2008 Прикладная теория графов № 1(1)
DOI 10.17223/20710410/1/17
УДК 681.3 + 519.21

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЁТОК В 1-ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫЕ ГРАФЫ

И.А. Науменко, В.Г. Скобелев

Донецкий национальный технический университет
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, *г. Донецк*

E-mail: e-one@bk.ru , skbv@iamm.ac.donetsk.ua

Решается задача преобразования трансляцией по циклической группе графа некоторых n-мерных решёток в 1-отказоустойчивые графы. Оценен ряд характеристик результирующих графов.

Ключевые слова: *графы*, 1-*отказоустойчивые системы.*

В работе исследуется задача преобразования n-мерных решёток в 1-отказоустойчивые графы методом, предложенным в [1]. Детально этот метод изложен в [2, 3]. Предполагается, что в преобразуемом графе существует гамильтонов путь либо цикл [4]. При их отсутствии исходный граф преобразуется в граф, имеющий гамильтонов путь. Реконфигурация при отказах производится преобразованием отказавшей вершины (связи) на избыточную с соответствующим переименованием вершин графа по одной из следующих групп автоморфизмов: циклической группе вращений (поворот на угол $\frac{2\pi}{n}i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$) или диэдральной группе симметрий.

Структура работы следующая: в п. 1 даны основные понятия и определения; в п. 2 исследуется преобразование простых прямоугольных n-мерных решеток, а в п. 3 – диагональных прямоугольных n-мерных решеток. Заключение содержит ряд выводов.

1. Основные понятия

Исходный объект – граф $G = (V, E)$, где V – множество вершин, E ($E \subseteq V^{(2)}$) – множество рёбер. Задачей исследования является построение такого графа $G^* = (V_1, E_1)$, что при удалении одной его вершины либо ребра редуцированный граф $G^*_{\text{ред}}$ содержит подграф $G^\#$, изоморфный G. При этом естественно строить не избыточный граф G^*, т.е. граф, который теряет свойство «быть 1-отказоустойчивым» при удалении хотя бы одной вершины либо ребра. Особый интерес представляют минимальные 1-отказоустойчивые графы, т.е. которые содержат наименьшее число вершин и ребер. В 1-отказоустойчивом графе G^* существуют ребра 2-х типов: рабочие и избыточные, т.е. те, которые появились в результате преобразования графа к виду 1-отказоустойчивого графа G^*. Назовем степенью вершинной избыточности графа G число $\nu_{\text{в}}(G) = |V_1|\cdot|V|^{-1}$, а степенью рёберной избыточности графа G – число $\nu_{\text{р}}(G) = |E_1|\cdot|E|^{-1}$. В дальнейшем считаем, что $V = \mathbf{Z}_k$, и, следуя [3], сохраним термин «ребро» только за такими элементами $\{z_i, z_j\} \in E$, что $|z_i - z_j| = 1$, а элемент $\{z_i, z_j\} \in E$, для которого $|z_i - z_j| > 1$, будем называть хордой длины l. Пусть $S_l(G)$ $(l \geq 2)$ – число хорд длины l в графе G, а $S(G)$ – общее число хорд в графе G, т.е.

$$S(G) = \sum_{l \geq 2} S_l(G)\,. \tag{1}$$

Пусть $S^{\text{раб}}(G^*)$ и $S^{\text{изб}}(G^*)$ – соответственно число рабочих и избыточных хорд в графе G^*. Тогда $S^{\text{раб}}(G^*) = S(G)$ и $S^{\text{изб}}(G^*) = S(G^*) - S^{\text{раб}}(G^*)$. Пусть $E(G)$ – число рёбер в графе G, а $E^{\text{раб}}(G^*)$ и $E^{\text{изб}}(G^*)$ – соответственно число рабочих и избыточных рёбер в графе G^*. Тогда $E^{\text{раб}}(G^*) = E(G)$ и $E^{\text{изб}}(G^*) = E(G^*) - E^{\text{раб}}(G^*)$. Характеристиками избыточности при переходе от графа G к графу G^* являются параметры $\nu_в(G)$, $\nu_p(G)$, $S^{\text{изб}}(G^*)$, $S^{\text{раб}}(G^*)$, $E^{\text{изб}}(G^*)$, $E^{\text{раб}}(G^*)$.

