

**РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУРЕШЁТКАХ
ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫМИ СХЕМАМИ**

И. А. Панкратова

*Томский государственный университет, г. Томск, Россия***E-mail:** pank@isc.tsu.ru

Формулируются критерии реализуемости функций на полурешётках схемами в реальных базисах переключательных элементов, в том числе схемами, обладающими свойством функциональной устойчивости к состязаниям.

Ключевые слова: *функции на полурешётках, динамическое поведение, переключательные схемы, устойчивость к состязаниям.*

Введение

Данная работа является развитием одного из направлений, предложенных в [1] (см. также [2]), где показано, что задача синтеза дискретного автомата, обладающего заданным динамическим поведением, сводится к синтезу схемы в некотором базисе, реализующей функции на полурешётках, описывающие это поведение. В связи с этим представляет научный и практический интерес разработка методов схемной реализации функций на полурешётках. В работе [1] описан метод реализации функции на полурешётке подмножеств трёхэлементного множества схемой в произвольном базисе и сформулированы необходимые и достаточные условия полноты базиса для случая однокаскадных параллельно-последовательных схем. Проблеме полноты в классе функций на произвольной конечной полурешётке посвящена также работа [3]. При проектировании реальных дискретных устройств на базе БИС и СБИС чаще всего используется элементный RS-базис, состоящий из элементов двух типов — резистора, представляющего собой двухполюсник с постоянной конечной проводимостью между полюсами, и переключателей, являющихся многополюсниками, в которых проводимости между полюсами принимают значения в полурешётке всех непустых подмножеств множества $\{0, 1\}$ и являются функциями от состояний полюсов элемента. К сожалению, ни один из RS-базисов не удовлетворяет критериям полноты из [1, 3], поэтому актуальной становится проблема реализуемости функций на полурешётках схемами в заданном (неполном) RS-базисе. Далее формулируются критерии реализуемости функций на полурешётках однокаскадными (теорема 1) и многокаскадными (теорема 2) схемами. Доказательства теорем можно найти в [4]; они конструктивны и содержат методы построения соответствующих схем. Методы реализации функций и систем функций на полурешётках, направленные на оптимизацию получаемых схем, приводятся в [5, 6].

На практике к проектируемым схемам, помимо их функционального поведения, зачастую предъявляются дополнительные требования, например устойчивость схемы к состязаниям на заданном множестве переходов. Неформально, состязание заключается в более чем однократном изменении состояния выхода схемы при однократном изменении входного состояния, и это понятие ранее определялось только для булевых функций и реализующих их схем. В работах [7, 8] вводятся формальные определе-

ния состязаний для функций на полурешётках и обсуждается задача проектирования функционально устойчивых схем, реализующих такие функции.

1. Условия реализуемости функций на полурешётках в реальных базисах переключательных элементов

Будем рассматривать комбинационные схемы с двухполюсным источником питания, проводимости в которых принимают значения из множества $P_3 = \{0, 1, X\}$, где 0 — нулевая, 1 — бесконечная и X — конечная проводимости. Состояние узла схемы определяется парой проводимостей от этого узла до полюсов источника питания. Для описания процесса асинхронного изменения проводимостей в схеме построим полурешётку проводимостей $\tilde{P}_3 = \{0, 1, X, 0', 1', X', E\}$ — верхнюю полурешётку всех непустых подмножеств множества P_3 , отношение порядка $\leq$ в которой совпадает с отношением включения множеств, а операция сложения — с объединением множеств. Здесь $0 = \{0\}$, $1 = \{1\}$, $X = \{X\}$ (эти значения являются точками полурешётки), $0' = \{1, X\}$, $1' = \{0, X\}$, $X' = \{0, 1\}$, $E = \{0, 1, X\}$. Для описания изменяющихся (динамических) состояний узлов построим полурешётку $I = \tilde{P}_3^2$, элементами которой являются пары проводимостей от узла до полюсов источника питания GND и VDD.

Функции от переменных в I со значениями в $\tilde{P}_3$ называются *функциями проводимости*. С их помощью описываются изменения проводимостей цепей в схеме, вызываемые изменениями состояний её полюсов. *Функция состояний* определяется как $\varphi : U_\varphi \rightarrow I$, где $U_\varphi \subseteq I^n$, и представляет собой пару независимых функций проводимости (f_0, f_1) с областью определения $U_{f_0} = U_{f_1} = U_\varphi$ и со значениями в полурешётке $\tilde{P}_3$ таких, что $(f_0(a), f_1(a)) = \varphi(a)$ для любого $a \in U_\varphi$. С её помощью описываются изменения состояния узла в схеме в зависимости от изменений состояний её полюсов.

