

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

DOI 10.17223/20710410/4/6

УДК 519.7

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КРАТЧАЙШЕГО РАЗБИЕНИЯ

Л. Н. Андреева

*Томский государственный университет, г. Томск, Россия***E-mail:** andr@isc.tsu.ru

По технологии сокращённого обхода дерева поиска с возвращением строятся алгоритмы решения задач кратчайшего допустимого разбиения наборов объектов, к которым сводятся многие задачи синтеза минимальных схем в программируемых базисах ПЛМ, ПЗУ, ПМВ, ПМЛ и их оптимального распределения по конструктивным ячейкам компоновочного пространства.

Ключевые слова: *метод сокращённого обхода дерева поиска, кратчайшее допустимое разбиение, синтез, компоновка.*

Введение

Рассматривается задача кратчайшего допустимого разбиения множества наборов объектов (далее: ЗКДР), которая в абстрактной своей постановке формулируется следующим образом. Пусть даны *разбиваемое* множество $A \subseteq D = D_1 \times \dots \times D_m$, *допускающее* множество $B \subseteq E = E_1 \times \dots \times E_n$, где D и E — декартовы произведения конечных множеств элементов, $m, n \geq 1$, отношение частичного порядка r на E и *допускающая* функция f из $\tilde{D}$ в E , где $\tilde{D}$ — множество всех подмножеств в D . Подмножество $C \subseteq A$ называется *допустимым*, если $\exists b \in B(f(C)rb)$. Разбиение R множества A называется *допустимым разбиением*, если каждый класс C в R является допустимым множеством. Допустимое разбиение R множества A называется *кратчайшим*, если для любого допустимого разбиения R' множества A справедливо $|R| \leq |R'|$. Требуется для заданных A , B , f и r найти кратчайшее допустимое разбиение R .

Многие задачи из приложений дискретной математики ставятся и решаются как ЗКДР с конкретными входными данными A , B , f и r . В частности, к ней сводятся различные варианты задачи синтеза минимальных функциональных схем из программируемых интегральных компонент, или ПЛИС, типа программируемые логические матрицы (ПЛМ) — Programmable Logic Arrays (PLA), программируемые постоянные запоминающие устройства (ПЗУ) — Programmable Read Only Memory (PROM), программируемые матрицы логики (ПМЛ) — Programmable Array Logics (PAL), программируемые матрицы вентилей (ПМВ) — Programmable Gate Arrays (PGA) и в их оптимальном распределении по ячейкам компоновочного пространства, ограниченным по вместимости, числу выводов или элементному составу. Так, применительно к синтезу схем на базе ПЛИС в качестве элементов множества A обычно выступают ДНФ или расширенные АНФ булевых функций с такими параметрами, как номер ДНФ (или расширенной АНФ), множество букв в ней, число конъюнкций и т. п., а в качестве элементов множества B — ПЛИС заданного базиса с такими параметрами, как

число входов ПЛИС, число выходов ПЛИС, число промежуточных (горизонтальных) шин, число макроячеек и т. п. Значение $f(C)$ характеризует сложность множества формул C , а отношение r — реализуемость подмножества формул конкретной ПЛИС, а именно: ПЛИС b реализует множество C , если $f(C)rb$.

Применительно же к компоновке схем в заданные ячейки в качестве элементов множества A обычно выступают элементы схемы с такими параметрами, как номер элемента в схеме, множество «окрасок» полюсов, число входов, оператор и т. п., а в качестве элементов множества B — заданные ячейки с такими параметрами, как вместимость ячейки, число ее внешних выводов, элементный состав и т. п. Функция f вычисляет размер подсхемы C , число ее внешних выводов, элементный состав и т. п., а отношение r — возможность компоновки этой подсхемы в ячейку b заданного конструктивного базиса B , если $f(C)rb$.

Среди возможных точных методов решения ЗКДР, таких, как метод полного перебора, метод ветвей и границ, метод прямого размещения, методы 0–1 программирования, выбран метод сокращенного обхода дерева поиска с возвращением (далее Т-метод) из [1]. Применительно к ЗКДР вершинам дерева поиска в этом методе сопоставляются подмножества Y разбиваемого множества A , само множество A сопоставляется корню дерева, а пустое множество — его листьям. Ребрам дерева поиска сопоставляются допустимые подмножества множества A . Разность множеств, соответствующих концам ребра, приписывается ребру. Всякий путь от корня к листу сопоставлен допустимому разбиению множества A . Сокращенный обход дерева поиска представляет собой общий алгоритм поиска в глубину с возвращением и сохранением более короткого разбиения. Метод содержит средства сокращения поиска, которые являются параметрами метода: множество ρ быстродействующих алгоритмов, используемых для получения начального разбиения R_0 , алгоритм φ перечисления всех максимальных допустимых подмножеств в $Y \subseteq A$, образующих множество $\varphi(Y)$, операция ψ сокращения множества $\varphi(Y)$ и граничная функция $F_0(Y)$ отсечения поддеревьев с корнем в Y без потери решения. Эти параметры служат для ускорения поиска какого-либо одного кратчайшего разбиения множества A .