Рассмотрим характеристики 1-отказоустойчивых графов на примере некоторых однородных структур.

2. Простые прямоугольные *n*-мерные решетки

Назовем простой прямоугольной n-мерной решёткой такой граф $R_{k_1,\ldots,k_n} = (V, E)$, что $V = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} Z_{k_i}$ и

$$E = \{\{(v_1,\ldots, v_n), (v_1',\ldots,v_n')\} \subseteq V \mid (\exists!\, j \in \{1,\ldots,n\})(|v_j - v_j'| = 1 \;\&\; (\forall j' \neq j)(v_j = v_j'))\}.$$

Занумеруем вершины графа $R_{k_1,\ldots,k_n}$ так, что номером вершины $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ является число

$$q(\boldsymbol{v}) = v_1 + k_1\cdot v_2 + k_1\cdot k_2\cdot v_3 + \ldots + k_1\cdot\ldots\cdot k_{(n-1)}\cdot v_n = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i \cdot \prod_{j=0}^{n-1} k_j\right). \tag{2}$$

Пусть $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'\} \in E$, где $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \in V$ и $\boldsymbol{v}' = (v_1, \ldots, v_i + 1, \ldots, v_n) \in V$. Из (2) вытекает, что

$$q(\boldsymbol{v}) = v_1 + k_1 \cdot v_2 + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1} \cdot v_i + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{(n-1)} \cdot v_n; \tag{3}$$

$$q(\boldsymbol{v}') = v_1 + k_1 \cdot v_2 + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1} \cdot (v_i + 1) + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{(n-1)} \cdot v_n. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$| q(\boldsymbol{v}) - q(\boldsymbol{v}') | = k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1} \ (i = 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Из (5) вытекают

Утверждение 1. В решетке $R_{k_1,\ldots,k_n}$ $\{\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n), \boldsymbol{v}' = (v_1, \ldots, v_i + 1, \ldots, v_n)\} \in E$ – хорда тогда и только тогда, когда $i = 2, \ldots, n$.

Утверждение 2. В решетке $R_{k_1,\ldots,k_n}$ если $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'\} \in E$ – хорда длины l, то

$$l \in \left\{ k_1, k_1 \cdot k_2, \ldots, \prod_{i=1}^{n-1} k_i \right\}. \tag{6}$$

Так как

$$\begin{cases} S_{k_1}(R_{k_1,\ldots,k_n}) = k_1 \cdot (k_2 - 1) \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n = \prod\limits_{i=1}^{n} k_i \cdot (1 - k_2^{-1}), \\ S_{k_1 \cdot k_2}(R_{k_1,\ldots,k_n}) = k_1 \cdot k_2 \cdot (k_3 - 1) \cdot k_4 \cdot \ldots \cdot k_n = \prod\limits_{i=1}^{n} k_i \cdot (1 - k_3^{-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{\prod_1^{n-1} k_i}(R_{k_1,\ldots,k_n}) = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_{n-1} \cdot (k_n - 1) = \prod\limits_{i=1}^{n} k_i \cdot (1 - k_n^{-1}), \end{cases} \tag{7}$$

то из (1), (6) и (7) вытекает

Теорема 1. Для решетки $R_{k_1,\ldots,k_n}$ истинно равенство

$$S(R_{k_1,\ldots,k_n}) = \left((n-1) - \sum_{i=2}^{n} k_i^{-1} \right) \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i .$$

Преобразуем решетку $R_{k_1,\ldots,k_n}$ к виду 1-отказоустойчивого графа. Для этого добавим рёбра таким образом, чтобы гамильтонов путь имел стандартный вид: $0 \to 1 \to \ldots \to (n - 1)$. Добавим новую вершину n и соединим её с вершинами 0 и $n - 1$. Для того чтобы получить минимальный 1-отказоустойчивый граф, необходимо вставить избыточную вершину n в ребро, принадлежащее гамильтонову пути. Осуществим трансляцию дуг по циклической группе автоморфизмов C_n. В результате получим 1-отказоустойчивый граф $R^*_{k_1,\ldots,k_n}$.

