

ТРЕХБАЗИСНЫЕ КВАЗИГРУППЫ С ОБОБЩЕННЫМ ТОЖДЕСТВОМ УОРДА

В.А. Кыров

Горно-Алтайский государственный университет

E-mail: kfizika@gasu.ru

В данной работе изучается трехбазисная частичная квазигруппа с обобщенным тождеством Уорда. Доказывается, что эта квазигруппа является феноменологически симметричной. Изучаются феноменологически симметричные подквазигруппы.

Ключевые слова: квазигруппа, тождество Уорда, трехбазисная квазигруппа с обобщенным тождеством Уорда, трехбазисная феноменологически симметричная квазигруппа.

Как известно, квазигруппой Уорда называется квазигруппа $(C, \circ)$ с тождеством Уорда [1]:

$$(a^\circ b)^\circ (c^\circ b) = (a^\circ c),$$

где $\circ$ – бинарная операция; a, b, c – произвольные элементы множества C . В теории квазигрупп доказывается, что любая квазигруппа Уорда изотопна некоторой группе. В данной работе изучаются трехбазисные частичные квазигруппы с тождеством, обобщающим тождество Уорда, и устанавливается связь таких квазигрупп с физическими структурами. Квазигрупповая терминология приводится по монографии [2].

1. Трехбазисная квазигруппа с обобщенным тождеством Уорда

Пусть B – некоторое множество, а $\Omega_B^n \subset B^n$ – некоторое подмножество.

Определение 1. Трехбазисной квазигруппой с обобщенным тождеством Уорда называется частичная трехбазисная квазигруппа $(B, \Omega_B^n, B, \varphi)$ с отображением $\varphi: B \times \Omega_B^n \rightarrow B$ и системой аксиом К1 – К3.

К1. $\forall \langle x_1, \dots, x_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \Omega_B^n \exists ! y \in \Omega_B^n: \varphi(x_k, y) = b_k, k = 1, \dots, n$.

К2. $\forall y \in \Omega_B^n \forall b \in \Omega_B \exists ! x \in B: \varphi(x, y) = b$, где $\Omega_B \subset B$.

Построим два вспомогательных отображения: $F_z: \Omega_B^n \rightarrow \Omega_B^n, z = \langle z_1, \dots, z_n \rangle \in \Omega_B^n: F_z(y) = (\varphi(z_1 y), \dots, \varphi(z_n y))$, $y \in \Omega_B^n$, и $F_w: B \rightarrow B, w \in \Omega_B: F_w(x) = \varphi(xw), x \in B$. Из аксиом К1 и К2 следует биективность построенных отображений.

К3. Обобщенное тождество Уорда:

$$\varphi(\varphi(x, a_1, \dots, a_n), \varphi(y_1, a_1, \dots, a_n), \dots, \varphi(y_n, a_1, \dots, a_n)) = \varphi(x, y_1, \dots, y_n), \quad (1)$$

где $\langle y_1, \dots, y_n \rangle, \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \Omega_B^n, x \in B$.

По трехбазисной квазигруппе с обобщенным тождеством Уорда $(B, \Omega_B^n, B, \varphi)$ можно построить квазигруппу Уорда (Ω_B^n, ρ) с бинарной операцией

$$\rho(X, Y) = (\varphi(x_1, y_1, \dots, y_n), \dots, \varphi(x_n, y_1, \dots, y_n)),$$

где $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle, Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \in \Omega_B^n$. Аксиомы квазигруппы (Ω_B^n, ρ) следуют из К1 – К3, причем тождество Уорда имеет вид

$$\rho(\rho(X, A), \rho(Y, A)) = \rho(X, Y). \quad (2)$$

Теорема 1. Квазигруппа Уорда (Ω_B^n, ρ) изотопна группе $(\Omega_B^n, \cdot)$ с бинарной операцией $X \cdot Y = \rho(X, \theta(Y))$, где $\theta(A) = \rho(E, A), \rho(A, A) = E$.

Доказательство. Сначала в тождестве (2) положим $Y = A$, тогда $\rho(\rho(X, A), \rho(A, A)) = \rho(X, A)$. Так как точки A и X произвольные, то по свойству однозначной разрешимости уравнений квазигруппы $\rho(A, A) = E$, следовательно, $\rho(A, E) = A$. Обозначим $\theta(A) = \rho(E, A)$ (из определения квазигруппы следует биективность этого отображения). Несложно также доказать, что $\rho(E, \rho(X, A)) = \rho(A, X)$, $\theta(\theta(X)) = X$. Рассмотрим теперь квазигруппу, изотопную квазигруппе Уорда с бинарной операцией $X \cdot Y = \rho(X, \theta(Y))$. Однозначная разрешимость для новой операции очевидна.