Для решения конкретной ЗКДР Т-методом нужно подобрать подходящие значения параметров и подставить их в формулировку метода. Полученный в результате алгоритм и будет алгоритмом решения этой ЗКДР. Его эффективность определяется сокращающими способностями подобранных параметров, т. е. степенью близости начального разбиения R_0 к кратчайшему разбиению, степенью точности функции F_0 и степенью ветвления дерева с помощью композиции $\psi(\varphi(Y))$.

Подобрать подходящие нетривиальные значения параметров Т-метода для ЗКДР с произвольными A , B , f и r представляется невозможным. Поэтому выделены два варианта ЗКДР: задача кратчайшего допустимого разбиения с монотонной допускающей функцией f — ЗКДР1 [2, 3] и задача кратчайшего допустимого разбиения с немонотонной двухкомпонентной допускающей функцией f — ЗКДР2 [4]. Именно к частным случаям этих вариантов ЗКДР сводятся все рассматриваемые задачи синтеза и компоновки схем на современной элементной и конструктивной базе.

В статье далее для каждой из задач ЗКДР1 и ЗКДР2 описываются необходимые параметры Т-метода, формулируются частные случаи, возникающие из приложений к синтезу и компоновке схем, — ЗКДР 3, 4 и ЗКДР 5, 6, 7 соответственно, и для каждого такого случая с учётом его специфики указываются параметры Т-метода, более эффективные, чем параметры для общего случая. Приводятся примеры задач синтеза и компоновки, которые сводятся к данным частным случаям ЗКДР1 и ЗКДР2 и,

следовательно, решаются теми же алгоритмами, что и сами частные случаи, к которым они сводимы. Приводятся также комбинаторные свойства рассматриваемых задач разбиения ЗКДР 3–7 и алгоритмов их решения Т-методом.

1. Задача о кратчайшем допустимом разбиении 1

1.1. Параметры Т-метода для ЗКДР 1

Пусть в ЗКДР отношение r является отношением частичного порядка $\leq$ на E , и f — монотонная функция, т.е. $\forall C, S \in \tilde{D}(C \subseteq S \Rightarrow f(C) \leq f(S))$. Всякое подмножество $C \subseteq A$ является допустимым, если $\exists b \in B(f(C) \leq b)$. ЗКДР1 ставится следующим образом: для заданных A, B, f и r найти кратчайшее допустимое разбиение R .

Для разрешимости задачи требуется, чтобы каждое одноэлементное подмножество в A было допустимым, т.е. $\forall a \in A \exists b \in B(f\{a\} \leq b)$. Элементы множества $a \in A$ упорядочиваются и нумеруются по невозрастанию значений $f(\{a\})$. Предполагается, что введенный на A порядок сохраняется в любом $Y \subseteq X \subseteq A$. Из B удаляется всякий элемент b , для которого $\exists b' \in B(b \leq b') \vee \forall a \in A(b \leq f(\{a\}))$, в результате получается неприводимое множество $B' \subseteq B$. Впредь считается, что множество B неприводимое, в котором элементы занумерованы числами $1, \dots, |B|$. Через u обозначается мощность наибольшего допустимого подмножества в $Y \subseteq X \subseteq A$. При перечисленных допущениях и условиях подходящие значения параметров Т-метода для ЗКДР1 определяются следующим образом.

Алгоритмы начального разбиения. Для получения начального разбиения R_0 множества A предлагаются быстродействующие алгоритмы ρ_1 и ρ_2 , образующие в Т-методе множество ρ . Алгоритм ρ_1 строит разбиение R_1 множества A последовательно класс за классом, набирая каждый новый класс из тех элементов, рассматриваемых в заданном порядке, которые не вошли в уже набранные классы. Формирование класса заканчивается, когда исчерпываются все элементы в A или когда добавление к нему любого элемента из остатка нарушает свойство допустимости этого класса. Алгоритм ρ_2 строит разбиение R_2 множества A также последовательно, однако в отличие от ρ_1 каждый новый класс составляется из двух таких образуемых одно за другим допустимых подмножеств C и S , объединение которых есть допустимое множество. Первое подмножество (C) набирается с начала множества A из подряд стоящих элементов с меньшими номерами, не вошедших в другие классы, а второе (S) — с конца множества A из подряд стоящих элементов с большими номерами, оставшихся после образования первого. Построение каждого подмножества может закончиться, когда исчерпаны все элементы в A . В противном случае построение C заканчивается, когда добавление к нему очередного элемента с начала множества A нарушает свойство допустимости этого подмножества, а построение S — когда добавление к нему очередного элемента с конца множества A нарушает свойство допустимости множества $C \cup S$, т.е. всего класса. За R_0 принимается то из разбиений R_1, R_2 , которое содержит меньше классов.

