ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2008 Математические основы надежности вычислительных и управляющих систем № 2(2)

DOI 10.17223/20710410/2/22

УДК 519.17: 681.3

ФУНКЦИЯ СТРУКТУРНОЙ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТИ И *d*-ОГРАНИЧЕННАЯ КОМПОНЕНТА СВЯЗНОСТИ ГРАФА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ[1]

В.А. Мелентьев

Институт физики полупроводников СО РАН, г. Новосибирск

E-mail: melva@isp.nsc.ru

Введено понятие *d*-ограниченной компоненты связности (*d*-компоненты связности) графа вычислительной системы (ВС). Исследованы функции отказоустойчивости кольцевой и полносвязной структур ВС, ограничивающие область определения этой функции для структур, промежуточных в отношении их степени.

Ключевые слова: *структурная отказоустойчивость*, *вычислительная система*, *компонента связности.*

Известно, что повышение надежности системы основано на принципе предотвращения ее неисправностей посредством использования высоконадежных компонентов со сверхвысокой степенью интеграции, резервирования этих компонентов, поддержания облегченных тепловых и вольт-амперных режимов их работы, а также экранированием от воздействия разрушающих внешних импульсных, геомагнитных и радиационных воздействий, совершенствованием методов профилактического обслуживания и сборки аппаратуры и т.п. Понятно, что традиционное использование экспоненциальной модели в оценках надежности составляющих вычислительную систему элементов могло бы быть оправдано лишь для определения максимального числа $l_{\max}$ отказов, ожидаемого от эксплуатации системы в течение всего срока ее службы исключительно в нормативных режимах. Но реальные условия эксплуатации, загруженность системы и качество ее распределения по элементам системы, как показано в работе [1], существенно меняют загруженность системы и ее элементов, а следовательно, надежностные показатели и ожидаемое число исправных из них. Следует учитывать также и то, что наличие минимально необходимого числа исправных элементарных машин (ЭМ) в системе не гарантирует ее работоспособность при утрате требуемых для взаимодействия ЭМ коммуникационных качеств. Отказоустойчивость следует рассматривать как условную вероятность сохранения системой работоспособности на множестве образов ее неисправностей. Как видно из этого определения, свойство отказоустойчивости системы не зависит от показателей надежности составляющих ее элементов и корреспондируется ее архитектурой, нацеленной на сохранение способности выполнения ею в реальном времени и с определенным качеством необходимого минимума функций, достаточного для получения определенного техническими требованиями результата при возникновении любого отказа или их группы в пределах заданной кратности. В работе [2] показано, что отказ от учета функциональной и соответствующей ей структурной составляющих архитектуры системы сводит анализ отказоустойчивости к частному случаю, достоверному лишь для анализа полносвязных систем, где $N' \equiv N - l$, в которых число N' взаимно достижимых ЭМ и число исправных ЭМ тождественны при любой кратности $l < N$ отказов. Понятно, что в теории больших систем, где условие полной связности практически не реализуемо, подобный подход не является достоверным.

В работе [3] автором введены показатели структурной отказоустойчивости и структурной живучести вычислительной системы, определяющие соответственно долю подмножества работоспособных в множестве возможных конфигураций ВС при кратности l отказов и средневзвешенное (на этом множестве) значение определяющего работоспособность показателя качества. Общее число конфигураций системы из N ЭМ при наличии в ней l отказавших ЭМ определяется числом C_N^l сочетаний в группе из N элементов по l. Конфигурация в данном подходе считается работоспособной, если размер соответствующей ей компоненты связности графа ВС не менее предельного числа n элементарных машин, а ее диаметр не превышает заданного значения d. В представленной работе исследована роль структурной составляющей в формировании у ВС свойства отказоустойчивости.

1. Понятия структурной отказоустойчивости ВС и *d*-компоненты связности ее графа

Структурную отказоустойчивость системы из N ЭМ определим отношением числа конфигураций, сохраняющих при заданной кратности l отказов требуемое для успешного функционирования системы минимально необходимое число n элементарных машин, соответствующих заданным критериям связанности, к общему числу C_N^l конфигураций. Минимально необходимое число n элементарных машин обусловлено при

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-08-01301а).