Лемма. Квазигруппа $(\Omega_B^n, \cdot)$ является лупой с единицей E .

Действительно, $X \cdot E = \rho(X, \theta(E)) = \langle \theta(E) \rangle = X$; $E \cdot Y = \rho(E, \theta(Y)) = \theta(\theta(Y)) = Y$. ■

Докажем ассоциативность. Рассмотрим тождественное равенство

$$(X \cdot A) \cdot \theta(Y \cdot A) = X \cdot \theta(Y), \quad (*)$$

которое вытекает из (2). Очевидно, $X \cdot Y = \rho(X, \theta(Y)) = \rho(E, \rho(\theta(Y), X)) = \rho(E, \theta(Y) \cdot \theta(X)) = \theta(\theta(Y) \cdot \theta(X))$. Полагая в тождестве (*) $Y = E$ и пользуясь выше доказанной леммой, имеем $(X \cdot A) \cdot \theta(A) = X$. Тогда в тождестве (*) берем $A = Z$, $Y \cdot A = \theta(U)$. Заметим, что $(Y \cdot A) \cdot \theta(A) = \theta(U) \cdot \theta(A) = Y$. Элементарные расчеты дают ассоциативность $(X \cdot Z) \cdot U = X \cdot (Z \cdot U)$. ■

Докажем некоторые свойства трехбазисной квазигруппы с обобщенным тождеством Уорда.

Теорема 2. Справедливы следующие свойства трехбазисной квазигруппы $(B, \Omega_B^n, B, \varphi)$ с обобщенным тождеством Уорда (1):

1) $\varphi(a_1, a_1, \dots, a_n) = e_1, \dots, \varphi(a_n, a_1, \dots, a_n) = e_n, \forall A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \Omega_B^n, E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \in \Omega_B^n$ – постоянная точка;

2) $\varphi(x, e_1, \dots, e_n) = x$;

3) $\varphi(e_1, a_1, \dots, a_n) = \theta_1(a_1, \dots, a_n), \dots, \varphi(e_n, a_1, \dots, a_n) = \theta_n(a_1, \dots, a_n)$;

4) $\varphi(e_1, \theta_1(a_1, \dots, a_n), \dots, \theta_n(a_1, \dots, a_n)) = a_1, \dots, \varphi(e_n, \theta_1(a_1, \dots, a_n), \dots, \theta_n(a_1, \dots, a_n)) = a_n$.

Доказательство. Воспользуемся связью трехбазисной квазигруппы $(B, \Omega_B^n, B, \varphi)$ с квазигруппой Уорда (Ω_B^n, ρ) . Тогда свойства 1 – 4 будут результатом покомпонентной записи соответствующих свойств квазигруппы (Ω_B^n, ρ) . Другими словами, 1 – это покомпонентная запись равенства $\rho(A, A) = E$, 2 – соответственно тождества $\rho(A, E) = A$, 3 – равенства $\rho(E, A) = \theta(A)$ и, наконец, 4 – тождества $\theta(\theta(X)) = X$. ■

2. Трехбазисная феноменологически симметричная квазигруппа ранга $(n+1, 2)$ и ее связь с трехбазисной квазигруппой с обобщенным тождеством Уорда

Рассмотрим три множества M, N, B и отображение $f: M \times N \rightarrow B$, называемое метрическим. Пусть выполняются аксиомы [2]:

A1. $\forall \langle i_1, \dots, i_n \rangle \in \Omega_M^n \forall \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \Omega_B^n \exists ! \alpha \in N: f(i_k \alpha) = b_k, k = 1, \dots, n$, где $\Omega_M^n \subset M^n$ и $\Omega_B^n \subset B^n$.

A2. $\forall \alpha \in \Omega_N \forall b \in B \exists ! i \in M: f(i \alpha) = b$, где $\Omega_N \subset N$.

A3. $\forall \langle i_0, i_1, \dots, i_n \rangle \in M \times \Omega_M^n \forall \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \in N \times \Omega_N$ существует связь

$$f_{00} = g(f_{01}, f_{11}, \dots, f_{n1}, f_{10}, \dots, f_{n0}),$$

где $f_{mn} = f(i_m, \alpha_n)$.