Алгоритм перечисления (φ) допустимых подмножеств. Для любого $Y \subseteq X = A$ и любого $a_i \in Y$ через $\varphi^{(i)}(Y)$ обозначается множество всех максимальных допустимых подмножеств в Y , содержащих a_i , и через $A^{(i)} \subset Y$ — множество всех тех $a_k \in Y$, расположенных в порядке возрастания их номеров, для которых $i \neq k$ и множество $\{a_i, a_k\}$ является допустимым. Алгоритм перечисления φ составляют следующие четыре правила выделения некоторых максимальных допустимых подмножеств в Y , применяемые в указанном порядке.

- 1) Если для некоторого допустимого $C = \{a_i, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\} \subseteq Y$ справедливо соотношение $\{a_i, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\} = A^{(i)} \cup \{a_i\}$, то $\varphi(Y) = \{C\}$ для a_i с наименьшим i и указанным свойством.
- 2) Если для некоторых $a_i, a_k \in Y$ множество $C = \{a_i, a_k\} \subseteq Y$ есть максимальное допустимое множество и все подмножества $H = (A^{(i)}(Y) \cup A^{(k)}(Y)) \setminus C$ являются допустимыми множествами, то $\varphi(Y) = \{C\}$ для a_i, a_k с наименьшими i, k и указанными свойствами.
- 3) Если для некоторых различных $a_i, a_k \in Y$ и любых различных $a_p, a_q \in Y$, таких, что $a_p \in A^{(i)}(Y)$, $p \neq q$, $a_q \in A^{(k)}(Y)$, $q \neq i$, множества $C = \{a_i, a_k\}$ и $H = \{a_p, a_q\}$ допустимы и для любого трехэлементного подмножества S в Y , включающего a_p или a_q , справедливо условие $\exists b \in B(f(S) \leq b)$, то $\varphi(Y) = \{C\}$ для a_i, a_k с наименьшими i, k и указанными свойствами.
- 4) Во всех остальных случаях $\varphi(Y) = \varphi^{(i)}(Y)$ для некоторого $a_i \in Y$.

Такое множество $\varphi(Y)$ может остаться после неудачного применения правил 2, 3, и тогда i есть либо i , либо k в этих правилах. Алгоритм построения этого множества $\varphi(Y)$ строит множество $\varphi^{(i)}(Y)$ для заданного $a_i \in Y$ в процессе направленного перебора по дереву аналогично алгоритму построения всех максимальных независимых (внутренне устойчивых) множеств в графе [5] и по существу представляет собой обобщение последнего на случай произвольной монотонной допускающей функции f .

Операция сокращения. Для определения операции сокращения (ψ) на множестве всех подмножеств в $Y \subseteq X = A$ вводится отношение предшествования α следующим образом. Пусть $C = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_p}\} \subseteq Y$, $S = \{a_{k_1}, \dots, a_{k_q}\} \subseteq Y$, $i_2 < \dots < i_p$, $k_2 < \dots < k_q$. Тогда $C \alpha S \Leftrightarrow$

$$[p \geq q \wedge \forall t \in \{1, \dots, q\} (i_t \leq k_t \Rightarrow \forall H \subseteq Y (a_{i_t} \in H \Rightarrow f(H \setminus \{a_{i_t}\} \cup \{a_{i_k}\}) \leq f(H)))] \quad (1)$$

$$\vee [|C| \leq |S| \wedge C \setminus S = \{a_i\} \wedge T = (A^{(i)}(Y) \cup S) \setminus C \Rightarrow \forall H \subseteq T (\exists b \in B(f(H) \leq b))], \quad (2)$$

и результат применения операции ψ к множеству $Z \subseteq \varphi(Y)$ определяется как множество $\psi(Z) = \psi_2(\psi_1(Z))$, где $\psi_1(Z) \subseteq Z$ есть множество, содержащее всякое такое множество $S \subseteq Z$, для которого в Z не существует множества $C \neq S$ и $C \alpha S$ согласно (1), а $\psi_2(\psi_1(Z)) \subseteq \psi_1(Z)$ есть множество, содержащее всякое такое множество $S \in \psi_1(Z)$, для которого в $\psi_1(Z)$ не существует множества $C \neq S$ и $C \alpha S$ согласно (2) или если такое множество $C \in \psi_1(Z)$ существует, то и $S \alpha C$ согласно (2). При этом C (либо S) не включается в $\psi(Z)$.

