T T_1^{-1} A_0^{\text{center}}; T_3 = H_1 - A_2^{\text{center}} T_2^{-1} H_0^T$.

Если ввести обозначения $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{U}+\mathbf{T})\left[C_0^{L-1}, D_1^{L-1},\dots, D_{2^{L-1}}^{L-1}, C_{2^{L-1}}^{L-1}\right]^{\mathrm{T}} = z$, $C_i^L = \left[C_i^{L,0}, C_i^{L,1},\dots, C_i^{L,r}\right]$, $D_i^L = \left[D_i^{L,0}, D_i^{L,1},\dots, D_i^{L,r}\right]$, то процесс решения системы (4) разбивается на два этапа:

$$(\mathbf{L}+\mathbf{T})z = C^L;\ (\mathbf{I}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U})\left[C_0^{L-1}, D_1^{L-1},\dots, D_{2^{L-1}}^{L-1}, C_{2^{L-1}}^{L-1}\right]^{\mathrm{T}} = z.$$

Покомпонентно каждый из них можно записать в следующем виде: для решения $(\mathbf{L}+\mathbf{T})z = C^L$ последовательно выполняются действия

$$\begin{gathered} z_1 = T_1^{-1}\left(C_0^L\right)^{\mathrm{T}};\, z_2 = T_2^{-1}(\left(C_1^L\right)^{\mathrm{T}} - H_2^{\mathrm{T}} z_1);\, z_3 = T_3^{-1}(\left(C_2^L\right)^{\mathrm{T}} - A_2^{\text{left}} z_2); \\ z_i = T_i^{-1}(\left(C_{i-1}^L\right)^{\mathrm{T}} - H_2^{\mathrm{T}} z_{i-1});\, z_{i+1} = T_{i+1}^{-1}(\left(C_i^L\right)^{\mathrm{T}} - A_2^{\text{inner}} z_i)\ (i = 4, 6,\dots, 2^L - 2); \\ z_{2^L} = T_{2^L}^{-1}(\left(C_{2^L-1}^L\right)^{\mathrm{T}} - H_2^{\mathrm{T}} z_{2^L-1});\, z_{2^L+1} = T_{2^L+1}^{-1}(\left(C_{2^L}^L\right)^{\mathrm{T}} - z_{2^L}), \end{gathered} \tag{7}$$

а для вычисления $(\mathbf{I}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U})\left[C_0^{L-1}, D_1^{L-1},\dots, D_{2^{L-1}}^{L-1}, C_{2^{L-1}}^{L-1}\right]^{\mathrm{T}} = z$ можно воспользоваться рекуррентными формулами:

$$\left(C_{2^{L-1}}^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_{2^L+1}; \left(D_{2^{L-1}}^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_{2^L} - T_{2^L}^{-1} H_0^{\mathrm{T}} \left(C_{2^{L-1}}^{L-1}\right)^{\mathrm{T}};$$
$$\left(C_{2^{L-1}-1}^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_{2^L-1} - T_{2^L-1}^{-1} A_0^{\mathrm{right}} \left(D_{2^{L-1}}^{L-1}\right)^{\mathrm{T}}; \left(D_i^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_{2i} - T_{2i}^{-1} H_0^{\mathrm{T}} \left(C_i^{L-1}\right)^{\mathrm{T}};$$
$$\left(C_i^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_{i-1} - T_{i-1}^{-1} A_0^{\mathrm{inner}} \left(D_i^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} \ (i = 2^{L-1}-1, 2^{L-1}-2, \ldots, 2);$$
$$\left(D_1^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_2 - T_2^{-1} H_0^{\mathrm{T}} \left(C_1^{L-1}\right)^{\mathrm{T}}; \left(C_0^{L-1}\right)^{\mathrm{T}} = z_1 - T_1^{-1} \left(D_1^{L-1}\right)^{\mathrm{T}}. \quad (8)$$

Здесь z_i суть подвекторы порядка $r + 1$.