этом их производительностью, числом и трудоемкостью существенных функциональных подсистем, граничными значениями показателей реактивности системы и плотностью вероятности распределения в ней потока задач [1]. В той же работе [1] показано, что значение кратности $l_{\max}$ допускаемых в ВС отказов определяется не только числом N входящих в ее состав ЭМ, но и ожидаемой загрузкой системы, эффективностью алгоритмов выравнивания нагрузки, а также учитывающим неизбежные отклонения реальных условий эксплуатации элементов системы от нормативных запасом устойчивости к отказам. Таким образом, общее число N ЭМ в системе следует определять, исходя из заданного значения n, из предельного значения $l_{\max}$ кратности допускаемых отказов, причем в общем случае $N \geq n + l_{\max}$, и из структуры сети связи, гарантирующей при значениях N и $l_{\max}$ требуемое число n взаимно достижимых ЭМ. Необходимую для нормального функционирования связанность ЭМ в системе зададим диаметром d, соответствующим допускаемой во взаимодействиях любой пары ЭМ задержке.

Задача анализа структурной отказоустойчивости вычислительной системы представлена здесь в терминах теории графов. В работе [3] автором впервые введено понятие толерантности графа, как способности сохранять заданные свойства при удалении из него некоторого числа вершин. Для исключения громоздких конструкций в последующем тексте уточним некоторые используемые далее определения. Так, компонента связности в теории графов определена максимальным связным подграфом $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$. В настоящей работе введем понятие d-ограниченной компоненты связности (d-компоненты связности), выделяющей в графе $G(V, E)$ максимальный связный подграф $G_d'(V_d', E_d')$ с диаметром, не превышающим предельного значения d: $\forall u, v \in V_d'$ $d(u, v) \leq d$. Очевидно, что при $d(G') \leq d$ d-компонента связности $G_d'(V_d', E_d')$ совпадает с компонентой $G'(V', E')$ и $G_d'(V_d', E_d') \equiv G'(V', E')$, а при $d(G') > d$ она является ее подграфом $G_d'(V_d', E_d') \in G'(V', E')$.

Наряду с известным из теории графов определением (вершинной) связности $\kappa(G)$ как наименьшего числа вершин в графе $G(V, E)$, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу, здесь введено понятие d-ограниченной связности $\kappa_d(G)$ графа, определяемой как наименьшее число вершин, удаление которых приводит к появлению в графе d-компоненты связности V_d' с меньшим, чем $|V'|$, размером. Введенные выше определения очевидным образом расширяют известное неравенство Уитни [4] до следующего: $\kappa_d(G) \leq \kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$; здесь $\lambda(G)$ и $\delta(G)$ соответственно – значения реберной связности графа и минимальной степени его вершин. Используя введенные определения, обусловим толерантность графа наличием в нем d-компонент связности $G_d'(V_d', E_d') \in G$, размеры $N_d' = |V_d'|$ которых не меньше граничного числа n при заданной кратности l отказов при том, что $N - n \geq l$. Граф G назовем (n, l, d)-толерантным, если для любой из множества конфигураций l-кратных отказов существует d-компонента связности, размер которой не меньше n. Систему, граф G которой (n, l, d)-толерантен, считаем при этом (n, l, d)-структурно отказоустойчивой. Таким образом, задача анализа отказоустойчивости системы сводится к анализу (n, l, d)-толерантности ее графа, равно как и суть задачи синтеза отказоустойчивой структуры ВС состоит в построении соответствующего $(n, l_{\max}, d)$-толерантного графа. Очевидно при этом, что число вершин N ограничено снизу суммой $n + l_{\max}$. Число вершин сверх этой суммы $\Re_V = N - (n + l_{\max})$ будем называть избыточным.