Характеристики избыточности при переходе от $R_{k_1,\ldots,k_n}$ к $R^*_{k_1,\ldots,k_n}$ равны

$$S^{\text{раб}}(R^*_{k_1,\ldots,k_n}) = S(R_{k_1,\ldots,k_n}) = \left((n-1) - \sum_{i=2}^{n} k_i^{-1} \right) \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i ,$$

$$S^{\text{изб}}(R^*_{k_1,\ldots,k_n}) = \prod_{i=1}^{n} k_i \sum_{i=2}^{n} k_i^{-1} + n - 1,$$

$$E^{\text{раб}}(R^*_{k_1,\ldots,k_n}) = (k_1 - 1) \prod_{i=2}^{n} k_i ,$$

$$E^{\text{изб}}(R^*_{k_1,\ldots,k_n}) = \prod_{i=2}^{n} k_i + 1.$$

Рассмотрим специальные случаи прямоугольной n-мерной решётки $R_{k_1,\ldots,k_n}$, когда $n \in \{2,3\}$.

1. $n = 2$. Решётка R_{k_1,k_2} размера изображена на рис. 1, а граф $R^*_{k_1,k_2}$ – на рис. 2.

Сведём характеристики графа $R^*_{k_1,k_2}$ в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики графа $R^*_{k_1,k_2}$

Элементы решётки	Рабочие	Избыточные
Вершины	k_1k_2	1
Рёбра	$(k_1 - 1)k_2$	$k_2 + 1$
Хорды	$(k_2 - 1)k_1$	$k_1 + 1$
Связи (общ.)	$2k_1k_2 - k_1 - k_2$	$k_1 + k_2 + 2$

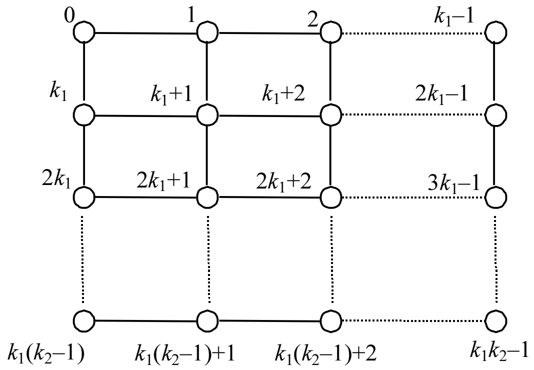

Рис. 1. Решётка R_{k_1,k_2}

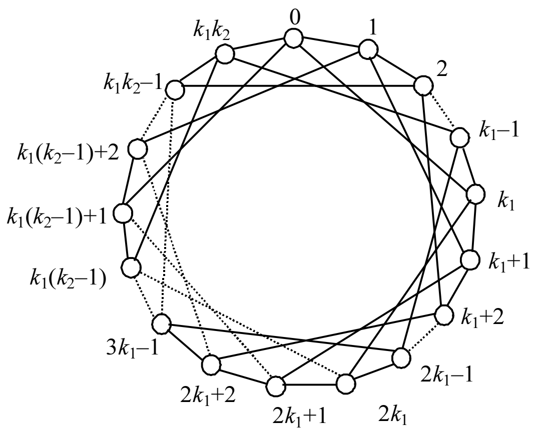

Рис. 2. Граф $R^*_{k_1,k_2}$

Из табл. 1 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности графа $R^*_{k_1,k_2}$ равны соответственно:

$$\nu_{\text{в}}(R_{k_1,k_2}) = 1 + (k_1 k_2)^{-1},$$

$$\nu_{\text{р}}(R_{k_1,k_2}) = 1 + \frac{k_1 + k_2 + 2}{2k_1 k_2 - k_1 - k_2}.$$

2. $n = 3$. Решётка R_{k_1,k_2,k_3} изображена на рис. 3. Характеристики графа $R^*_{k_1,k_2,k_3}$ сведены в табл. 2.