Нетрудно убедиться, что при $L > 1$, кроме первой и последней строк, условия даже слабого диагонального преобладания [16] не выполняются. Объективное представление об устойчивости или неустойчивости алгоритма вычисления мультивейвлет-преобразования дает наблюдение за поведением чисел обусловленности в эвклидовой норме прогоночных матриц T_i (таблица).

Значения стандартной функции MathCad'a cond2(T_i), $i = 1, 2, \ldots, 33$, $r = 1, \ldots, 5$

1	2	3	4	5	6
i \ cond2(T_i)	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
1	2	4	8	16	32
2	64,759	2,695e+004	2,799e+007	2,142e+011	8,333e+014
3	2,513	157,2	5,832e+004	8,799e+007	3,717e+010
4	2,953	60,32	7 805	2,468e+006	8,122e+008
5	3,493	478,7	1,817e+005	7,345e+007	7,162e+010
6	2,835	52,05	7 124	1,999e+006	7,353e+008
7	3,56	492,9	1,864e+005	7,264e+007	8,126e+010
8	2,831	51,79	7 102	1,991e+006	7,328e+008
9	3,563	493,4	1,865e+005	7,263e+007	8,158e+010
10	2,831	51,79	7 102	1,991e+006	7,327e+008
11	3,563	493,4	1,865e+005	7,263e+007	8,159e+010
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
32	533,592	3,61e+005	1,379e+009	5,382e+011	3,713e+017
33	84,003	2,933e+004	1,965e+007	7,101e+009	1,308e+015

Таким образом, можно полагать, что для любого уровня разрешения L они являются невырожденными, что на практике означает корректность представленного выше монотонного варианта алгоритма матричной прогонки (6)–(8). Для $r = 1$ (случай приближения кубическими мультивейвлетами) это согласуется с тем фактом, что на бесконечной числовой оси L_2-устойчивость базиса гарантирована существованием оценок констант Ритца $0{,}414076 < A < B < 0{,}414265$ [10], таких что

$$A \sum_{k=0}^{r} \sum_j \sum_i \left| D_i^{j,k} \right|^2 \le \left\| \sum_{k=0}^{r} \sum_j \sum_i D_i^{j,k} \, \mathrm{M}_{i,k}^{j}(x) \right\|_{L_2(\mathrm{R})}^2 \le B \sum_{k=0}^{r} \sum_j \sum_i \left| D_i^{j,k} \right|^2 .$$

В случае приближения на конечном интервале обусловленность мультивейвлет-базиса может быть сделана весьма близкой к обусловленности базиса на бесконечной оси наложением дополнительно однородных краевых условий Дирихле [18, 19]. Однако, как следует из таблицы, с повышением степени мультивейвлета численная устойчивость будет неизбежно ухудшаться.

4. Пример для $r = 3$ (случай мультивейвлетов седьмой степени)

Мультивейвлеты седьмой степени можно применять в тех случаях, когда требуется аппроксимировать функцию или ее производные до пятого порядка с более высокой точностью по сравнению с вейвлетами степеней 3, 5. Кроме того, с помощью вейвлетов седьмой степени можно аппроксимировать на промежутках между узлами $x_i \in \Delta^L$ производные шестого и седьмого порядков – для вейвлетов степеней 3, 5 они равны нулю. Это может быть использовано при решении дифференциальных уравнений высокого порядка, например методом коллокации.

В частности, при $L \geq 1$ внутри отрезка аппроксимации получаем (все вычисления проводились в системе MathCad, дробные числа там, где они затрудняют восприятие результата, приводятся округленно в виде конечной десятичной дроби)

$$A_0^{\text{inner}} = \begin{bmatrix} 1{,}1168 & -0{,}082 & 0{,}0159 & -0{,}0004 \\ 7{,}894 & -0{,}2968 & 0{,}0915 & -0{,}001 \\ -67{,}9076 & 6{,}9996 & -1{,}1658 & 0{,}039 \\ -1792{,}4185 & 129{,}5384 & -26{,}3043 & 0{,}6684 \end{bmatrix}, \quad A_2^{\text{inner}} = \begin{bmatrix} 1{,}1168 & 0{,}082 & 0{,}0159 & 0{,}0004 \\ -7{,}894 & -0{,}2968 & -0{,}0915 & -0{,}001 \\ -67{,}9076 & -6{,}9996 & -1{,}1658 & -0{,}039 \\ 1792{,}4185 & 129{,}5384 & 26{,}3043 & 0{,}6684 \end{bmatrix}.$$

