2008 Теоретические основы прикладной дискретной математики № 2(2)

DOI 10.17223/20710410/2/2

УДК 519.682

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОНТЕКСТНО-СВОБОДНЫМИ ЯЗЫКАМИ

О.И. Егорушкин, Д.А. Калугин-Балашов, К.В. Сафонов

Красноярский государственный аграрный университет,
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

E-mail: safonovkv@rambler.ru

Рассмотрены системы алгебраических (полиномиальных) уравнений над кольцом, некоммутативным относительно умножения. Получено условие разрешимости таких систем в виде формальных степенных рядов. Рассмотрены системы линейных алгебраических уравнений, для которых исследована возможность понижения порядка систем. Данные системы обобщают свойства систем уравнений, определяющих контекстно-свободные и линейные языки.

Ключевые слова: *контекстно-свободные языки, системы алгебраических уравнений, некоммутативное кольцо, коммутативный образ, граф инцидентности.*

Обычно формальным языком L называют множество цепочек в алфавите $\{x_1,\ldots, x_n\}$, выделенных с помощью конечного набора правил. Выделенные цепочки, принадлежащие свободной полугруппе $\{x_1,\ldots, x_n\}^*$, называются при этом словами (над алфавитом) либо правильно построенными предложениями (над словарем), либо грамматически правильными предложениями. Конечное множество правил, с помощью которых выделяются цепочки, называют грамматикой. Таким образом, формальный язык определяется совокупностью соответствующих правил и способом выделения цепочек с помощью этих правил.

Практически важный класс формальных языков образуют контекстно-свободные языки (кс-языки), поскольку они являются адекватным средством моделирования естественных языков, а также языков программирования [1 – 3].

Рассмотрим играющее роль словаря конечное множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, состоящее из слов x_i языка и называемое терминальным множеством, а также $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ – множество вспомогательных символов z_j, необходимых для задания грамматических правил, называемое нетерминальным множеством. Обозначим $W^* = (X\cup Z)^* = (\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{z_1, \ldots, z_n\})^*$ – свободную полугруппу относительно операции конкатенации; ее элементами являются произвольные цепочки, составленные из элементов «расширенного» алфавита $\{x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n\}$ – соответствующая свободная полугруппа относительно операции.

Дополним её операцией формального сложения «+» мономов из множества W^* (вместо суммы можно взять объединение «$\cup$», следуя [1]), а также коммутативной операцией умножения мономов на (целые) числа. Таким образом, можно рассматривать не только многочлены, но и формальные степенные ряды с числовыми (как правило, целыми) коэффициентами от некоммутативных переменных.

Кс-грамматика есть совокупность правил подстановки, которые каждому нетерминальному символу z_i ставят в соответствие некоторый моном от терминальных и нетерминальных символов:

$$z_j \to f_{j1}(x,z),\ldots,z_j \to f_{jq\,j}(x,z)\,,$$

при этом z_1– особый, выделенный символ – начальный символ предложения (или программы). Правилам подстановки ставится в соответствие [3] система полиномиальных уравнений: каждому вспомогательному символу z_j, содержащемуся в левой части подстановки, сопоставляется уравнение $z_j = p_j(x, z)$, где

$$p_j(x, z) = f_{j1}(x, z) + \ldots + f_j\,q_j\,(x, z).$$

Таким образом, кс-грамматике соответствует система полиномиальных уравнений

$$z_j = p_j(x, z), j =1, \ldots, m, \tag{1}$$

и кс-языком называется [3, 4] первая компонента z_j решения $(z_1(x), \ldots, z_m(x))$ этой системы полиномиальных уравнений, получаемого методом последовательных приближений:

$$z_i^{(k+1)} = p_i(x, z^{(k)}),\ z_i^{(0)} = 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

где $z^{(k)} = (z_i^{(k)},\ldots,z_m^{(k)})$, 0 – нулевой моном, такой, что $0\cdot u = u\cdot 0 = 0$ для любого монома u.

В результате итераций каждая компонента z_j выражается формальным степенным рядом, причем кс-язык и есть тот формальный степенной ряд, который представляет выделенный символ z_1:

$$z_1 = \sum_i < z_1, w_i > w_i\ . \tag{2}$$

Здесь $< z_1,w_j >$ – числовой коэффициент, с которым моном w_j от некоммутативных переменных входит в ряд z_1. Мономы w_j являются грамматически правильными предложениями, которые могут быть построены в данном языке из слов $x_1, \ldots, x_n$ этого языка, а весь ряд (2), т.е. формальная сумма всех правильных предложений, и является данным кс-языком. Построение системы уравнений (1) по грамматическим правилам языка приведено выше, причем условие того, что язык является контекстно-свободным, состоит также и в том, что многочлены $p_j\,(x, z)$ не содержат мономов z_j и e, где e – пустая цепочка. Таким образом, существование и единственность решения системы (1) обеспечивается её специфической структурой в совокупности с методом последовательных приближений.

