ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/1/15

УДК 519.17

СЕМЕЙСТВА ТОЧНЫХ РАСШИРЕНИЙ ТУРНИРОВ

М.Б. Абросимов, А.А. Долгов

Саратовский государственный университет

E-mail: mic@rambler.ru

В работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с точными расширениями турниров. Обобщается одно семейство, полученное ранее, и предлагаются два новых бесконечных семейства турниров, имеющих точные 1-расширения.

Ключевые слова: *орграф*, *турнир*, *минимальное расширение*, *точное расширение*, *оптимальная отказоустойчивая реализация*, *точная отказоустойчивая реализация.*

Ориентированным графом (далее – *орграфом*) называется пара $G = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество, называемое *множеством вершин*, а α – отношение на множестве вершин V, называемое *отношением смежности.*

Граф с симметричным и антирефлексивным отношением смежности называется *неориентированным графом* (далее – *графом*). Граф с антисимметричным отношением смежности называется *направленным графом* или *диграфом*. Граф с пустым отношением смежности называется вполне несвязным и обозначается O_n, где n – число вершин. Орграф с универсальным отношением смежности называется полным и обозначается $\overrightarrow{K_n}$.

Симметризацией орграфа $\vec{G} = (V, \alpha)$ называется граф $G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1}) \setminus \Delta)$, то есть симметризация орграфа получается заменой дуг ребрами и удалением петель. Симметризация полного орграфа $\overrightarrow{K_n}$ называется *полным* (*неориентированным*) *графом* и обозначается K_n. Полный диграф без петель называется *турниром* и обозначается T_n. Турнир можно рассматривать как граф, получающийся из полного графа K_n приданием каждому ребру некоторой ориентации. Основные определения даются в соответствии с работой [1].

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое взаимно однозначное отображение $f : V_1 \to V_2$, что для любых вершин $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: $(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$.

Два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие $f : V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности: $(u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$, для любых $u, v \in V_1$. В этом случае пишут $G_1 \cong G_2$.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным k-расширением* (k – натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1. G^* является k-расширением G, то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин.
2. G^* содержит $n+k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$.
3. α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Граф G_t^* называется *точным k-расширением* графа G, если любой граф, получающийся удалением произвольных k вершин графа G_t^*, изоморфен графу G.

Понятие минимального k-расширения введено на основе понятия оптимальной k-отказоустойчивой реализации, которое было предложено Хейзом в работе [2]. Понятие точного расширения впервые было введено Харари и Хейзом в работе [3], где рассматривались неориентированные графы. Там же были предложены некоторые семейства графов, которые имеют точное расширение. В работе [4] удалось установить, что среди неориентированных графов только полный и вполне несвязный графы имеют точные k-расширения при любом k. Среди остальных графов выделяются графы, имеющие степенное множество вида $\{b, b-1\}$, у которых число вершин степени $b-1$ в точности равно b. Такие графы могут иметь точное 1-расширение, но не могут иметь точное k-расширение ни при каком $k > 1$. В работах [5, 6] удалось установить связь точных k-

расширений орграфов с точными k-расширениями неориентированных графов и предложить два семейства точных расширений турниров. Данная работа является продолжением в исследовании семейств точных расширений турниров. Приведем некоторые результаты, полученные ранее в [5, 6].

Теорема 1. Пусть $\overrightarrow{G^*} = (V^*, \alpha^*)$ – точное k-расширение орграфа $\vec{G} = (V, \alpha)$. Тогда отношения смежности α и α^* являются одновременно либо рефлексивными, либо антирефлексивными.

Теорема 2. Пусть $\overrightarrow{G^*}$ – точное k-расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда симметризация $\overrightarrow{G^*}$ является точным k-расширением симметризации $\vec{G}$.

Теорема 3. Пусть G – диграф с числом вершин, большим 1, тогда его точное k-расширение, если оно есть, также будет диграфом.

Теорема 4. Пусть $\overrightarrow{G^*}$ – точное k-расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда дополнение $\overrightarrow{G^*}$ является точным k-расширением дополнения $\vec{G}$.