Граничная функция. Граничная функция F_0 определяется формулой $F_0(Y) = \max(\sigma, \tau)$, где $\sigma = \lceil |Y|/u \rceil$ и τ есть мощность некоторого подмножества попарно несовместимых элементов в Y , т.е. таких различных $a, k \in Y$, для которых $\exists b \in B(f(\{a, k\}) \leq b)$, определяемая с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм τ

- 1) $C := Y$, $\tau := 0$.
- 2) Если $C = \emptyset$, то τ — результат; в противном случае берем любой элемент $a_i \in Y$ с наименьшим пересечением $C \cap A^{(i)}$. Полагаем $C := C \setminus (A^{(i)} \cup \{a_i\})$, $\tau := \tau + 1$ и повторяем п. 2 с начала.

В [2, 3] доказывается допустимость алгоритма перечисления и операции сокращения для ЗКДР1, т.е. доказывается достаточность множества $\psi(\varphi(Y))$ для любого $Y \subseteq X = A$.

Далее рассматриваются частные случаи ЗКДР1, имеющие прикладное значение. Они выделяются последовательной конкретизацией A , B , f и r , и для каждого из них

предлагаются значения параметров Т-метода, более эффективные, чем указанные для ЗКДР1.

1.2. Задача о кратчайшем допустимом разбиении $\mathcal{Z}$ и синтез одноярусных схем в базисах ПЛИС

Формулируется частный случай ЗКДР1, называемый ЗКДР3 [6–8]. В этой задаче разбиваемым множеством является набор объектов $I(I, M, N)$ с атрибутами I, M, N . Объект в этом наборе представляет собой кортеж $\langle i, M_i, N_i \rangle$, где i — номер объекта, являющийся его идентификатором, M_i, N_i — конечные множества, $i = 1, \dots, m, m \geq 1$. Допускающим множеством является набор объектов $J(J, U, V, W)$ с атрибутами J, U, V, W . Объект в этом наборе представляет кортеж $\langle j, u_j, v_j, w_j \rangle$, где j — номер объекта, являющийся его идентификатором, u_j, v_j, w_j — натуральные числа, $j = 1, \dots, n, n \geq 1$. Для разрешимости задачи предполагается, что

$$\forall i \in I \exists j \in J (1 \leq u_j \wedge |M_i| \leq v_j \wedge |N_i| \leq w_j). \quad (3)$$

Для любого $C \subseteq I$ вводятся обозначения $O(C, M) = \bigcup_{i \in C} M_i, O(C, N) = \bigcup_{i \in C} N_i$. Подмножество $C \subseteq I$ называется допустимым, если

$$\exists j \in J (|C| \leq u_j \wedge |O(C, M)| \leq v_j \wedge |O(C, N)| \leq w_j). \quad (4)$$

ЗКДР3 ставится следующим образом: для заданных наборов объектов $I(I, M, N), J(J, U, V, W)$ найти кратчайшее допустимое разбиение R множества I .

Для решения этой задачи Т-методом конкретизируются параметры метода, данные выше для решения ЗКДР1. Предварительно для каждого $i \in I$ через s_i обозначается число собственных, т.е. не принадлежащих другим множествам в $M = \{M_1, \dots, M_m\}$, элементов множества M_i , и через σ_i обозначается число собственных, т.е. не принадлежащих другим множествам в $N = \{N_1, \dots, N_m\}$, элементов множества N_i . На множестве кортежей $\langle |M_i|, s_i, |N_i|, \sigma_i \rangle, i = 1, \dots, m$, вводится лексикографический порядок $\geq$, и объекты в I нумеруются в соответствии с этим порядком. Он сохраняется в любом $Y \subseteq X \subseteq I$. Из J удаляется всякий объект j , для которого $\exists k \in J (u_k \geq u_j \vee v_k \geq v_j \vee w_k \geq w_j)$, в результате получается неприводимый набор объектов $J' \subseteq J$. Впредь считается, что набор объектов J неприводимый, в нем вводится лексикографический порядок $\leq$, и объекты в J нумеруются в соответствии с этим порядком.

Для получения **начального разбиения** R_0 множества I используются алгоритмы ρ_1 и ρ_2 для ЗКДР1, в которых $A = I, B = J$ и допустимость подмножеств в I трактуется согласно (4).

Алгоритм перечисления допустимых подмножеств совпадает с одноименным алгоритмом для ЗКДР1, в котором $A = I, B = J$ и допустимость подмножеств в I трактуется согласно (4).