На левом конце отрезка аппроксимации имеем

$$A_1^{\text{left}} = \begin{bmatrix} -27{,}3194 & -2{,}1593 & -0{,}115 & -0{,}0032 \\ -202{,}3878 & -18{,}5595 & -1{,}1415 & -0{,}0368 \\ 2442{,}3182 & 192{,}6016 & 10{,}2045 & 0{,}2832 \\ 61774{,}985 & 5405{,}3691 & 322{,}4923 & 10{,}2122 \end{bmatrix}, \quad A_2^{\text{left}} = \begin{bmatrix} 15{,}9089 & 1{,}2448 & 0{,}0667 & 0{,}0019 \\ -12{,}3588 & -0{,}7126 & -0{,}0257 & -0{,}0004 \\ -1984{,}0775 & -158{,}6934 & -8{,}679 & -0{,}2531 \\ 30335{,}1818 & 2401{,}4609 & 130{,}1543 & 3{,}7654 \end{bmatrix}.$$

На правом конце отрезка аппроксимации значения совпадают с точностью до знака и перестановки.

При этом $H_1 = \operatorname{diag}(8,4,2,1)/8$,

$$H_0 = \frac{1}{768}\begin{pmatrix} 384 & 840 & 0 & -5040 \\ -132 & -228 & 360 & 2520 \\ 18 & 24 & -84 & -360 \\ -1 & -1 & 6 & 18 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{768}\begin{pmatrix} 384 & -840 & 0 & 5040 \\ 132 & -228 & -360 & 2520 \\ 18 & -24 & -84 & 360 \\ 1 & -1 & -6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Для $x \in [0,\ 1]$, полагая на верхнем уровне разрешения $L = 5$, находим длину шага сетки $h = 2^{-5} = 1/32$. В соотношениях уточнения (4) при выполнении вейвлет-преобразования в качестве исходных используются значения функции и трех производных, всего 132 числа. Рассматривая в качестве тестовой функции многочлен седьмой степени $f(x) = (2 - x)^3(x^2 - 1)^2$, находим на последнем этапе рекуррентного алгоритма вейвлет-разложения восемь значений сплайна $S^0(x)$ и трех его производных в концах отрезка $C^0 = [8, -12, -20, 138, 0, 0, 8, -48]^{\mathrm{T}}$. При этом все вейвлет-коэффициенты пренебрежимо малы и могут быть обнулены, обеспечивая в данном случае коэффициент сжатия $K = 132/8 = 16{,}5$.

Заключение

В работе представлена общая схема построения и вычисления мультивейвлетов на основе эрмитовых сплайнов и свойства ортогональности многочленам. Исследована устойчивость и даны результаты численного эксперимента по восстановлению функции, заданной многочленом. Дополнительные возможности для оптимизации методов обработки численной информации состоят в построении сглаживающей сплайн-аппроксимации, альтернативной методу наименьших квадратов, и в сжатии дискретных данных на участках гладкости функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам : пер. с англ. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 332 с.
2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты : пер. с англ. М. : Мир, 2001. 412 с.
3. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М. : Физматлит, 2006. 616 с.
4. Strela V. Multiwavelets: regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform // Stud. Appl. Math. 1997. V. 98, No. 4. P. 335–354.
5. Strela V., Heller P.N., Strang G., Topivala P., Heil C. The application of multiwavelet filterbanks to image processing // IEEE Trans. Signal Processing. 1999. V. 8, No. 4. P. 548–563.
6. Warming R., Beam R. Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets // SIAM J. Sci. Comp. 2000. V. 22, No. 1. P. 269–317.
7. Dahmen W., Han B., Jia R.-Q., Kunoth A. Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines // Constr. Approx. 2000. V. 16. P. 221–259.