Для функций состояний φ и ψ говорят, что *функция φ реализует функцию ψ* , и пишут $\varphi \leq \psi$, если $U_\psi \subseteq U_\varphi$ и $\varphi(a) \leq \psi(a)$ для любого $a \in U_\psi$. Функция на полурешётке называется *монотонной*, если она сохраняет отношение порядка на полурешётке, и *квазимоноотонной*, если существует реализующая её монотонная функция. Бинарное отношение на полурешётках $\Gamma \subseteq \tilde{P}_3^n \times I$ называется квазимонотонным, если оно реализуется монотонной функцией, т. е. если для некоторой монотонной функции $g : U_g \rightarrow I$, где $U_g \subseteq \tilde{P}_3^n$, верно следующее: $(a, b) \in \Gamma \Rightarrow a \in U_g \ \& \ g(a) \leq b$.

Переключательный элемент определим как пару $e = (X, f_e)$, где $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ — множество управляющих полюсов элемента, $f_e : I^k \rightarrow \tilde{P}_3$ — монотонная функция проводимости между исполнительными полюсами, зависящая от состояний управляющих полюсов; для остальных пар полюсов проводимости между ними тождественно равны 0.

Переключательная сеть $N(x_1, \dots, x_n, a, b)$ в базисе B есть пара (X, G) , где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество управляющих полюсов сети, G — параллельно-последовательный граф с двумя выделенными вершинами a и b , каждому ребру которого сопоставлен переключательный элемент $(X_i, f_i) \in B$, $X_i \subseteq X$. Функция проводимости $f_N : I^n \rightarrow \tilde{P}_3$ сети N определяется следующим индуктивным образом:

- 1) если G содержит одно ребро (a, b) , то $f_N = f_e$, где e — соответствующий этому ребру элемент;
- 2) если G есть параллельное соединение графов G_1 и G_2 , то $f_N = f_{N_1} \vee f_{N_2}$, где f_{N_1} , f_{N_2} — функции сетей (X, G_1) и (X, G_2) соответственно, $\vee$ — операция дизъюнкции проводимостей;
- 3) если G есть последовательное соединение графов G_1 и G_2 , то $f_N = f_{N_1} \wedge f_{N_2}$, где $\wedge$ — операция конъюнкции проводимостей.

Однокаскадная схема $C(x_1, \dots, x_n, y)$ в базисе B есть пара сетей в том же базисе $(N_1(x_1, \dots, x_n, y, \text{GND}), N_2(x_1, \dots, x_n, \text{VDD}, y))$, где $x_1, \dots, x_n$ — входные полюсы схемы, y — выходной полюс, GND, VDD — полюсы источника питания. Функция состояний $\varphi_C : I^n \rightarrow I$ схемы C определяется как пара функций сетей N_1, N_2 : $\varphi_C = (f_{N_1}, f_{N_2})$.

Двухкаскадная схема $C(x_1, \dots, x_n, y)$ есть совокупность однокаскадных схем $(C_1(x_1, \dots, x_n, y_1), \dots, C_k(x_1, \dots, x_n, y_k), C_{k+1}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k, y))$, где $C_1, \dots, C_k$ — схемы первого уровня, C_{k+1} — схема второго уровня с управляющими полюсами $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k$. Функция состояний схемы C определяется как суперпозиция $y = \varphi_C(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{C_{k+1}}(x_1, \dots, x_n, \varphi_{C_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{C_k}(x_1, \dots, x_n))$. *r-Каскадная схема* определяется аналогично, если $C_1, \dots, C_k$ суть $(r-1)$ -каскадные схемы.

Будем говорить, что *функция состояний φ реализуема в базисе B* , если существует схема C в том же базисе, для функции φ_C которой имеет место $\varphi_C \leq \varphi$. Заметим, что функции схем, являясь суперпозициями монотонных функций, также монотонны, поэтому реализуемы только квазимоноотонные функции.