Рассмотрим общий случай, а именно ассоциированную с контекстно-свободными языками произвольную систему алгебраических (полиномиальных) уравнений:

$$q_i(x, z) = 0,\ i=1, \ldots, m. \tag{3}$$

Решением этой системы назовем выражение символов z_i в виде формальных степенных рядов от x, подстановка которых в многочлены $q_i(x, z)$ обращает их в нуль. Нас интересует, каковы условия, при которых система (3) имеет такое решение, и способ получения искомых рядов.

Поставим в соответствие формальному степенному ряду (многочлену) ряд (многочлен) с комплексными переменными, задав отображение терминальных x_i и нетерминальных z_i символов из множества $X \cup Z$ в множество комплексных переменных, причем оставляем за ними прежние обозначения, тогда $(x,z) \in C_{x,z}^{m+n}$. Таким образом, получаем фиксированный гомоморфизм, который ставит в соответствие формальному ряду (2) его *коммутативный образ* – степенной ряд от комплексных переменных

$$ci(r) = \sum_k a_k z^k\ ,$$

где

$$a_k z^k = a_{k_1,\ldots,k_n} z_1^{k_1} \ldots z_1^{k_n}\,,$$

$$a_k = \sum_{\#x_1(w_i)=k_1,\ldots,\#x_n(w_i)=k_n} < r, w_i >\,,$$

символ $\#c(d)$ означает число вхождений символа c в моном d. Коммутативный образ кс-языка является алгебраической функцией, голоморфной в некоторой окрестности нуля, как показывают оценки коэффициентов степенного ряда.

Имеет место следующая

Теорема 1. Если выполнено условие

$$J = \det\left(\frac{\partial(ci(q_i(0,0))}{\partial z_j}\right) \neq 0, \tag{4}$$

то система (3) имеет единственное решение в виде формальных степенных рядов, выражающих вектор-функцию z через компоненты вектора x.

Для доказательства заметим, что если формальные ряды $z = z(x)$ удовлетворяют системе уравнений $q(x, z) = 0$, то выполняется условие

$$ci(q(x,\ ci(z(x)))) = 0.$$

И хотя обратное, вообще говоря, не верно, условие (4) для якобиана J обеспечивает существование и единственность решения системы $ci(q(x, z)) = 0$; обозначим это решение $ci(z(x))$. Учитывая, что условие (4) означает линейную независимость градиентов коммутативных образов многочленов, а также метод мономиальных меток, предложенный в [4], получаем отсюда, что это решение действительно является коммутативным образом некоторого решения исходной некоммутативной системы.

Далее, в силу невырожденности матрицы Якоби в начале координат, можно сделать линейную замену переменных z_i, в результате которой эта матрица становится единичной, что и приводит систему (3) к виду (1), в результате чего её можно решать методом последовательных приближений. Искомые ряды равны линейной комбинации получаемых рядов.

Рассмотрим теперь системы линейных алгебраических уравнений над некоммутативным кольцом, тесно связанные с линейными языками [1]. Возможные методы решения этих систем в виде рядов должны учитывать как некоммутативность переменных по умножению, так и отсутствие операции деления в кольце W. Нам понадобятся некоторые определения.

L-операторами называются отображения $L : W \to W$, действие которых заключается в умножении элемента кольца W слева и справа на некоторые мономы l и r: $L(z) = l \cdot z \cdot r. L(z) = l\cdot z\cdot r.$

Основные свойства L -операторов:

1) $L(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha L(z_1) + \beta L(z_2)$ (*линейность*);

2) если $L_1(z) = l_1 z r_1$ и $L_2(z) = l_2 z r_2$, то $L_1(L_2(z)) = L_1(l_2 z r_2) = l_1 l_2 z r_2 r_1 = L_3(z)$ (*композиция L-операторов является L-оператором*).