2. Функция структурной отказоустойчивости ВС

Задача оценки структурной отказоустойчивости ВС с критическими значениями числа n вершин и диаметра d в соответствующем ей графе поставлена впервые. Суть ее состоит в выявлении наименьшего числа l^* вершин, удаление которых либо переводит диаметр $d(G')$ компоненты связности в закритическую область – $d(G') > d$, либо при сохранении диаметра в докритической области $d(G') \leq d$ уменьшает число вершин в компоненте более чем на l^*. В обоих случаях $N_d' < N - l^*$, и значение $l^* = \kappa(G)$ является d-ограниченной связностью графа G. Если при этом $l^* > l_{\max}$, т.е. $\forall l \leq l_{\max}$ $N_d'(l) = N - l$, то отказоустойчивость системы достигается уже при числе элементарных машин $N = n + l_{\max}$, т.е. при нулевой вершинной избыточности – $\Re_V = 0$. Структурная отказоустойчивость системы в этом случае обусловлена избыточной связностью ее графа. Если же $l^* \leq l_{\max}$, т.е. $\forall l \,|\, l^* \leq l \leq l_{\max}$ $n \leq N'(l) < N - l$, то система также может быть отказоустойчивой, но определяется это свойство уже не только коммуникационной избыточностью, недостаточной для $\Re_V = 0$, – система должна быть дополнена также некоторым избыточным числом ЭМ, т.е. должно быть $N > n + l_{\max}$ и $\Re_V > 0$.

Показателен в этом отношении анализ двух полярных с позиций избыточности регулярных структур: кольцевой, где число ребер $|E|$ минимально и не превышает $N - 1$, и полносвязной структуры (K_n-графа), содержащей максимально возможное число ребер – $|E| = N(N - 1)/2$. Реберную избыточность $\Re_E$ кольцевой структуры с $N = n + l_{\max}$ примем равной нулю, а число ребер сверх $n + l_{\max} - 1$ назовем избыточным.

Рассмотрим в качестве примера систему с кольцевой структурой $G(V,E)$, в которой заданы минимально необходимое для сохранения работоспособности число n вершин и их изначальное число $N \geq n$. Считаем, что одновременно в системе может быть задействовано максимально возможное число $N_d' = |V'|$, $n \leq N_d' \leq N$, элементарных машин в d-компоненте связности $G_d'(V_d', E_{V_d'}) \subseteq G'(V', E_{V'})$ с диаметром $d(G_d')$, не превышающим величины d из замкнутого промежутка $[n - 1, N - 1]$. В соответствии с [3] значение структурной отказоустойчивости $\theta(n, l, d)$ такой системы при кратности l отказов определяем отношением

$$\theta(n, l, d) = (C_N^l)' / C_N^l .$$

Так как в кольцевом графе значение d однозначно определено числом n ($d = n - 1$), то этот параметр далее можно опустить. Здесь $(C_N^l)' = |\{G_i(l)\} \wedge \mathrm{H}|$, $\{G_i(l)\}$ – множество подграфов графа G, соответствующее множеству сочетаний по l удаленных вершин графа из всех N вершин, $i = \overline{1, C_N^l}$, Н – предикат адекватности, устанавливающий соответствие (Н = 1) или несоответствие (Н = 0) исследуемого i-го подграфа $G_i(l)$ заданным выше условиям работоспособности ВС:

$$\exists G_i' \in G_i(l)\ |d(G_i') \le d, |V_i'| \ge n \Rightarrow G_i(l) \wedge \mathrm{H} = 1.$$

Если $(C_N^l)' = C_N^l$, то $\theta(n, l) = 1$ и, следовательно, кольцевая система (n, l)-структурно отказоустойчива. При $(C_N^l)' < C_N^l$ ее структурная отказоустойчивость $\theta(n, l) < 1$ и существует отличная от нуля вероятность утраты существенных структурных качеств, необходимых для ее работоспособности.

Очевидно, что в кольцевой ВС с $N > n$ при кратности отказов $l = 1$ всегда справедливо $(C_N^1)' = C_N^1 = N$ и ее структурная отказоустойчивость $\theta(n, 1) = 1$. Условием безусловной структурной отказоустойчивости к кратности $l = 2$ отказов, при котором $(C_N^2)' = C_N^2$, является $\lceil (N-2)/2 \rceil \ge n$, или $N \ge 2n + 1$. Условием же безусловной структурной отказоустойчивости кольцевой ВС к произвольной кратности отказов $l \ge 1$ является $N \ge nl + 1$. Очевидно, что это условие является также определяющим при синтезе отказоустойчивых кольцевых ВС и сетей связи. Итак, в кольцевой структуре $N \ge nl + 1 \Rightarrow \theta(n, 1) = 1$.