Для определения **операции сокращения** (ψ) на множестве всех подмножеств в $Y \subseteq X = A$ вводится отношение предшествования α следующим образом. Пусть $C = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq Y, S = \{k_1, \dots, k_q\} \subseteq Y, i_2 < \dots < i_p, k_2 < \dots < k_q$. Тогда $C \alpha S \Leftrightarrow$

$$[p \geq q \wedge \forall t \in \{1, \dots, q\} (i_t \leq k_t \Rightarrow |M_{k_t} - M_{i_t}| \leq s_i \wedge |N_{k_t} - N_{i_t}| \leq \sigma_i)], \quad (5)$$

$$\vee [C \setminus S = \{k\} \wedge T = (A^{(k)}(Y) \cup S) \setminus C \Rightarrow \exists j \in J (|T| \leq u_j \wedge |O(T, M)| \leq v_j \wedge |O(T, N)| \leq w_j)], \quad (6)$$

и результат применения операции ψ к множеству $Z \subseteq \varphi(Y)$ определяется как множество $\psi(Z) = \psi_2(\psi_1(Z))$, где $\psi_1(Z) \subseteq Z$ есть множество, содержащее всякое такое

множество $S \subseteq Z$, для которого в Z не существует множества $C \neq S$ и $C\alpha S$ согласно (5), а $\psi_2(\psi_1(Z)) \subseteq \psi_1(Z)$ есть множество, содержащее всякое такое множество $S \in \psi_1(Z)$, для которого в $\psi_1(Z)$ не существует множества $C \neq S$ и $C\alpha S$ согласно (5) или если такое множество $C \in \psi_1(Z)$ существует, то и $S\alpha C$ согласно (6). При этом C (либо S) не включается в $\psi(Z)$.

Граничная функция F_0 определяется формулой $F_0(Y) = \max(k, l, p, \tau)$, где $k = \lceil |Y|/u_n \rceil$, $l = \left\lceil |O(Y, M)| / \max_{j \in J} v_j \right\rceil$, $p = \left\lceil |O(Y, N)| / \max_{j \in J} w_j \right\rceil$ и τ есть мощность некоторого подмножества попарно несовместимых элементов в Y , определяемая с помощью алгоритма τ .

Алгоритм решения ЗКДРЗ Т-методом с указанными параметрами является одновременно алгоритмом решения для всех сводимых к ней конкретных задач. В качестве примеров последних рассмотрим три задачи синтеза минимальных по числу элементов одноярусных схем некоторых типов в различных базисах ПЛИС.

В первой задаче требуется реализовать заданную систему D из $m \geq 1$ ДНФ $\{D_1, \dots, D_m\}$ минимальной по числу элементов одноярусной комбинационной схемой, не допускающей объединения выходов своих элементов по схеме ИЛИ, в базисе ПЛМ (PLA) и ПЗУ (PROM) $E = \{PLA_1(s_1, t_1, q_1), \dots, PLA_p(s_p, t_p, q_p), PROM_{p+1}(s_{p+1}, t_{p+1}), \dots, PROM_n(s_n, t_n)\}$, где $0 \leq p \leq m$. Иначе говоря, требуется разбить систему D на минимальное число подсистем, каждая из которых реализуема хотя бы одним элементом базиса E . Принимая систему D за набор объектов I , а базис E — за набор объектов J , т.е. принимая D_i для $i = 1, \dots, m$ за объект $\langle i, M_i, N_i \rangle$, где M_i есть множество букв в D_i и N_i есть множество конъюнкций в D_i , и принимая j -й элемент базиса E для $j = 1, \dots, n$ за объект $\langle j, u_j, v_j, w_j \rangle$, где $u_j = t_j$, $v_j = s_j$, $w_j = q_j$ для $j = 1, \dots, p$ и $u_j = t_j$, $v_j = s_j$, $w_j = 2^{s_j}$ для $j = p+1, \dots, n$, получаем ЗКДРЗ.

Во второй задаче требуется реализовать заданную систему D из $m \geq 1$ ДНФ $\{D_1, \dots, D_m\}$ минимальной по числу элементов одноярусной комбинационной схемой, не допускающей объединения выходов своих элементов по схеме ИЛИ, в базисе E из $m \geq 1$ настраиваемых ПЛМ (PLA) $E = \{PLA_1(z_1, q_1), \dots, PLA_n(z_n, q_n)\}$, где z_j — число двунаправленных шин, которые могут служить как входами, так и выходами, и q_j — число промежуточных шин в $PLA_j(z_j, q_j)$ для $j = 1, \dots, n$. Иначе говоря, требуется разбить систему D на минимальное число подсистем, каждая из которых реализуема хотя бы одним элементом базиса E . Принимая систему D за набор объектов I , а базис E — за набор объектов J , т.е. принимая D_i для $i = 1, \dots, m$ за объект $\langle i, M_i, N_i \rangle$, где M_i есть множество букв в D_i , включающее наряду с буквами и номер i ДНФ D_i , и N_i есть множество конъюнкций в D_i , и принимая j -й элемент базиса E для $j = 1, \dots, n$ за объект $\langle j, u_j, v_j, w_j \rangle$, где $u_j = n$, $v_j = z_j$, $w_j = q_j$ для $j = 1, \dots, p$ и $u_j = t_j$, $v_j = s_j$, $w_j = 2^{s_j}$ для $j = p+1, \dots, n$, получаем ЗКДРЗ.