Уравнение $f(z_1, \ldots, z_m) = g(z_1, \ldots, z_m)$ называется *приведенным*, если не существует такого L-оператора R, что $f(z_1, \ldots, z_m) = R(f_1(z_1, \ldots, z_m))$ и $g(z_1, \ldots, z_m) = R(g_1(z_1, \ldots, z_m))$. Если уравнение не является приведенным, то его можно привести к эквивалентному, отбросив оператор R.

Система линейных алгебраических уравнений порядка n над некоммутативным кольцом имеет вид

$$\begin{cases} \sum_k l_{1,1,k} L_{1,1,k}(z_1) + \sum_k l_{1,2,k} L_{1,2,k}(z_2) + \ldots + \sum_k l_{1,n,k} L_{1,n,k}(z_n) = \sum_k \varphi_{1,k} \Phi_{1,k}, \\ \sum_k l_{2,1,k} L_{2,1,k}(z_1) + \sum_k l_{2,2,k} L_{2,2,k}(z_2) + \ldots + \sum_k l_{2,n,k} L_{2,n,k}(z_n) = \sum_k \varphi_{2,k} \Phi_{2,k}, \\ \ldots \\ \sum_k l_{n,1,k} L_{n,1,k}(z_1) + \sum_k l_{n,2,k} L_{n,2,k}(z_2) + \ldots + \sum_k l_{n,n,k} L_{n,n,k}(z_n) = \sum_k \varphi_{n,k} \Phi_{n,k}, \end{cases}$$

где $l_{i,j,k}$, $\varphi_{i,k}$ – действительные коэффициенты; $L_{i,j,k}(z)$ – L-операторы; $\Phi_{j,k}$ – мономы. Можно считать, что все уравнения системы являются приведенными.

Покажем, как исключать из данной системы одно неизвестное и одно уравнение. Исключаем, например, неизвестное z_n. Для каждого уравнения системы оставим все слагаемые с z_n в левой части, а все остальные слагаемые перенесем в правую часть, переписав систему в виде

$$\begin{cases} \sum_k l_{1,n,k} L_{1,n,k}(z_n) = \sum_k \varphi_{1,k} \Phi_{1,k} - \sum_k l_{1,1,k} L_{1,1,k}(z_1) - \ldots - \sum_k l_{1,n-1,k} L_{1,n-1,k}(z_{n-1}), \\ \sum_k l_{2,n,k} L_{2,n,k}(z_n) = \sum_k \varphi_{2,k} \Phi_{2,k} - \sum_k l_{2,1,k} L_{2,1,k}(z_1) - \ldots - \sum_k l_{2,n-1,k} L_{2,n-1,k}(z_{n-1}), \\ \ldots \\ \sum_k l_{n,n,k} L_{n,n,k}(z_n) = \sum_k \varphi_{n,k} \Phi_{n,k} - \sum_k l_{n,1,k} L_{n,1,k}(z_1) - \ldots - \sum_k l_{n,n-1,k} L_{n,n-1,k}(z_{n-1}). \end{cases}$$

Построим граф с n вершинами, i-я вершина которого соответствует $\sum_k l_{i,n,k} L_{i,n,k}(z_n)$. Вершины i и j инцидентны, если существуют такие L-операторы R_{ij} и R_{ji}, что выполняется равенство

$$R_{ij}\left(\sum_k l_{i,n,k} L_{i,n,k}(z_n) \right) = R_{ji}\left(\sum_k l_{j,n,k} L_{j,n,k}(z_n) \right).$$

При этих обозначениях и условиях имеет место

Теорема 2. Порядок n системы линейных алгебраических уравнений можно понизить до $n - 1$, если существует вершина r, смежная всем остальным вершинам. Каждому ребру, инцидентному вершине r, соответствует одно уравнение новой системы. Очевидно, что таких ребер будет $n - 1$, следовательно, и порядок новой системы будет $n - 1$ (при выполнении условий теоремы для одной вершины граф инцидентности имеет вид, например, такой, как на рис. 1).