Из приведенных теорем следует, что точное k-расширение турнира, если оно существует, также является турниром. Причем дополнение турнира (а это тоже будет турнир) также будет иметь точное k-расширение.

Изоморфизм графа на самого себя называется *автоморфизмом*. Две вершины u и v графа G называются *подобными*, если существует автоморфизм графа G, при котором образом вершины u является вершина v. Граф, все вершины которого подобны, называется *вершинно-симметрическим*. Граф, не имеющий ни одной пары подобных вершин, называется *асимметричным*.

Для неориентированных графов в работе [7] было доказано, что граф тогда и только тогда является точным 1-расширением, когда он является вершинно-симметрическим. Оказывается, что для орграфов в общем случае подобное утверждение неверно. Далее будут указаны турниры, которые не являются вершинно-симметрическими графами, но являются точными 1-расширениями. Связь точных расширений с вершинно-симметрическими орграфами может быть уточнена следующим образом (см. [6]):

Теорема 5. Всякий вершинно-симметрический орграф является точным 1-расширением подходящего орграфа.

1. Семейство транзитивных турниров (T)

Первое из рассматриваемых в данной работе семейств точных расширений турниров – семейство транзитивных турниров – было впервые описано в работе [5]. *Транзитивный турнир* – это турнир, у которого из существования дуг (u, v) и (v, w) вытекает существование дуги (u, w). В частности, в работе [5] доказывается следующая

Теорема 6. Единственным минимальным k-расширением транзитивного турнира T_n при $n > 2$ является транзитивный турнир T_{n+k}. Причем это расширение является и его точным k-расширением.

При $n = 2$ транзитивный турнир T_2 имеет два точных 1-расширения – циклическую и транзитивную тройки. На рис. 1 указана схема построения транзитивного турнира.

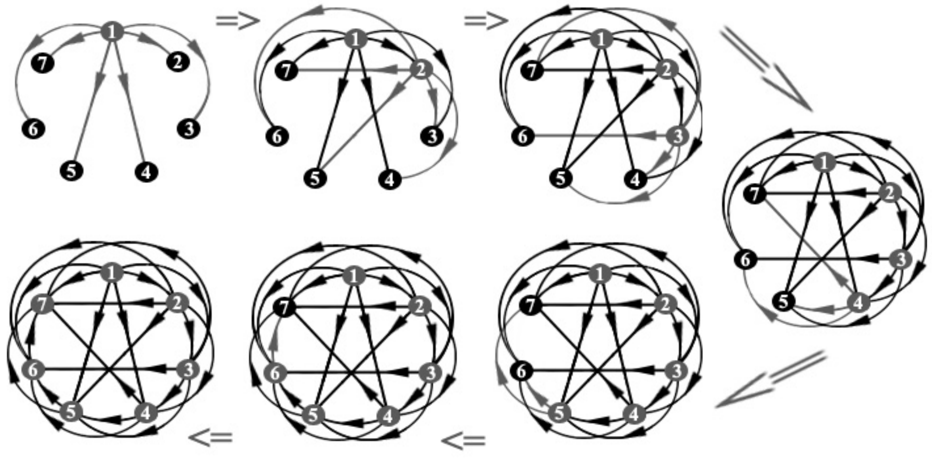

Рис. 1

Как видно из схемы, для построения n-вершинного транзитивного турнира необходимо каждую вершину v_i соединить с вершинами v_{i+1}, v_{i+2}, …, v_n. Очевидно, что для любого числа вершин существует в точности один транзитивный турнир. Транзитивный турнир является *самодополнительным* графом, то есть он изоморфен своему дополнению. На основе транзитивных турниров удалось предложить новое семейство – семейство полутранзитивных турниров, описываемое далее.

Заметим, что в транзитивном турнире все вершины имеют различные полустепени исхода и захода, и следовательно, в нем нет ни одной пары подобных вершин, то есть транзитивный турнир является асимметрическим графом. Таким образом, для орграфов могут существовать точные k-расширения, являющиеся ассиметричными графами. Семейство транзитивных турниров – первое и пока единственное, найденное из таких семейств.