Обозначим через R резистор и через E_2 класс всех переключательных элементов, функции проводимости которых принимают значения в полурешётке $\tilde{P}_2$ всех непустых подмножеств множества $\{0, 1\}$. В качестве элементного базиса будем рассматривать RS-базис $B \cup \{R\}$, где $B \subseteq E_2$. Как уже отмечалось, ни один из RS-базисов не является полным в классе квазимоноотонных функций состояний; в частности, даже при $B = E_2$ в таком базисе не реализуема функция $\varphi : \{a, b, c\} \rightarrow I$ такая, что $\varphi(a) = 0'$, $\varphi(b) = 1'$, $\varphi(c) = X'$ и $a \cap b \neq \emptyset$, $b \cap c \neq \emptyset$, $a \cap c \neq \emptyset$. Для формулировки критериев реализуемости функций состояний переключательными схемами в RS-базисах введём ещё некоторые понятия.

Пусть заданы базис $B = \{(X_1, f_1), \dots, (X_s, f_s)\}$, где $|X_i| = k_i$ для $i = 1, \dots, s$, и функция состояний $\varphi : U_\varphi \rightarrow I$, $U_\varphi \subseteq I^n$. Для каждого элемента $e_i = (X_i, f_i) \in B$ рассмотрим всевозможные отображения $\mu_j : \{1, \dots, k_i\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ множества управляющих полюсов элемента в множество номеров аргументов $x_1, \dots, x_n$ функции f . Их количество равно $t_i = n^{k_i}$. Каждой паре (e_i, μ_j) , $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, t_i$, сопоставим функцию $f_i^{(\mu_j)} : U_\varphi \rightarrow \tilde{P}_3$, область определения которой совпадает с областью определения функции φ , и $f_i^{(\mu_j)}(x_1, \dots, x_n) = f_i(x_{\mu_j(1)}, \dots, x_{\mu_j(k_i)})$. Содержательно, $f_i^{(\mu_j)}$ — это функция проводимости базисного элемента e_i между его исполнительными полюсами после отождествления его управляющих полюсов с полюсами $\mu_j(1), \dots, \mu_j(k_i)$ схемы. Перебирая всевозможные отображения μ_j , получим функции проводимости элемента e_i при всевозможных способах подключения его управляющих полюсов к входным полюсам схемы. Обозначим множество всех полученных функций проводимости через G_B :

$$G_B = \{f_i^{(\mu_j)} : i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t_i\}.$$

Построим бинарное отношение $\Gamma_{\varphi, B} \subseteq (\tilde{P}_3)^r \times L$, где $r = t_1 + t_2 + \dots + t_s$, следующим образом: для каждого набора $a \in U_\varphi$ запишем вектор $a_B = (x_{1,1}, \dots, x_{1,t_1}, \dots, x_{s,1}, \dots, x_{s,t_s})$ размерности r , где $x_{i,j} = f_i^{(\mu_j)}(a)$, и положим $(a_B, \varphi(a)) \in \Gamma_{\varphi, B}$. Других пар в $\Gamma_{\varphi, B}$ нет.

Пару наборов (a, b) , где $a, b \in I^n$, назовём *(1, 0)-разделимой множеством функций проводимости G* , если существует функция $g \in G$, что $(g(a), g(b)) = (1, 0)$.

Теорема 1 [4]. Функция состояний $\varphi = (f_0, f_1) : U_\varphi \rightarrow I$ реализуема однокаскадной схемой в базисе $B \cup \{R\}$ для $B \subseteq E_2$, если и только если для любой функции $f \in \{f_0, f_1\}$ выполнены условия:

а) для любых $a, b \in U_\varphi$ если $f(a) = 1$ и $f(b) \leq 1'$, или $f(a) \leq 0'$ и $f(b) = 0$, то пара (a, b) является $(1, 0)$ -разделимой множеством G_B ;

б) для любых $a_0, a_1, b \in U_\varphi$, таких, что $f(a_0) \leq 1'$, $f(a_1) \leq 0'$ и $f(b) = X'$, хотя бы одна из пар (a_1, a_0) , (a_1, b) или (b, a_0) является $(1, 0)$ -разделимой множеством G_B .

Построим бинарное отношение $\Gamma_{\varphi, B}$, состоящее из всех пар $(a_B, \varphi(a))$, где a_B — вектор значений всех функций в G_B на наборе a , и введём в рассмотрение бинарное отношение γ на $\tilde{P}_3$ как

$$\bar{\gamma} = \{(1, 0), (1, X), (1, 1'), (X, 0), (0', 0)\}$$

и распространим его покомпонентно на векторы с компонентами в $\tilde{P}_3$, в том числе на элементы полурешётки состояний и на векторы состояний. Содержательно, отношение γ имеет следующий смысл: $(a, b) \notin \gamma$ тогда и только тогда, когда все проводимости в a «больше» всех проводимостей в b , где 1 «больше» X , 1 «больше» 0 и X «больше» 0.