8. Han B. Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets // J. Approxim. Theory. 2001. V. 110. P. 18–53.
9. Koro K., Abe K. Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2001. V. 25. P. 149–164.
10. Han B., Kwon S.-G., Park S.S. Riesz multiwavelet bases // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2006. V. 20. P. 161–183.
11. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980. 352 с.
12. Шумилов Б.М. Мультивейвлеты эрмитовых сплайнов третьей степени, ортогональные кубическим многочленам // Математическое моделирование. 2013. № 4. С. 17–28.
13. Strang G., Strela V. Short wavelets and matrix dilation equations // IEEE Trans. Signal Processing. 1995. V. 43, No. 1. P. 108–115.
14. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике : пер. с англ. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 272 с.
15. Шумилов Б.М. Алгоритм матричной прогонки вычисления мультивейвлетов нечетной степени, ортогональных многочленам // Автометрия. 2015. Т. 51, № 2. С. 83–92.
16. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М. : Наука, 1978. 591 с.
17. Васильева Е.А. Достаточные условия корректности метода матричной прогонки // Известия КГТУ. 2011. № 20. С. 103–108.
18. Schneider A. Biorthogonal cubic Hermite spline multiwavelets on the interval with complementary boundary conditions // Results in Mathematics. 2009. V. 53, is. 3. P. 407–416.
19. Cerna D., Finek V. Construction of optimally conditioned cubic spline wavelets on the interval // Adv. Comput. Math. 2011. V. 34. P. 519–552.

Поступила в редакцию 1 ноября 2018 г.

Shumilov B.M. (2019) MULTIWAVELETS OF ODD DEGREE, ORTHOGONAL TO POLYNOMIALS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 47. pp. 84–92

DOI: 10.17223/19988605/47/10

For the space of Hermitian splines of $2r$ + 1-st degree of a kind $\mathrm{S}^L(x) = \sum_{k=0}^{r} h^k \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,k}\,\mathrm{N}_{i,k}^L(x), \quad a \le x \le b,$ where the coefficients $C_i^{L,k}$, $k = 0, \ldots, r,$ are values and corresponding derivatives of the approximated function in the knots of uniform net Δ^L: $u_i = a + (b - a)\, i / 2^L$, $i = 0, 1, \ldots, 2^L$, $L \ge 0$, and basic functions are $\mathrm{N}_{i,k}^L(u_j) = \delta_i^j \delta_k^l, l = 0,1,\ldots,r$, with the centers in integers, it is offered to use as wavelets the functions $\mathrm{M}^L_{i,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r\ \forall i$, with the centers in odd integers, the linear combinations of basic Hermitian splines with the grid Δ^{L+1}, that are orthogonal to polynomials of $2r$ + 1-st order $\int_a^b \mathrm{M}_{i,k}^L(x) x^m dx = 0,\ k = 0,1,\ldots,r \forall i\ (m = 0,1,\ldots,2r+1)$. If the corresponding spline-coefficients are collected in the vector, $C^L = \left[C_0^{L,0}, C_0^{L,1}, \ldots, C_0^{L,r}, C_1^{L,0}, ..., C_{2^L}^{L,r} \right]^{\mathrm{T}}$, and the corresponding wavelet-coefficients – in the vector, $D^L = \left[D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, \ldots, D_1^{L,r}, ..., D_{2^L}^{L,r} \right]^{\mathrm{T}}$, then with use of designations for block matrices the formulas for evaluation of spline-coefficients C^{L-1} on the thinned grid Δ^{L-1} and wavelet-coefficients D^{L-1} in the form of the solution of sparse system of linear algebraic equations are proved:

$$[P^L \mid Q^L]\left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}}\right] = C^L.$$

Here blocks of the matrix P^L are composed from coefficients of the scale relations for basic splines and blocks of the matrix Q^L are composed from coefficients of the decomposition for basic wavelets $\mathrm{M}^L_{i,k}(x)$. For the purpose of using of the rarefied structure of a matrix $[P^L \mid Q^L]$ there is offered to make it block tri-diagonal, having changed an order of unknowns so that blocks of matrixes P^L and Q^L been alternated, to be able to apply an algorithm of a block matrix sweeping to the solution of the received system. The problem of stability of algorithm of multiwavelets-transformation on big grids by means of observation of behavior of condition numbers in Euclidean norm of sweeping matrixes is investigated. The numerical example of approximation and compression of data for a case of Hermitian splines of the 7th degree is given.