2. Семейство вершинно-симметрических турниров (S)

В работе [6] предлагается схема построения семейства вершинно-симметрических турниров (см. рис. 2).

Рассмотрим полный $(2n + 1)$-вершинный граф K_{2n+1}. Разместим его вершины в вершинах правильного n-угольника. Ориентируем ребра K_{2n+1} следующим образом. Для произвольной вершины v и n следующих за ней по часовой стрелке вершин ребра ориентируем в направлении от v, а для оставшихся n вершин, расположенных от v против часовой стрелки, ориентируем ребра в направлении к v. После проведенной ориентации все вершины будут иметь степени исхода и захода равными n.

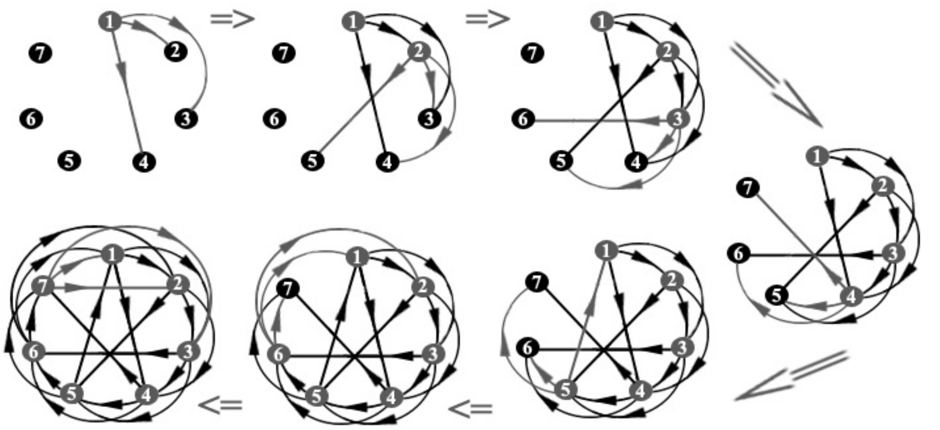

Рис. 2

Очевидно, что построенный по описанной схеме турнир будет являться вершинно-симметрическим, более того, он обладает *циклической симметрией*. По теореме 5 любой вершинно-симметрический граф является точным 1-расширением некоторого подходящего графа. Однако предложенная схема не перечисляет всех вершинно-симметрических турниров.

Рассмотрим алгоритм построения вершинно-симметрических турниров с циклической симметрией.

Пусть G – произвольный вершинно-симметрический граф. Все вершины у такого графа подобны. Это означает, что если такой граф обладает циклической симметрией, то, расположив вершины по кругу, дуги можно нарисовать так, что при повороте графа на угол $360/n$ в любую сторону будет все время получаться одно и то же изображение. Матрица смежности изображенного таким образом графа будет обладать интересным свойством: каждая строка матрицы будет получаться из предыдущей строки циклическим сдвигом на одну позицию вправо. Таким образом, чтобы перебрать все вершинно-симметрические графы с циклической симметрией, необходимо перебрать все возможные первые строки матрицы смежности и достроить последующие по указанному алгоритму. Однако таким образом могут получиться не только турниры.

На главной диагонали матрицы смежности турнира всегда будут нули. Попробуем разместить в первой позиции единицу и достроить матрицу по указанному алгоритму:

$$
\begin{array}{c}
01xxxx\mathbf{0}\\
\mathbf{0}01xxxx\\
x\mathbf{0}01xxx\\
xx\mathbf{0}01xx\\
xxx\mathbf{0}01x\\
xxxx\mathbf{0}01\\
1xxxx\mathbf{0}0
\end{array}
$$

Поскольку у турнира нет встречных дуг, то на последней позиции первой строки необходимо поставить ноль. Таким образом, в случае турниров половина первой строки матрицы смежности при использовании предложенного алгоритма однозначно определяет вторую половину.