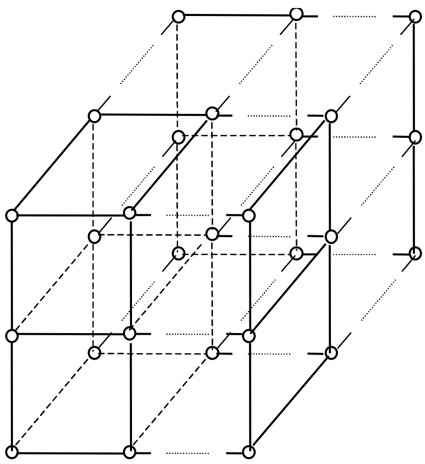

Рис. 3. Решётка R_{k_1,k_2,k_3}

Таблица 2

Характеристики графа $R^*_{k_1,k_2,k_3}$

Элементы решётки	Рабочие	Избыточные
Вершины	$k_1k_2k_3$	1
Рёбра	$(k_1 - 1)k_2k_3$	$k_2k_3 + 1$
Хорды	$2k_1k_2k_3 - k_1(k_2 + k_3)$	$k_1(k_2 + k_3)+2$
Связи (общ.)	$3k_1k_2k_3 - k_1k_2 - k_1k_3 - k_2k_3$	$k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3+3$

Из табл. 2 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности равны соответственно:

$$\nu_{\text{в}}(R_{k_1,k_2}) = 1 + (k_1 k_2)^{-1},$$

$$\nu_{\text{р}}(R_{k_1,k_2}) = 1 + \frac{k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 + 3}{3k_1k_2k_3 - k_1k_2 - k_1k_3 - k_2k_3}.$$

3. Диагональные прямоугольные *n*-мерные решетки

Диагональной прямоугольной n-мерной решёткой назовём такой граф $D_{k_1,\ldots,k_n} = (V', E')$, что $V' = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} Z_{k_i}$ и

$$E' = E \cup D^{(1)} \cup D^{(2)},$$

где

$$D^{(1)} = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,n-1\\ j=i+1,\ldots,n}} D^{(1)}_{ij},\quad D^{(2)} = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,n-1\\ j=i+1,\ldots,n}} D^{(2)}_{ij},$$

а

$$D^{(1)}_{ij} = \{(v_1, \ldots, v_n), (v_1, \ldots, v_i + 1, \ldots, v_j + 1, \ldots, v_n)\},$$

$$D^{(2)}_{ij} = \{(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + 1, \ldots, v_n), (v_1, \ldots, v_i + 1, \ldots, v_j, \ldots, v_n)\}.$$

Пусть $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'\} \in D_{ij}^{(1)}$, где $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) \in V$ и $\boldsymbol{v}' = (v_1, \ldots, v_i + 1, \ldots, v_j + 1, \ldots, v_n) \in V$. Из (2) вытекает, что

$$q(\boldsymbol{v}) = v_1 + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1}\, v_i + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{j-1} \cdot v_j + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{(n-1)} \cdot v_n; \tag{8}$$

$$q(\boldsymbol{v}') = v_1 + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1}\, (v_i + 1) + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{j-1} \cdot (v_j + 1) + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{(n-1)} \cdot v_n. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает, что

$$|\, q(\boldsymbol{v}) - q(\boldsymbol{v}')\,| = (k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1})(1 + k_i \cdot \ldots \cdot k_{j-1}) \ \ (i,j = 2, \ldots, n).$$

Число таких диагоналей равно

$$S_{D_{ij}^{(1)}} = \prod_{h=1}^{n} k_h \cdot \sum_{i<j} ((1 - k_j^{-1})(1 - k_i^{-1})) \,.$$