Построим два вспомогательных отображения: $F_j: N \rightarrow \Omega_B^n, j = \langle j_1, \dots, j_n \rangle \in \Omega_M^n$, с явным видом $F_j(\alpha) = (f(j_1 \alpha), \dots, f(j_n \alpha))$, и $F_\gamma: M \rightarrow B, \gamma \in \Omega_N: F_\gamma(i) = f(i \gamma)$. Из аксиом A1 и A2 следует биективность этих отображений.

Определение 2. Говорят, что на множествах M, N, B с метрическим отображением $f: M \times N \rightarrow B$ задана физическая структура ранга $(n+1, 2)$, если выполняются аксиомы A1 – A3.

Из аксиом A1, A2 также следует, что на множествах M, N, B определена частичная трехбазисная квазигруппа с операцией f . По аксиоме A3 это специальная трехбазисная квазигруппа, которую будем называть феноменологически симметричной ранга $(n+1, 2)$ и обозначать (M, N, B, f) .

Обозначим $x = f(i \gamma), y_1 = f(j_1 \alpha), \dots, y_n = f(j_n \alpha)$. Тогда метрическое отображение можно переписать так:

$$f(i \alpha) = f(F^{-1}_\gamma(x), F^{-1}_j(y_1, \dots, y_n)) = \bar{f}(x, y_1, \dots, y_n).$$

Построенное отображение $\bar{f}: B \times \Omega_B^n \rightarrow B$, очевидно, удовлетворяет таким аксиомам:

B1. $\forall \langle x_1, \dots, x_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \Omega_B^n \exists ! y \in B: \bar{f}(x_k y) = b_k, k = 1, \dots, n$.

B2. $\forall y \in \Omega_B^n \forall b \in \Omega_B \exists ! x \in B: \bar{f}(x, y) = b$.

B3. $\forall \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in B \times \Omega_B^n \forall \langle z_0, z_1 \rangle \in \Omega_B^n \times \Omega_B^n$ существует связь

$$\bar{f}_{00} = g(\bar{f}_{01}, \bar{f}_{11}, \dots, \bar{f}_{n1}, \bar{f}_{10}, \dots, \bar{f}_{n0}),$$

где $\bar{f}_{ij} = \bar{f}(x_i, z_j)$.

Таким образом, отображение $\bar{f}$ задает физическую структуру ранга $(n+1, 2)$. Другими словами, определена феноменологически симметричная трехбазисная квазигруппа ранга $(n+1, 2)$, которую обозначим $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$.

По квазигруппе $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$ строится новая частичная трехбазисная квазигруппа $(B^n, \Omega_B^n, B^n, \bar{F})$ с бинарной операцией

$$\bar{F}(XY) = (\bar{f}(x_1, y_1, \dots, y_n), \dots, \bar{f}(x_n, y_1, \dots, y_n)), \quad (3)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n) \in B^n; Y = (y_1, \dots, y_n) \in \Omega_B^n$.

Теорема 3. Для трехбазисной квазигруппы $(B^n, \Omega_B^n, B^n, \bar{F})$ выполняется тождество, обобщающее ассоциативность

$$X(YZ) = (XY)Z,$$

где $X \in B^n, Y, Z \in \Omega_B^n$.

Доказательство можно найти в работе [3].

Если в бинарной операции (3) $X \in \Omega_B^n$, то $\bar{F}(XY) \in \Omega_B^n$. Из теоремы 3 тогда следует, что Ω_B^n является группой с бинарной операцией (3) и единицей $E = (e_1, \dots, e_n) = (f(j_1 \gamma), \dots, f(j_n \gamma))$. Поэтому трехбазисная ква-

зигруппа $(B^n, \Omega_B^n, B^n, \bar{f})$ является почти просто транзитивной группой преобразований множества B^n с параметрической группой Ω_B^n . Тогда, очевидно, феноменологически симметричная трехбазисная квазигруппа ранга $(n+1, 2)$ $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$ является транзитивной группой преобразований множества B с параметрической группой Ω_B^n .