Для построения всех n-вершинных вершинно-симметрических турниров с циклической симметрией необходимо перебирать не всю первую строку матрицы смежности, а только половину, вторая половина получается из первой, если ее перевернуть и инвертировать, то есть заменить 0 на 1, а 1 на 0.

Очевидно, что вершинно-симметрические турниры существуют только при нечетном числе вершин. Дополнение турнира с циклической симметрией также является турниром с циклической симметрией и таким образом будет построено по этой же схеме.

3. Семейство турниров точных 1-расширений с четным числом вершин (E1)

На рис. 3 приведена схема построения семейства турниров с числом вершин вида $n = 4*k+2$. Для построения необходимо расположить вершины по кругу. Далее проводим дуги из каждой нечетной вершины в $n/2$ последующих, а из каждой четной в $n/2 - 1$ последующих вершин.

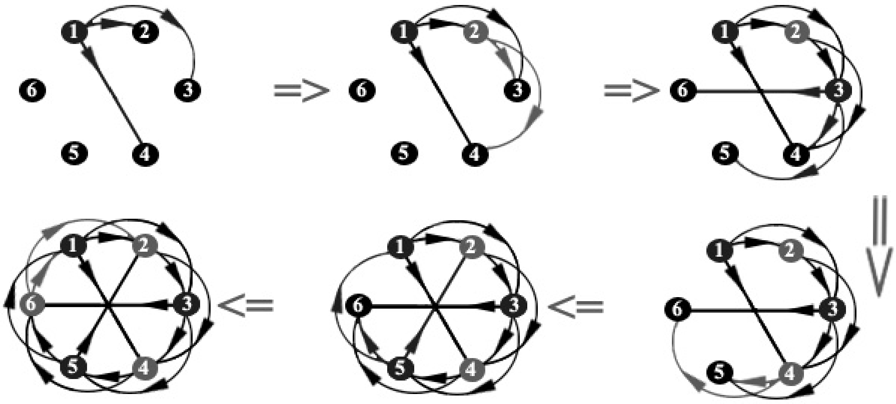

Рис. 3

Теорема 7. Турниры с числом вершин вида $n = 4*k+2$, построенные по указанной схеме, являются точными 1-расширениями.

Доказательство. Покажем, что схема действительно позволяет строить точные 1-расширения турниров. По построению имеем две группы подобных вершин. На рис. 3 это вершины с четными и нечетными метками. Каждая вершина с нечетным номером имеет степень исхода $n/2$, каждая вершина с четным номером – степень исхода $n/2–1$.

Разобьем все множество вершин на пары: [1, 2] [3, 4] [5, 6], …

Рассмотрим произвольную пару $[v_i, v_i+1]$:

Вершина v_i соединена с $n/2$ вершинами $v_i+1, v_i+2, \ldots, v_i+n/2$.

Вершина v_i+1 соединена с $n/2–1$ вершиной $v_i+2, \ldots, v_i+n/2$.

Таким образом, у каждой пары совпадают все дуги, кроме одной, которая находится между ними.

Так как $n = 4*k+2$, то $n/2$ будет нечетным числом, $n/2–1$ четным, таким образом, дуги исходящие из произвольной пары, захватывают другие пары целиком, не разбивая их. В обобщенном виде это утверждение можно записать так: $[v_i, v_i+1] \Rightarrow [v_i+2, v_i+3], [v_i+4, v_i+5], [v_i+6, v_i+7] \ldots [v_i+n/2–1, v_i+n/2]$.

Из всего вышесказанного легко заметить, что графы, полученные при удалении одной вершины пары, будут изоморфны. Действительно, рассмотрим произвольную пару: в нее входят дуги из $(n–2)/4$ предыдущих пар, и из нее выходят дуги в $(n–2)/4$ последующих пар. При удалении одной из вершин пары получаем вершину, в которую входят дуги из тех же $n/4$ пар и выходят дуги в те же $n/4$ пары.