В табл. 1 даны результаты расчета структурной отказоустойчивости кольцевой ВС с достаточным для ее нормального функционирования значением $n = 10$, $l = \overline{2{,}5}$.

Перечислить работоспособные конфигурации $(C_N^l)'$ в кольце достаточно просто: вычислив $\lceil (N - l)/l \rceil$, получим значение минимально возможного размера компоненты связности кольцевого графа при удалении из него l вершин. Покажем это на примере $N = 15$, $l = 3$, $n = 10$: $\lceil (15-3)/3 \rceil = 4$, $C_{15}^3 = 455$. В табл. 1 приведены размеры подграфов, получаемых при удалении 3-х вершин. Здесь N_1 – размер компоненты связности, N_2 и N_3 – размеры других изолированных подграфов. Затененная в таблице область соответствует комбинациям, размер компоненты связности в которых превышает $n = 10$. Так как общее число таких комбинаций $(C_{15}^3)' = 90$, то $\theta(10, 3) = (C_{15}^3)' / C_{15}^3 = 90/455 = 0{,}1978$.

Таблица 1

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Число комбинаций	15	30	30	15	30	30	30	30	15	30	30	30	15	30	30	15	15	30	5
N_1	12	11	10	10	9	9	8	8	8	7	7	7	6	6	6	6	5	5	4
N_2	0	0	0	1	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	3	2	3	4
N_3	0	1	2	1	3	2	4	3	2	5	4	3	6	5	4	3	5	4	4

В табл. 2 сведены данные расчетов функций структурной живучести рассматриваемого кольцевого графа от l (при $n = 10$), представленные на рис. 1.

Таблица 2

l	N	$n+l$	15	20	21	25	30	31	35	40	41	45
2	C_N^2	66	105	190	210							
	$C_2'(N)$	12	60	180	210							
	$\theta(10,2)$	0,182	0,571	0,9474	1,0							
3	C_N^3	286	455	1140	1330	2300	4060	4495				
	$C_3'(N)$	13	90	720	945	2125	4050	4495				
	$\theta(10,3)$	0,045	0,198	0,632	0,711	0,924	0,998	1,0				
4	C_N^4	1001	1365	4845	5985	12650	27405	31465	52360	91390	101270	
	$C_4'(N)$	14	60	1680	2520	9025	25305	29791	51800	91350	101270	
	$\theta(10,4)$	0,014	0,044	0,347	0,421	0,713	0,923	0,947	0,989	0,9996	1,0	
5	C_N^5		3003	15504	20349	53130	142506	169911	324632	658008	749398	1221759
	$C_5'(N)$		15	1420		15375	91141		291656		744355	1221759
	$\theta(10,5)$		0,005	0,092		0,289	0,64		0,898		0,993	1,0