Теорема 4. Тождество из аксиомы БЗ для феноменологически симметричной трехбазисной квазигруппы ранга $(n+1, 2)$ $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$ эквивалентно обобщенному тождеству Уорда:

$$\tilde{f}(\tilde{f}(x, a_1, \dots, a_n), \tilde{f}(y_1, a_1, \dots, a_n), \dots, \tilde{f}(y_n, a_1, \dots, a_n)) = \tilde{f}(x, y_1, \dots, y_n) \quad (4)$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{f}(x, a_1, \dots, a_n), \tilde{f}(y_1, a_1, \dots, a_n), \dots, \tilde{f}(y_n, a_1, \dots, a_n)) = \\ = \tilde{f}(\tilde{f}(x, b_1, \dots, b_n), \tilde{f}(y_1, b_1, \dots, b_n), \dots, \tilde{f}(y_n, b_1, \dots, b_n)), \end{aligned} \quad (4')$$

где $\tilde{f}(x, y_1, \dots, y_n) = \bar{f}(x, (y_1, \dots, y_n)^{-1})$, $\forall \langle y_1, \dots, y_n \rangle, \langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \Omega_B^n, x \in B$.

Доказательство. Из определения отображений $\bar{f}$ и $\tilde{f}$ следует выполнимость аксиомы Б2, т. е. однозначная разрешимость этих функций относительно первого аргумента. Поэтому, разрешая тождество (4') относительно первого аргумента левой части, получаем аксиому БЗ.

Докажем теперь обратное. Для этого в тождестве теоремы 3 положим $Y = A$, $Z = (YA)^{-1}$. После приведения подобных имеем $(XA)(YA)^{-1} = XY^{-1}$. Каждая компонента этого тождества совпадает с (4). ■

Из теоремы 4 следует, что четверка $(B, \Omega_B^n, B, \tilde{f})$ также образует феноменологически симметричную трехбазисную квазигруппу ранга $(n+1, 2)$, изотопную квазигруппе $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$.

Из теоремы 4 вытекает, что трехбазисная феноменологически симметричная квазигруппа $(B, \Omega_B^n, B, \tilde{f})$ ранга $(n+1, 2)$ является трехбазисной квазигруппой с обобщенным тождеством Уорда (1). Верно и обратное.

Теорема 5. Трехбазисная квазигруппа (B, Ω_B^n, B, ϕ) с обобщенным тождеством Уорда является трехбазисной феноменологически симметричной квазигруппой ранга $(n+1, 2)$.

Доказательство. Пусть (B, Ω_B^n, B, ϕ) – трехбазисная квазигруппа с обобщенным тождеством Уорда (1). С ее помощью строится квазигруппа Уорда (Ω_B^n, ρ) , изотопная группе. Для этого изотопы, очевидно, можно записать тождество (4). Тогда все свойства феноменологически симметричной трехбазисной квазигруппы ранга $(n+1, 2)$ будут выполнены. ■

Таким образом, существует два способа определения физической структуры ранга $(n+1, 2)$. Первый основан на аксиоме АЗ, а второй – на обобщенном тождестве Уорда (1).

3. Феноменологически симметричные трехбазисные подквазигруппы ранга $(k+1, 2)$

Рассмотрим феноменологически симметричную трехбазисную квазигруппу $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$ ранга $(n+1, 2)$, которая, напомним, является группой преобразований множества B . Из аксиомы Б1 вытекает транзитивность этой группы преобразований. Рассмотрим ее стационарную подгруппу $G_{e_n} = (B', \Omega_B'^{n-1}, B', \bar{f})$ [4], оставляющую на месте точку e_n , $B' \subset B$ – совокупность точек, подвижных относительно этой подгруппы. Заметим, что параметрическая группа $\Omega_B'^{n-1}$ стационарной подгруппы G_{e_n} изоморфна группе, состоящей из совокупности точек $X = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, e_n \rangle$, $Y = \langle y_1, \dots, y_{n-1}, e_n \rangle \in \Omega_B'^{n-1} \subset \Omega_B^n$; $\bar{f}(XY) \in \Omega_B'^{n-1}$. Тогда

$$\bar{f}(x, y_1, \dots, y_{n-1}, e_n) = x', \quad \bar{f}(e_p, y_1, \dots, y_{n-1}, e_n) = y_p, \quad \bar{f}(e_n, y_1, \dots, y_{n-1}, e_n) = e_n, \quad (5)$$

где $p = 1, \dots, n-1$. Несложно проверить, что для множества $(B', \Omega_B'^{n-1}, B', \bar{f})$ выполняются аксиомы Б1 – Б3. Легко доказываются аксиомы Б1, Б2. Для проверки аксиомы Б3 необходимо в тождестве (4) положить $a_n = y_n = e_n$, а затем воспользоваться равенствами (5). Таким образом, $(B', \Omega_B'^{n-1}, B', \bar{f})$ – феноменологически симметричная частичная трехбазисная подквазигруппа ранга $(n, 2)$ в $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$. Эта подквазигруппа задает физическую структуру ранга $(n, 2)$.