Так как все вершины с четными и нечетными метками подобны и граф, получающийся при удалении некоторой вершины с четной меткой, изоморфен графу, получающемуся при удалении некоторой вершины с нечетной меткой, то все подграфы любого графа семейства будут изоморфны. ■

Заметим, что представители данного семейства не являются вершинно-симметрическими графами.

4. Семейство полутранзитивных турниров (H)

Известно, что у транзитивного турнира (как и у любого бесконтурного графа) существует правильная нумерацию вершин, при которой дуга идет только из вершины с меньшим номером в вершину с большим. При правильной нумерации вершин матрица смежности транзитивного турнира станет верхней треугольной матрицей. Полутранзитивный турнир получается из транзитивного турнира с числом вершин $n = 3*k$ по схеме, указанной на рис. 4.

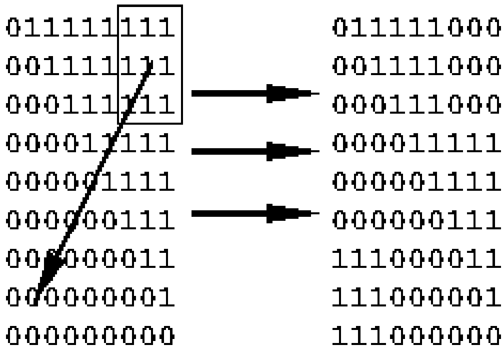

Рис. 4

Как видно из схемы, для построения полутранзитивного турнира необходимо в матрице смежности транзитивного турнира переориентировать правый верхний ее квадрат $n/3 \times n/3$.

Теорема 8. Каждый полутранзитивный турнир является точным 1-расширением подходящего турнира.

Доказательство. Пусть T – полутранзитивный турнир с числом вершин $n = 3*k$, матрица смежности которого получена по схеме, изображенной на рис. 4. Обозначим его вершины через $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Если удалять по одной вершине из турнира T, то будут получены три группы матриц смежности определенного вида (рис. 5), а все множество вершин будет разбито на три класса подобных вершин.

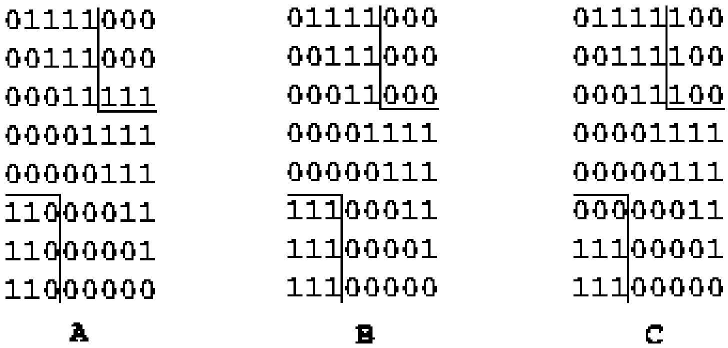

Рис. 5

Очевидно, что для того, чтобы из матрицы вида A получить матрицу вида C, необходимо часть вершин, расположенных в начале, перенести в конец по следующей схеме: $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots v_n \Rightarrow v_{n/3}, v_{n/3+1}, \ldots, v_n, v_{n/3-1}, v_{n/3-2}, \ldots, v_1$ (рис. 6).

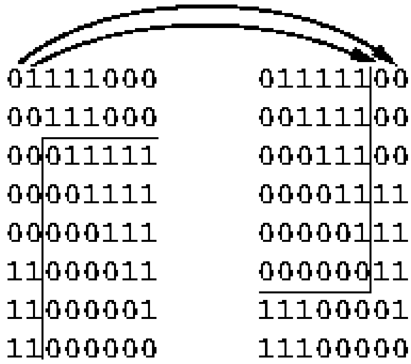

Рис. 6

Если продолжить процесс и переставить еще $n/3$ вершин по заданной схеме в матрице вида C, то получится матрица вида B (рис. 7).

```
01111100   01111000   01110000   01111000
00111100   00111000   00111100   00111000
00011100   00011110   00011100   00011000
00001111   00001110   00001100   00001111
00000111   00000110   10000111   00000111
00000011   11000011   10000011   11100011
11100001   11000001   11110001   11100001
11100000   11111000   11110000   11100000
```