Пусть $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'\} \in D_{ij}^{(2)}$, где $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + 1, \ldots, v_n) \in V$ и $\boldsymbol{v}' = (v_1, \ldots, v_i + 1, \ldots, v_j, \ldots, v_n) \in V$. Из (2) вытекает, что

$$q(\boldsymbol{v}) = v_1 + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1}\, v_i + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{j-1} \cdot (v_j + 1) + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{(n-1)} \cdot v_n; \tag{10}$$

$$q(\boldsymbol{v}') = v_1 + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1}\, (v_i + 1) + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{j-1} \cdot v_j + \ldots + k_1 \cdot \ldots \cdot k_{(n-1)} \cdot v_n. \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает, что

$$|\, q(\boldsymbol{v}) - q(\boldsymbol{v}')\,| = (k_1 \cdot \ldots \cdot k_{i-1})(1 - k_i \cdot \ldots \cdot k_{j-1}) \ \ (i,j = 2, \ldots, n).$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$S_{D_{ij}^{(1)}} = S_{D_{ij}^{(2)}} = \prod_{h=1}^{n} k_h \cdot \sum_{i<j} (1 - k_j^{-1})(1 - k_i^{-1}) \,,$$

где

$$S_{D_{ij}^{(n)}} = \left| D_{ij}^{(n)} \right| \ \ (n = 1, 2).$$

После трансляции дуг по циклической группе автоморфизмов C_n получим 1-отказоустойчивый граф $D^*_{k_1,\ldots,k_n}$. Характеристики избыточности при переходе от решетки $D_{k_1,\ldots,k_n}$ к графу $D^*_{k_1,\ldots,k_n}$ равны:

$$E^{\text{раб}}(D^*_{k_1,\ldots,k_n}) = (k_1 - 1) \prod_{i=2}^{n} k_i \,,$$

$$E^{\text{изб}}(D^*_{k_1,\ldots,k_n}) = \prod_{i=2}^{n} k_i + 1,$$

$$S^{\text{раб}}(D^*_{k_1,\ldots,k_n}) = \left(n - 1 - \sum_{i=2}^{n} k_i^{-1} + 2 \sum_{i<j} (1 - k_j^{-1})(1 - k_i^{-1}) \right) \prod_{i=1}^{n} k_i \,,$$

$$S^{\text{изб}}(D^*_{k_1,\ldots,k_n}) = \left(2n + \sum_{i=2}^{n} k_i^{-1} - 2 \sum_{i<j} (1 - k_j^{-1})(1 - k_i^{-1}) \right) \prod_{h=1}^{n} k_h + 3n - 3 \,.$$

Рассмотрим специальные случаи диагональной прямоугольной n-мерной решётки $D_{k_1,\ldots,k_n}$, когда $n \in \{2, 3\}$.

1. $n = 2$. Решётка D_{k_1,k_2} изображена на рис. 4, а граф $D^*_{k_1,k_2}$ – на рис. 5.

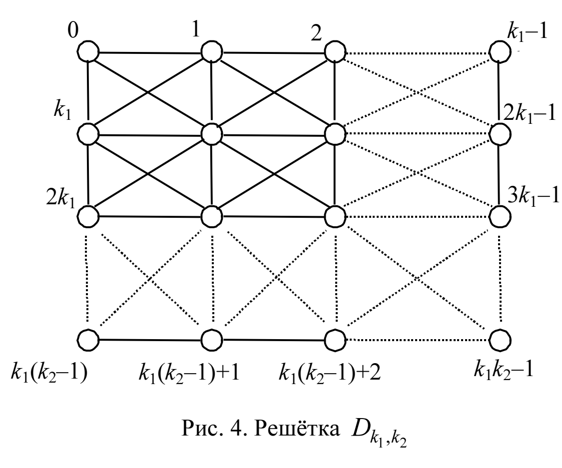

Рис. 4. Решётка D_{k_1,k_2}

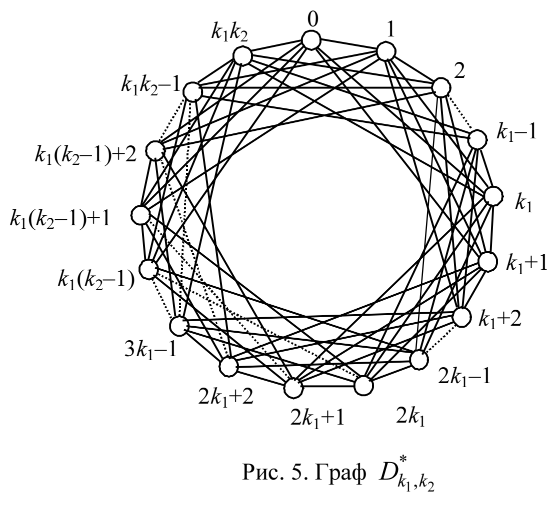

Рис. 5. Граф $D^*_{k_1,k_2}$

Характеристики графа $D^*_{k_1,k_2}$ сведём в табл. 3.