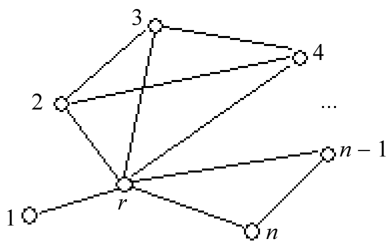

Рис. 1. Граф инцидентности вершины r

В случае выполнения условий теоремы 2 полученная система запишется в виде

$$\begin{cases} R_{r,1}\left(\sum_k \varphi_{r,k} \Phi_{r,k} - \sum_k l_{r,1,k} L_{r,1,k}(z_1) - \ldots - \sum_k l_{r,n-1,k} L_{r,n-1,k}(z_{n-1}) \right) = \\ = R_{1,r}\left(\sum_k \varphi_{1,k} \Phi_{1,k} - \sum_k l_{1,1,k} L_{1,1,k}(z_1) - \ldots - \sum_k l_{1,n-1,k} L_{1,n-1,k}(z_{n-1}) \right); \\ R_{r,2}\left(\sum_k \varphi_{r,k} \Phi_{r,k} - \sum_k l_{r,1,k} L_{r,1,k}(z_1) - \ldots - \sum_k l_{r,n-1,k} L_{r,n-1,k}(z_{n-1}) \right) = \\ = R_{2,r}\left(\sum_k \varphi_{2,k} \Phi_{2,k} - \sum_k l_{2,1,k} L_{2,1,k}(z_1) - \ldots - \sum_k l_{2,n-1,k} L_{2,n-1,k}(z_{n-1}) \right); \\ \ldots \\ R_{r,n}\left(\sum_k \varphi_{r,k} \Phi_{r,k} - \sum_k l_{r,1,k} L_{r,1,k}(z_1) - \ldots - \sum_k l_{r,n-1,k} L_{r,n-1,k}(z_{n-1}) \right) = \\ = R_{n,r}\left(\sum_k \varphi_{n,k} \Phi_{n,k} - \sum_k l_{n,1,k} L_{n,1,k}(z_1) - \ldots - \sum_k l_{n,n-1,k} L_{n,n-1,k}(z_{n-1}) \right). \end{cases}$$

Используя свойство линейности L-оператора, преобразуем эту систему к виду

$$\begin{cases} \sum_k \varphi_{r,k} R_{r,1}\left(\Phi_{r,k}\right) - \sum_k l_{r,1,k} R_{r,1}\left(L_{r,1,k}\left(z_1\right)\right) - \ldots - \sum_k l_{r,n-1,k} R_{r,1}\left(L_{r,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right) = \\ = \sum_k \varphi_{1,k} R_{1,r}\left(\Phi_{1,k}\right) - \sum_k l_{1,1,k} R_{1,r}\left(L_{1,1,k}\left(z_1\right)\right) - \ldots - \sum_k l_{1,n-1,k} R_{1,r}\left(L_{1,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right); \\ \sum_k \varphi_{r,k} R_{r,2}\left(\Phi_{r,k}\right) - \sum_k l_{r,1,k} R_{r,2}\left(L_{r,1,k}\left(z_1\right)\right) - \ldots - \sum_k l_{r,n-1,k} R_{r,2}\left(L_{r,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right) = \\ = \sum_k \varphi_{2,k} R_{2,r}\left(\Phi_{2,k}\right) - \sum_k l_{2,1,k} R_{2,r}\left(L_{2,1,k}\left(z_1\right)\right) - \ldots - \sum_k l_{2,n-1,k} R_{2,r}\left(L_{2,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right); \\ \ldots \\ \sum_k \varphi_{r,k} R_{r,n}\left(\Phi_{r,k}\right) - \sum_k l_{r,1,k} R_{r,n}\left(L_{r,1,k}\left(z_1\right)\right) - \ldots - \sum_k l_{r,n-1,k} R_{r,n}\left(L_{r,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right) = \\ = \sum_k \varphi_{n,k} R_{n,r}\left(\Phi_{n,k}\right) - \sum_k l_{n,1,k} R_{n,r}\left(L_{n,1,k}\left(z_1\right)\right) - \ldots - \sum_k l_{n,n-1,k} R_{n,r}\left(L_{n,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right). \end{cases}$$

Так как композиция L-операторов есть L-оператор, то полученная система является системой линейных алгебраических уравнений (над некоммутативным кольцом), её порядок равен $n - 1$. Тем самым порядок системы понижен на единицу, исключена неизвестная z_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушков В.М.*, *Цейтлин Г.Е.*, *Ющенко Е.Л.* Алгебра, языки, программирование. Киев: Наукова думка, 1974.
2. *Семёнов А.Л.* Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. С. 50 – 52.
3. *Сафонов К.В.* О возможности вычислительного распознавания контекстно-свободных языков // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. № 4. С. 91 – 98.
4. *Сафонов К.В.*, *Егорушкин О.И.* О синтаксическом анализе и проблеме В.М. Глушкова распознавания контекстно-свободных языков Хомского // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 17. С. 63 – 66.