Теорема 2 [4]. Функция состояний $\varphi = (f_0, f_1) : U_\varphi \rightarrow I$, не реализуемая однокаскадной схемой, реализуется в базисе $B \cup \{R\}$ для $B \subseteq E_2$, если и только если отношение $\Gamma_{\varphi, B}$ квазимоноotonно и множество B содержит элемент, не сохраняющий отношения γ ; в этом случае φ реализуется двухкаскадной схемой в данном базисе.

Доказан также следующий важный факт.

Теорема 3 [9]. Классы функций на полурешётках, реализуемых в RS-базисах параллельно-последовательными схемами и схемами с мостиковыми соединениями, совпадают.

2. Функции на полурешётках и состязания

Пусть даны полурешётка состояний I , комбинационная схема C с функцией $\psi : I^n \rightarrow I$ и переход $(a, b) \in (I^n)^2$. В силу монотонности ψ имеем $\psi(a) + \psi(b) \leq \psi(a + b)$. Будем говорить, что *схема C функционально устойчива к состязанию на переходе (a, b)* , если имеет место равенство $\psi(a + b) = \psi(a) + \psi(b)$. Содержательно это означает, что при любом распределении задержек элементов и любом порядке изменения компонент входного состояния выход схемы останется в пределах (не превзойдёт) минимально возможного значения $\psi(a) + \psi(b)$ в процессе изменения входного состояния с a на b . Для решения вопроса о возможности реализации функции состояний устойчивой к состязаниям схемой введём понятия состязаний для функций на полурешётках.

Пусть дана функция $\varphi : U_\varphi \rightarrow I$, $a, b \in U_\varphi$ и $a + b \notin U_\varphi$. Будем говорить, что функция φ содержит *функциональное состязание* на переходе (a, b) , если для любой монотонной определённой на $a + b$ функции ψ из условия $\psi \leq \varphi$ следует $\psi(a + b) \not\leq \varphi(a) + \varphi(b)$. Будем говорить, что функция φ , свободная от функционального состязания на переходе (a, b) , содержит *логическое состязание* на этом переходе, если существует монотонная определённая на $a + b$ функция ψ , такая, что $\psi \leq \varphi$ и $\psi(a + b) \not\leq \varphi(a) + \varphi(b)$. Содержательный смысл определений тот же, что для булевых функций и реализующих их схем. Если функция φ содержит функциональное состязание на переходе (a, b) , то невозможно построение функционально устойчивой к этому состязанию схемы, реализующей функцию φ . Если функция φ содержит логическое состязание на переходе (a, b) , то для реализации φ возможно построение как устойчивой, так и неустойчивой к состязанию на этом переходе схемы.

Для квазимонотонной функции $\varphi : U_\varphi \rightarrow I$ построим всюду определённую функцию $\varphi^* : I^n \rightarrow I$ следующим образом: для любого $a \in I^n$ пусть

$$X_a = \{x \in U_\varphi : a \leq x\}, \text{ и } \varphi^*(a) = \begin{cases} \sup I, & \text{если } X_a = \emptyset, \\ \inf \varphi(X_a) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Построенная так функция φ^* является *наибольшей монотонной реализацией* функции φ .

Для $x \in I^n$ обозначим $m(x)$ множество точек полурешётки I^n , содержащихся в элементе x . В [7] доказаны следующие тесты наличия (отсутствия) состязаний.

Теорема 4 (тест наличия функционального состязания). Квазимонотонная функция состояний φ содержит функциональное состязание на переходе (a, b) , если и только если существует элемент $c \in m(a + b)$, такой, что $\varphi^*(c) \cap (\varphi(a) + \varphi(b)) = \emptyset$.

Теорема 5 (тест отсутствия состязаний). Пусть функция $\varphi : U_\varphi \rightarrow I$ квазимонотонна, $a, b \in U_\varphi$ и $a + b \notin U_\varphi$. Тогда φ не содержит ни логического, ни функционального состязания на переходе (a, b) , если и только если $\varphi^*(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$.

Множество переходов $T \subseteq (I^n)^2$ назовём *совместимым для функции* φ , если существует монотонная функция ψ , такая, что $\psi \leq \varphi$ и $\psi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ для любого $(a, b) \in T$. Таким образом, если множество T не совместимо для функции φ , то невозможно построить схему, реализующую функцию φ и устойчивую к состязаниям на всех переходах из множества T одновременно. В [7] приводится алгоритм построения всех максимальных по включению совместимых для квазимонотонной функции φ подмножеств множества переходов T .