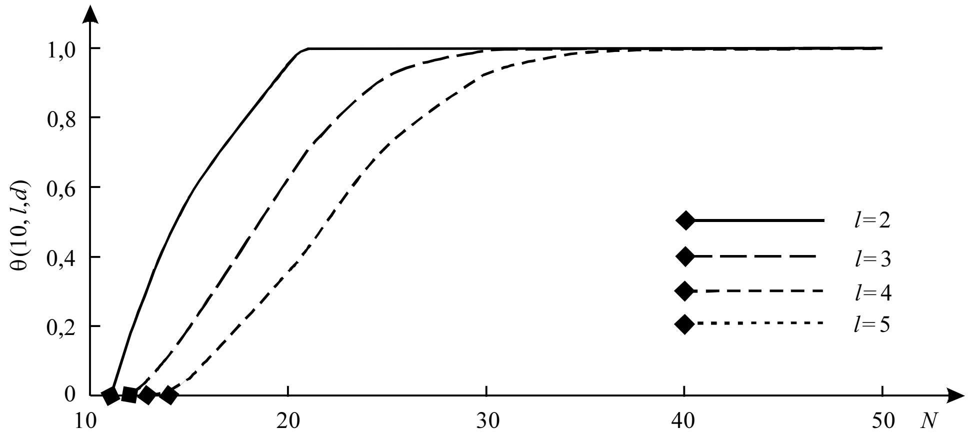

Рис. 1. Структурная отказоустойчивость кольцевой ВС с n = 10

Система, все ЭМ которой связаны по полному графу, отказоустойчива уже при $N = n + l_{\max}$, но число ребер в графе такой ВС увеличивается в сравнении с кольцевой структурой до $N(N - 1)$. Скачкообразное (при $N = n + l$) изменение значения функции структурной отказоустойчивости полносвязной ВС от $\theta(n, l) = 0$ до $\theta(n, l) = 1$ видно из графика этой функции при $n = 10$, $l = \overline{2{,}5}$ (рис. 2). Здесь же выделена область, представляющая собой разность функций структурной отказоустойчивости кольцевой и полносвязной ВС для $n = 10$, $l = 5$. Совершенно очевидно, что значения структурной живучести систем с соответственно равными значениями n и l, но с разными значениями вершинной связности $2 \le \kappa_d \le N - 1$ лежат в построенной таким образом промежуточной области. Из рис. 2 видно, что, например, для $n = 10$, $l = 5$ при $N = 25$ структурная отказоустойчивость системы в зависимости от выбранного для нее графа заключена в пределах от $\theta(10, 5) = 0{,}289$ при средней вершинной связности, близкой к двум ($\kappa \to 2$), до $\theta(10, 5) = 1{,}0$ при $\kappa \to N - 1$.

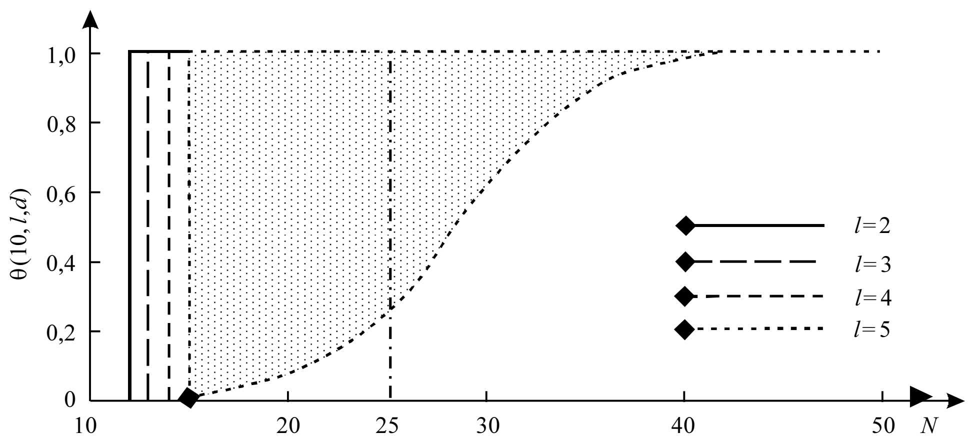

Рис. 2. Структурная отказоустойчивость полносвязной ВС и область определения

Диаметры кольцевого и полного графов существенно рознятся между собой: если в первом случае диаметр не менее чем в $l_{\max}$ раз превышает нижний предел числа ЭМ в работоспособной ВС, то диаметр компонент связности полного графа при любых кратностях $l \ge N - n$ и конфигурациях отказов всегда равен единице. В силу ограниченности допускаемого диаметра в первом случае может быть использована лишь небольшая часть исправных ЭМ, что указывает на низкую эффективность использования суммарной мощности ВС. Число ребер $|E|$ в рассматриваемых кольцевом и полном графах составляет соответственно: $|E_c| = nl_{\max}$ и $|E_n| = (n + l_{\max})(n + l_{\max} - 1)$. Таким образом, значения вершинной и реберной избыточностей для рассмотренных здесь случаев составляют: в системе с кольцевой структурой – $\Re_V = \Re_E = (n - 1)(l_{\max} - 1)$, а в полном графе – $\Re_V = 0$ и $\Re_E = (n + l_{\max} - 1)^2$.