Таблица 3

Характеристики графа $D^*_{k_1,k_2}$

Элементы решётки	Рабочие	Избыточные
Вершины	k_1k_2	1
Рёбра	$(k_1 - 1)k_2$	$k_2 + 1$
Хорды	$3k_1k_2 - 3k_1 - 2k_2 + 2$	$3k_1 + 2k_2 + 1$
Связи (общ.)	$4k_1k_2 - 3(k_1 + k_2) + 2$	$3k_1 + 3k_2 + 2$

Из табл. 3 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности графа $D^*_{k_1,k_2}$ равны соответственно:

$$\nu_{\text{в}}(D^*_{k_1,k_2}) = 1 + (k_1k_2)^{-1},$$

$$\nu_{\text{р}}(D^*_{k_1,k_2}) = 1 + \frac{3k_1 + 3k_2 + 2}{4k_1k_2 - 3k_1 - 3k_2 + 2}.$$

2. $n = 3$. Характеристики графа $D^*_{k_1,k_2,k_3}$ сведены в табл. 4.

Таблица 4

Характеристики графа $R^*_{k_1,k_2,k_3}$

Элементы решётки	Рабочие	Избыточные
Вершины	$k_1k_2k_3$	1
Рёбра	$(k_1 - 1)k_2k_3$	$k_2k_3 + 1$
Хорды	$8k_1k_2k_3 - 5k_1k_3 - 5k_1k_2 - 4k_2k_3 + 2(k_1 + k_2 + k_3)$	$5k_1(k_2 + k_3) + 4k_2k_3 - 2(k_1 + k_2 + k_3) - 2k_1k_2k_3 + 6$
Связи (общ.)	$9k_1k_2k_3 - 5k_1k_3 - 5k_1k_2 - 5k_2k_3 + 2(k_1 + k_2 + k_3)$	$5k_1(k_2 + k_3) + 5k_2k_3 - 2(k_1 + k_2 + k_3) - 2k_1k_2k_3 + 7$

Из табл. 4 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности равны соответственно:

$$\nu_{\text{в}}(D^*_{k_1,k_2,k_3}) = 1 + (k_1k_2)^{-1},$$

$$\nu_{\text{р}}(D^*_{k_1,k_2,k_3}) = 1 + \frac{5(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3) - 2(k_1 + k_2 + k_3) - 2k_1k_2k_3 + 7}{9k_1k_2k_3 - 5(k_1k_3 + k_1k_2 + k_2k_3) + 2(k_1 + k_2 + k_3)}.$$

Заключение

В работе исследованы характеристики избыточности при преобразовании простых прямоугольных n-мерных решёток и диагональных прямоугольных n-мерных решёток в 1-отказоустойчивые минимальные графы. Полученные оценки являются верхними границами избыточности при преобразовании в 1-отказоустойчивый граф любого графа, вложимого в рассмотренные решётки. Одно из направлений дальнейших исследований состоит в оценке избыточности при преобразовании более сложных регулярных классических структур в 1-отказоустойчивые графы. Второе направление исследований состоит в изучении характеристик избыточности при преобразовании регулярных структур в m-отказоустойчивые графы, где $m \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каравай М.Ф.* Общий подход к построению отказоустойчивых цифровых систем // Вестник ТГУ. Приложение. 2004. № 9. С. 123 – 134.
2. *Каравай М.Ф.* Инвариантно-групповой подход к исследованию k-отказоустойчивых структур // Автоматика и телемеханика. 2000. № 1. С. 144 – 156.
3. *Каравай М.Ф.* Применение теории симметрии к анализу и синтезу отказоустойчивых систем // Автоматика и телемеханика. 1996. № 6. С. 159 – 173.
4. *Bollobas B.* Modern graph theory. N.Y.: Springer Verlag, 1998. 394 p.