Рассмотрим следующую ситуацию. Предположим, что функция φ реализована некоторой схемой C , функционально неустойчивой к состязанию на переходе (a, b) , т.е. имеет место строгое неравенство $\psi(a) + \psi(b) < \psi(a + b)$, где ψ — функция схемы C . Вместе с тем, ввиду $\psi(a) + \psi(b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$, возможно выполнение условия $\psi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$, т.е. выходной сигнал схемы ни при каком распределении задержек не выходит за пределы предполагаемого значения $\varphi(a) + \varphi(b)$ при изменении входного состояния с a на b . Такое состязание в схеме считается несущественным для данной функции φ . Будем называть схему C *φ -устойчивой к состязанию на переходе (a, b)* , если $\psi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$. Сформулируем условия реализуемости произвольной функции φ схемой, φ -устойчивой к состязаниям на всех переходах из заданного множества T , в произвольном базисе (теорема 6) и в RS-базисе (теорема 7). Для этого построим отношение $\Omega_{\varphi, T} \subseteq I^n \times I$ следующим образом: $\Omega_{\varphi, T} = \{(x, \varphi(x)) : x \in U_\varphi\} \cup \{(a + b, \varphi(a) + \varphi(b)) : (a, b) \in T\}$. В общем случае это действительно отношение, а не функция, ввиду возможности равенства $a + b = c + d$ при $(a, b) \neq (c, d)$. Из определения совместимого множества переходов следует, что множество T совместимо для функции φ , если и только если отношение $\Omega_{\varphi, T}$ квазимонотонно. В этом случае по тесту квазимонотонности [1] для любого $(a, b) \in T$ существует нижняя грань множества $F_{ab} = \{\varphi(c) + \varphi(d) : (c, d) \in T \text{ и } c + d = a + b\}$, и можно построить расширение φ_T функции φ на множество $U_\varphi \cup \{a + b : (a, b) \in T\}$, положив $\varphi_T(a + b) = \inf F_{ab}$.

Теорема 6 [8]. Функция φ реализуема в базисе B схемой, φ -устойчивой к состязаниям на всех переходах из совместимого для φ множества T , если и только если в базисе B реализуема функция φ_T . В этом случае любая реализация φ_T реализует φ и является φ -устойчивой к состязаниям на всех переходах из T .

Таким образом, установлено, что задача реализации функции на полурешётках функционально устойчивой схемой есть задача реализации надлежащего расширения исходной функции.

Теорема 7 [8]. Пусть множество переходов T совместимо для функции φ и множество $B \subseteq E_2$ содержит элемент, не сохраняющий отношения γ . Тогда φ_T реализуется

схемой в RS-базисе $B \cup \{R\}$, если и только если для любого $y \in M = \bigcup_{a \in U_{\varphi_T}} m(a_B)$ существует нижняя грань множества $T_y = \{\varphi_T(a) : a \in U_{\varphi_T} \text{ \& } y \in m(a_B)\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агибалов Г. П. Дискретные автоматы на полурешётках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. 227 с.
2. Агибалов Г. П. Дискретные автоматы на полурешётках // Прикладная дискретная математика. 2009. № 2. С. 26–49.
3. Агибалов Г. П., Парватов Н. Г. О полноте систем монотонных функций для реализации квазимонотонных функций на конечных полурешётках // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2002. Т. 9. № 4. С. 5–22.
4. Панкратова И. А. Условия реализуемости функций на полурешётке в реальных базисах переключаемых элементов // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2006. Т. 13. № 3. С. 40–61.
5. Панкратова И. А. Синтез комбинационных переключаемых схем с заданным динамическим поведением // Вестник Томского государственного университета. Июнь 2000. № 271. С. 107–111.
6. Панкратова И. А. Реализация функций проводимости переключаемыми сетями глубины 2 // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 18. С. 14–19.
7. Панкратова И. А. Синтез комбинационных переключаемых схем без состязаний // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2004. № 9(I). С. 245–249.
8. Панкратова И. А. Условия реализуемости функций на полурешетках устойчивыми к состязаниям схемами // Изв. Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. Вып. 1. С. 55–58.
9. Панкратова И. А. Параллельно-последовательная реализация функции мостикового соединения на полурешётках // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 229–233.