Обозначив удельные стоимости вершин C_V и ребер C_E, переведем их в условные единицы: $c_V = C_V /(C_V + C_E)$, $c_E = C_E /(C_V + C_E)$; таким образом, $c_V + c_E = 1$ и в общем случае условная стоимость $c(G)$ реализации структурной отказоустойчивости ВС составляет: $c(G) = c_V\Re_V + c_E\Re_E$. Сопоставление избыточных стоимостей различных вариантов дает необходимые формальные основания для выбора той или иной структуры. В рассмотренных выше случаях, повышающих до предела роль одной из составляющих (вершинной или реберной) за счет другой, условная стоимость отказоустойчивости составляет: для кольцевой ВС –

$C = c_V n(l_{\max} - 1) + c_E n(l_{\max} - 1) = n(l_{\max} - 1)$ и для объединения ЭМ по полному графу – $C = c_E(n + l_{\max} - 1)^2 = (1 - c_V)(n + l_{\max} - 1)^2$. Очевидно, что оптимальная в отношении стоимости отказоустойчивая структура также может быть найдена среди промежуточных вариантов.

Заключение

Структурная отказоустойчивость системы определена сохранением требуемого для успешного функционирования системы минимально необходимого числа взаимосвязанных (соответствующих заданным критериям связанности) ЭМ при любой конфигурации отказов с максимально допускаемой кратностью. Показатель структурной отказоустойчивости вычислительной системы определяет таким образом долю подмножества работоспособных в множестве возможных конфигураций ВС при кратности l отказов. При этом минимально допустимое при отказах число ЭМ определяется исходя из их производительности, из набора существенных функциональных подсистем и их трудоемкости, из граничных значений показателей реактивности системы в решении этих задач, из плотности вероятности распределения потока задач и т.д.

Постановка задачи анализа структурной отказоустойчивости вычислительной системы впервые рассматривает в качестве критических параметров работоспособности минимально допустимый размер n компоненты связности графа ВС и ее предельный диаметр d. В связи с постановкой введено понятие d-ограниченной компоненты связности (d-компоненты связности), выделяющей в графе ВС максимальный связный подграф с диаметром, не превышающим предельного значения d, и понятие d-ограниченной связности графа, определяемой как наименьшее число l вершин, удаление которых приводит к появлению в графе d-компоненты связности с меньшим, чем у компоненты связности, размером. Синтез отказоустойчивой системы при этом заключается в определении кратности l отказов, при которой система должна сохранять работоспособность независимо от конфигурации отказавших ЭМ, и в выборе обеспечивающей это условие структурной конъюнктуры: изначального числа исправных элементарных машин и их связности. Максимальное значение кратности $l_{\max}$ отказов определяется при этом коррелированными ожидаемыми условиями эксплуатации надежностными показателями используемых ЭМ, их минимально допустимым числом и планируемыми значениями вершинной и реберной избыточности исходного графа. Говоря об условиях эксплуатации, мы включаем сюда как внешние (температурные, радиационные и т.п.), так и внутренние факторы (загруженность, качества алгоритмов перераспределения нагрузки и т.п.).

В работе дано определение соответствующей указанной постановке (n, l, d)-структурно отказоустойчивой системы, проведено исследование полярных в отношении связности кольцевой и полносвязной структур. Показано, что при заданных значениях n, l и d область размещения семейства функций структурной отказоустойчивости систем с варьируемыми соотношениями между $\Re_V$ и $\Re_E$ ограничена снизу кольцевой ($\Re_E = 0$) и сверху полносвязной ($\Re_V = 0$) структурами. Введенный в работе показатель стоимости, выраженный в условных единицах относительной стоимости вершинной и реберной избыточности структуры ВС, может быть использован в качестве критерия структурной оптимизации близких по значению структурной (n, l, d)-отказоустойчивости систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мелентьев В.А.* Корреляция надежности элементов вычислительной системы реальными условиями ее эксплуатации // Вестник ТГУ. Приложение. 2007. № 23. С. 247 – 252.
2. *Мелентьев В.А.* Обобщенная модель отказоустойчивой системы // Вестник ТГУ. Приложение. 2007. № 23. С. 242 – 246.
3. *Мелентьев В.А.* Толерантность графов и структурная отказоустойчивость вычислительных систем // Вестник ТГУ. Приложение. 2004. № 9(I). С. 144 – 150.
4. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.