В третьей задаче требуется реализовать заданную систему D из $m \geq 1$ ДНФ $\{D_1, \dots, D_m\}$ минимальной по числу элементов одноярусной комбинационной схемой, допускающей объединения выходов своих элементов по схеме ИЛИ, в базисе ПЛМ (PLA) и ПМВ (PGA) $E = \{PLA_1(s_1, t_1, q_1), \dots, PLA_p(s_p, t_p, q_p), PGA_{p+1}(s_{p+1}, t_{p+1}), \dots, PGA_n(s_n, t_n)\}$, где $0 \leq p \leq n$. Иначе говоря, требуется разбить множество K всех m различных конъюнкций системы D на минимальное число подмножеств, каждое из которых реализуется хотя бы одним элементом базиса E . Принимая множество K за набор объектов I , а базис E — за набор объектов J , т.е. принимая K_i для $i = 1, \dots, m$ за объект $\langle i, M_i, N_i \rangle$, где M_i есть множество букв в K_i и N_i есть множество ДНФ системы D , содержащих K_i , и принимая j -й элемент базиса E для $j = 1, \dots, n$ за объ-

ект $\langle j, u_j, v_j, w_j \rangle$, где $u_j = t_j$, $v_j = s_j$, $w_j = q_j$ для $j = 1, \dots, p$ и $u_j = t_j$, $v_j = s_j$, $w_j = t_j$ для $j = p+1, \dots, n$, получаем ЗКДРЗ.

Кроме того, в ЗКДРЗ легко просматривается задача компоновки произвольной схемы из одногабаритных элементов, все полюсы которой объявлены внешними, в ячейки, различные по вместимости или по числу выводов.

Заметим, что условие (3), наложенное на наборы объектов $I(I, M, N)$ и $J(J, U, V, W)$, является по существу условием разрешимости как самой ЗКДРЗ, так и всех сводимых к ней задач.

1.3. Задача о кратчайшем допустимом разбиении 4 и покрытие схем свободными модулями

Формулируется частный случай ЗКДР1, называемый ЗКДР4 [9, 10]. В этой задаче разбиваемым множеством является набор объектов $I(I, S)$ с атрибутами I, S . Объект в этом наборе представляет кортеж $\langle i, e_i \rangle$, где i — номер объекта, являющийся его идентификатором, e_i — элемент произвольной природы, $i = 1, \dots, m$, $m \geq 1$. Допускающим множеством является набор объектов $J(J, U)$ с атрибутами J, U . Объект в этом наборе представляет кортеж $\langle j, U_j \rangle$, где j — номер объекта, являющийся его идентификатором, U_j — конечное семейство (множество не обязательно различных) элементов той же природы, что и элемент e_i , $j = 1, \dots, n$, $n \geq 1$. Элементы $e_i \in S$ рассматриваются как одноэлементные подмножества некоторого множества E или как одноэлементные семейства над E , т. е. $e_i = \{e_i\} \subseteq E$, а семейства $U_j \in U$ — как произвольные конечные семейства над E , элементы которых (в том числе и одинаковые) различаются их номерами. Предполагается, что на множестве E задан частичный порядок, обозначаемый ∇ , называемый *отношением покрытия* и распространяемый на множество $\tilde{E}$ всех семейств над E следующим образом: для любых $A, B \in \tilde{E}$ говорят, что A покрывает B , или B покрывается A , если каждому элементу $b \in B$ можно сопоставить взаимно однозначно элемент $a \in A$ так, что $a \nabla b$. В случае $A = U_j$ для некоторого $j \in J$ и $B = e_i$ для некоторого $i \in I$ пишется $U_j \nabla e_i$ и говорится, что U_j покрывает e_i , или что объект j покрывается объектом i .

Для разрешимости задачи предполагается, что

$$\forall i \in I \exists j \in J (U_j \nabla e_i), \quad (7)$$

т. е. любой объект i в наборе I покрывается хотя бы одним объектом j в наборе J . Для любого $C \subseteq I$ вводится обозначение $O(C) = \bigcup_{i \in C} e_i$. Подмножество C называется допустимым, если

$$\exists j \in J (U_j \nabla O(C)). \quad (8)$$

В случае допустимого $C \subseteq I$ говорят, что $O(C)$ покрывается U_j , или C покрывается объектом $j \in J$.