Рис. 7

Таким образом, все максимальные подграфы полутранзитивного турнира изоморфны. ■

Далее в таблице указываются все турниры с числом вершин до 10 и их точные 1-расширения, а также семейства, к которым относятся эти точные 1-расширения. Турниры в таблице представлены своими максимальными минорными кодами (см. [6]) и векторами, составленными из степеней исхода вершин в порядке неубывания. В 1-м и 4-м столбцах указывается число вершин турнира и его точного 1-расширения соответственно.

В приведенной таблице только два турнира не принадлежат ни одному из описанных семейств: 5-вершинный турнир с кодом 982 и 9-вершинный турнир с кодом 68424641622. Дополнительный интерес эти турниры представляют тем, что они имеют точные 1- и 2-расширения, не имея точных k-расширений при $k > 2$. Такая ситуация невозможна для неориентированных графов, а для орграфов это пока единственные известные примеры.

N	Максимальный минорный код турнира	Вектор степеней турнира	N	Семейство	Максимальный минорный код точного 1-расширения	Вектор степеней точного расширения
2	1	(0, 1)	**3**	S, H	5	(1, 1, 1)
2	1	(0, 1)	**3**	T	7	(0, 1, 2)
3	7	(0, 1, 2)	**4**	T	63	(0, 1, 2, 3)
4	59	(1, 1, 2, 2)	**5**	S	947	(2, 2, 2, 2, 2)
4	63	(0, 1, 2, 3)	**5**	T	1023	(0, 1, 2, 3, 4)
5	**982**	**(1, 2, 2, 2, 3)**	**6**		**31435**	**(2, 2, 2, 3, 3, 3)**
5	1011	(1, 2, 2, 2, 3)	**6**	E1, H	32359	(2, 2, 2, 3, 3, 3)
5	1023	(0, 1, 2, 3, 4)	**6**	T	32767	(0, 1, 2, 3, 4, 5)
6	**31435**	**(2, 2, 2, 3, 3, 3)**	**7**	S	**2011853**	**(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)**
6	32487	(2, 2, 2, 3, 3, 3)	**7**	S	2079175	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
6	32767	(0, 1, 2, 3, 4, 5)	**7**	T	2097151	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)
7	2097151	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)	**8**	T	268435455	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
8	267242391	(3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)	**9**	S	68414052123	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)
8	267716381	(3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)	**9**	S	68535393593	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)
8	268298127	(3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)	**9**	S	68684320527	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)
8	268428175	(2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5)	**9**	H	68717612831	(3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5)
8	268435455	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)	**9**	T	68719476735	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)
9	**68424641622**	**(3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5)**	**10**		**35033416510570**	**(4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5)**
9	68717879055	(3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5)	**10**	E1	35183554076191	(4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5)
9	68719476735	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)	**10**	T	35184372088831	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
10	**35033416510570**	**(4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5)**	**11**	S	**35874218506823866**	**(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)**
10	35183822519839	(4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5)	**11**	S	36028234260315167	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
10	35105255749749	(4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5)	**11**	S	35947781887743157	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
10	35175217913391	(4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5)	**11**	S	36019423143312439	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
10	35184372088831	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)	**11**	T	36028797018963967	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А.М.*, *Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
2. *Hayes J.P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C-25. No. 9. P.875 – 884.
3. *Harary F.*, *Hayes J.P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19 – 23.
4. *Абросимов М.Б.* Минимальные расширения дополнений графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов: СГУ, 2001. Вып. 4. С. 11 – 19.
5. *Абросимов М.Б.* Минимальные расширения транзитивных турниров // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 17. С. 187 – 190.
6. *Абросимов М.Б.*, *Долгов А.А.* Точные расширения некоторых турниров // Вестник ТГУ. Приложение. 2007. № 23. С. 211 – 216.
7. *Абросимов М.Б.* Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов // Изв. Саратовского университета. 2006. № 6. С. 86 – 91.