Две феноменологически симметричные квазигруппы $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$ и $(B', \Omega_B'^n, B', \bar{f}')$ ранга $(n+1, 2)$ будем называть эквивалентными, если группы Ω_B^n и $\Omega_B'^n$ изоморфны.

Теорема 6. Две феноменологически симметричные трехбазисные подквазигруппы $(B', \Omega_B'^{n-1}, B', \bar{f}')$ и $(B'', \Omega_B''^{n-1}, B'', \bar{f}'')$ ранга $(n, 2)$ квазигруппы $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$ с неподвижными точками e_n и e'_n , эквивалентны.

Доказательство. Из определения стационарной подгруппы следует, что группы $(B', \Omega_B'^{n-1}, B', \bar{f}')$ и $(B'', \Omega_B''^{n-1}, B'', \bar{f}'')$ сопряжены [4], следовательно, изоморфны. ■

Если в стационарной подгруппе $G_{e_n} = (B', \Omega_B'^{n-1}, B', \bar{f})$ зафиксировать еще одну точку, то, очевидно, получится феноменологически симметричная частичная трехбазисная подквазигруппа ранга $(n, 2)$ в $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$, значит, по теореме 6 эта подквазигруппа будет единственна, с точностью до эквивалентности.

Продолжая фиксировать точки, получим феноменологически симметричную частичную трехбазисную подквазигруппу ранга $(k+1, 2)$ в $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$, $k < n$, причем имеет место следующая теорема, аналогичная 6.

Теорема 6'. Две феноменологически симметричные трехбазисные подквазигруппы $(B', \Omega_B'^k, B', \bar{f}')$ и $(B'', \Omega_B''^k, B'', \bar{f}'')$ ранга $(k+1, 2)$ квазигруппы $(B, \Omega_B^n, B, \bar{f})$ с неподвижными точками $\{e_m\}$ и $\{e'_m\}$, эквивалентны. ■

4. Пример

Рассмотрим феноменологически симметричную трехбазисную квазигруппу ранга $(4, 2)$ на проективной прямой RP . В таком случае $B = RP$, а метрическое отображение – это проективное преобразование в RP :

$$\bar{f} = \frac{ax+b}{cx+d}, u = \frac{ae_1+b}{ce_1+d}, v = \frac{ae_2+b}{ce_2+d}, w = \frac{ae_3+b}{ce_3+d},$$

где $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \in \Omega_{RP}$, матрица из коэффициентов обратима. Обобщенное тождество Уорда (4) выражается через сложное отношение четырех точек. Рассмотрим теперь феноменологически симметричную трехбазисную подквазигруппу ранга $(3, 2)$, т. е. зафиксируем точку e_3 :

$$\bar{f} = \frac{ax+b}{cx+d}, u = \frac{ae_1+b}{ce_1+d}, v = \frac{ae_2+b}{ce_2+d}, e_3 = \frac{ae_3+b}{ce_3+d}.$$

Эта подквазигруппа эквивалентна полной аффинной группе преобразований прямой R (теорема 6):

$$\bar{f} = ax + b.$$

И наконец, рассмотрим феноменологически симметричную трехбазисную подквазигруппу ранга $(2, 2)$, т.е. зафиксируем две точки e_2 и e_3 :

$$\bar{f} = \frac{ax+b}{cx+d}, u = \frac{ae_1+b}{ce_1+d}, e_2 = \frac{ae_2+b}{ce_2+d}, e_3 = \frac{ae_3+b}{ce_3+d}.$$

В явном виде метрическое отображение следующее:

$$\bar{f} = \frac{xu(e_2 + e_3 - e_1) - xe_2e_3 - ue_2e_3 + e_1e_2e_3}{xu - xe_1 - ue_1 - e_2e_3 + e_1(e_2 + e_3)}.$$

Оно задает групповую бинарную операцию в $B' = RP/\{e_2, e_3\}$ с единицей e_1 , которая изоморфна мультипликативной группе поля действительных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chatterjea S.K. On Ward quasigroups // Pure Math. Manuscript. 1987. V. 6. P. 31 – 34.
2. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.
3. Симонов А.А. Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур // Приложение к книге Ю.И. Кулакова «Теория физических структур». М., 2004.
4. Горбачевич В.В., Онищик А.Л. Группы Ли преобразований // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. Т. 20. С. 108 – 248.