ЗКДР4 ставится следующим образом: для заданных наборов объектов $I(I, S)$, $J(J, U)$ найти кратчайшее допустимое разбиение R множества I .

Данная задача является частным случаем ЗКДР1, где $A = I(I, S) \subseteq D = D_1 \times D_2$, $B = J(J, U) \subseteq E = E_1 \times E_2$, и решается Т-методом как ЗКДР1 с входящей конкретизацией одноименных параметров.

Предварительно объекты в I упорядочиваются и нумеруются так, что $\forall i, j \in I$ ($i < k \Rightarrow (e_i \nabla e_k \vee e_i \neq e_k)$), где $e_i \neq e_k$ означает, что e_i и e_k не сравнимы по отношению ∇ , т. е. $\neg(e_i \nabla e_j) \wedge \neg(e_i \nabla e_j)$. Введенный на I порядок, если это специально не оговаривается, сохраняется в любом $Y \subseteq X = I$. Вводится в рассмотрение множество $x = E(S) \subseteq E$ всех элементов в E , входящих в множество (семейство)

$S = \{e_1, \dots, e_m\}$, и множество $E(U) \subseteq E$ всех элементов в E , входящих в множество (семейство) $U = \{U_1, \dots, U_n\}$. На $E(U)$ определяется отношение частичного порядка ∇^x следующим образом: $a \nabla^x b$, если для любого $e \in E$ из $b \nabla e$ следует $a \nabla e$. Это отношение называется *поглощением на x* , и говорится, что a *поглощает b на x* , или b *поглощается на x элементом a* , если $a \nabla^x b$. Легко проверить, что если $a \nabla b$, то $a \nabla^x b$ для любого множества $x \subseteq E$, т. е. $a \nabla b \Rightarrow a \nabla^x b$. Для любых двух семейств $U_k, U_j \subseteq U$ говорится, что U_k *поглощает U_j на x* , или U_j *поглощается на x семейством U_k* , т. е. $a \nabla^x b$, если каждому элементу $b \subseteq U_j$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие элемент $a \subseteq U_k$ так, что $a \nabla^x b$. Очевидно, что из $U_k \nabla U_j$ следует $U_k \nabla^x U_j$ для любого множества $x \subseteq E$, и $U_k \nabla^x U_j$ тогда и только тогда, когда для любого $Y \subseteq X$ из $U_j \nabla Y$ следует $U_k \nabla Y$.

Из J удаляется всякий объект j , для которого $\exists k \in J(U_k \nabla^x U_j) \vee \forall i \in I \neg (U_j \nabla e_i)$, в результате получается *неприводимый по $x = E(S)$ набор объектов* $J' \subseteq J$, в котором для любых двух различных семейств $U_k, U_j \subseteq U$ справедливо $\neg (U_k \nabla^x U_j) \wedge \neg U_j \nabla^x U_k$. Впредь считается, что набор объектов J неприводимый, в нем объекты упорядочиваются по неубыванию $|U_j|$ и нумеруются в соответствии с этим порядком. Для заданного упорядоченного множества $U = \{1, \dots, n\}$, любого упорядоченного множества $Y = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq X = I$ и любых $j \in I, i_k \in Y$ определяется множество $Y(j, i_k) \subseteq Y$ при помощи следующего алгоритма:

- 1) $A := \emptyset, l := k - 1$.
- 2) Если $l = p$, то п. 3; в противном случае $l := l + 1$, и если не $U_j \nabla O(A \cup i_l)$, то п. 2; в противном случае $A := A \cup i_l$ и п. 2.
- 3) $Y(j, i_k) := A$.

Индуктивно $Y(j, i_k)$ определяется следующим образом: если $A \subseteq Y(j, i_k)$ и i_l есть наименьший номер в $Y \setminus A$ со свойством $U_j \nabla O(A \cup i_l)$, то $i_l \in Y(j, i_k)$.

По определению $U_j \nabla O(Y(j, i_k))$, т. е. $Y(j, i_k)$ допустимо.

Начальное допустимое разбиение R_0 множества $X = I$ строится последовательно класс за классом по следующему правилу: если разность множества X и объединения уже построенных классов есть $Y = \{i_1, \dots, i_p\}$, то в качестве очередного класса в R_0 берется подмножество в Y наибольшей мощности среди подмножеств $Y(j, i)$ для $j = 1, \dots, n$ и $i = i_1, \dots, i_p$. Это правило принимается за алгоритм ρ_1 .