Keywords: Hermitian splines; multiwavelets; orthogonal to polynomials.

SHUMILOV Boris Mikhailovich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: sbm05@yandex.ru

REFERENCES

1. Daubechies, I. (2001) *Desyat' lektsiy po veyvletam* [Ten lectures on wavelets]. Translated from English. Izhevsk: RKhD.
2. Chui, C.K. (2001) *Vvedenie v veyvlety* [An introduction to wavelets]. Translated from English. Moscow: Mir.
3. Novikov, I.Ya., Protasov, V.Yu. & Skopina, M.A. (2006) *Teoriya vspleskov* [Wavelet theory]. Moscow: Fizmat.
4. Strela, V. (1997) Multiwavelets: regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform. *Studies of Applied Mathematics*. 98(4). pp. 335–354.
5. Strela, V., Heller, P.N., Strang, G., Topivala, P. & Heil, C. (1999) The application of multiwavelet filterbanks to image processing. *IEEE Trans. Signal Processing*. 8(4). pp. 548–563. DOI: 10.1109/83.753742
6. Warming, R. & Beam, R. (2000) Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets. *SIAM J. Sci. Comp*. 22(1). pp. 269–317. DOI: 10.1137/S1064827597315236
7. Dahmen, W., Han, B., Jia, R.-Q. & Kunoth, A. (2000) Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines. *Constructive Approximation*. 16. pp. 221–259. DOI: 10.1007/s003659910010
8. Han, B. (2001) Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets. *Journal of Approximation Theory*. 110. pp. 18–53. DOI: 10.1006/jath.2000.3545
9. Koro, K. & Abe, K. (2001) Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 25. pp. 149–164. DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00036-4
10. Han, B., Kwon, S.-G. & Park, S.S. (2006) Riesz multiwavelet bases. *Appl. Comput. Harmon. Anal*. 20. pp. 161–183. DOI: 10.1016/j.acha.2005.10.002
11. Zavyalov, Yu.S., Kvasov, B.I. & Miroshnichenko, V.L. (1980) *Metody splayn-funktsiy* [Spline function methods]. Moscow: Nauka.
12. Shumilov, B.M. (2013) Multiwavelets of the third-degree hermitian splines orthogonal to cubic polynomials. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 5(6). pp. 17–28. DOI: 10.1134/S2070048213060100
13. Strang, G. & Strela, V. (1995) Short wavelets and matrix dilation equations. *IEEE Trans. Signal Processing*. 43(1). pp. 108–115. DOI: 10.1109/78.365291.
14. Stollnitz, E.J., DeRose, T.D. & Salesin, D.H. (2002) *Veyvlety v komp'yuternoy grafike* [Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications]. Translated from English. Izhevsk : Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika.
15. Shumilov, B.M. (2015) Matrix sweep algorithm for computing multiwavelets of odd order orthogonal to polynomials. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 51(2). pp. 174–183. DOI: 10.3103/S8756699015020119
16. Samarsky, A.A. & Nikolaev, E.S. (1978) *Metody resheniya setochnykh uravneniy* [Methods of solving grid equations]. Moscow: Nauka.
17. Vasilieva, E.A. (2011) Dostatochnye usloviya korrektnosti metoda matrichnoy progonki [Ample conditions of existence of the complete block decomposition]. *Izvestiya KGTU*. 20. pp. 103–108.
18. Schneider, A. (2006) Biorthogonal cubic Hermite spline multiwavelets on the interval with complementary boundary conditions. *Results in Mathematics*. 53(3). pp. 407–416. DOI: 10.1007/s00025-008-0352-y
19. Černá, D. & Finěk, V. (2011) Construction of optimally conditioned cubic spline wavelets on the interval. *Advances in Computational Mathematics*. 34. pp. 519–552. DOI: 10.1007/s10444-010-9152-5