Алгоритм перечисления (φ) допустимых подмножеств. Для любого $Y \subseteq X = I$ и любого $i \in Y$ через $\varphi^{(i)}(Y)$ обозначается множество всех максимальных допустимых подмножеств в Y , содержащих i , и через $A^{(i)} \subset Y$ — множество всех тех $k \in Y$, расположенных в порядке возрастания, для которых $i \neq k$ и множество $\{i, k\}$ является допустимым. Алгоритм перечисления φ составляют следующие три правила выделения некоторых максимальных допустимых подмножеств в Y , применяемые в указанном порядке.

- 1) Если для некоторого допустимого $C = \{i, i_1, \dots, i_k\} \subseteq Y$ справедливо соотношение $\{i_1, \dots, i_k\} = A^{(i)}$, то $\varphi(Y) = \{C\}$ для наименьшего такого i .
- 2) Если для некоторого допустимого $C = \{i, k\} \in Y$ справедливы соотношения

$$A^{(i)} \cap A^{(k)} \neq \emptyset \Rightarrow \forall l \in A^{(i)} \cap A^{(k)} \neg \exists j \in J(U_j \nabla O(\{i, k, l\})),$$

$$\forall H \in \varphi^{(i)}(Y) \forall C \in \varphi^{(k)}(Y) (H \cap C = \emptyset \Rightarrow \exists j \in J(U_j \nabla (O(H \setminus \{i\}) \cup O(C \setminus \{k\})))),$$

то $\varphi(Y) = \{C\}$ для наименьших i, k с указанными свойствами.

- 3) Во всех остальных случаях $\varphi(Y) = \varphi^{(i)}(Y)$ для некоторого $i \in Y$.

Такое множество $\varphi(Y)$ может остаться после неудачного применения правила 2, и тогда i есть либо i , либо k в этом правиле. Алгоритм построения этого множества $\varphi(Y)$ совпадает с точностью до определения свойства допустимости с одноименным алгоритмом для ЗКДР1.

Операция сокращения. Имея в виду, что $E(U)$ есть множество всех элементов в E , входящих в семейства множества $U = \{U_1, \dots, U_n\}$, для любых $A, B \in \tilde{E}$ пишется $A \nabla_U B$, если каждому элементу $b \subseteq B$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие элемент $a \subseteq A$ так, что всякий элемент в $E(U)$, покрывающий a , покрывает и b . Очевидно, что если $A \nabla B$, то $A \nabla_U B$. Для определения операции сокращения (ψ) на множестве всех подмножеств в $Y \subseteq X = I$ вводится отношение предшествования α следующим образом. Пусть $C = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq Y$, $S = \{k_1, \dots, k_q\} \subseteq Y$, $i_2 < \dots < i_p$, $k_2 < \dots < k_q$. Тогда $C \alpha S \Leftrightarrow$

$$[p \geq q \wedge \forall t \in \{1, \dots, q\} (i_t \leq k_t \Rightarrow e_{i_t} \nabla e_{k_t})], \quad (9)$$

$$\vee [C \setminus S = \{i\} \wedge \forall H \in \varphi^{(i)}(Y) (S \cap H = \emptyset \Rightarrow \exists j \in J(U_j \nabla (O(S \setminus C) \cup O(H \setminus \{i\}))))], \quad (10)$$

и результат применения операции ψ к множеству $Z \subseteq \varphi(Y)$ определяется как множество $\psi(Z) = \psi_2(\psi_1(Z))$, где $\psi_1(Z) \subseteq Z$ есть множество, содержащее всякое такое множество $S \subseteq Z$, для которого в Z не существует множества $C \neq S$ и $C \alpha S$ согласно (9), а $\psi_2(\psi_1(Z)) \subseteq \psi_1(Z)$ есть множество, содержащее всякое такое множество $S \in \psi_1(Z)$, для которого в $\psi_1(Z)$ не существует множества $C \neq S$ и $C \alpha S$ согласно (10) или если такое множество $C \in \psi_1(Z)$ существует, то и $S \alpha C$ согласно (10). При этом C (либо S) не включается в $\psi(Z)$.

Граничная функция F_0 определяется формулой $F_0(Y) = \max(k, \tau)$, где $k = \lceil |Y|/|U_n| \rceil$ и τ есть мощность некоторого подмножества попарно несовместимых элементов в Y , определяемая с помощью алгоритма τ .

К ЗКДР4 сводится следующая задача компоновки произвольной схемы в ячейки с заданным элементным составом — свободные модули. В ней рассматривается конструктивный базис T из $n \geq 1$ ячеек, составленных из некоммутированных элементов некоторых типов, и схема S из $m \geq 1$ элементов в базисе элементов ячеек в T . Требуется скомпоновать схему Y в минимальное число ячеек базиса T , т. е. разбить ее на минимальное число подсхем, каждая из которых может быть «набрана» из элементов некоторой ячейки в T . Элементы схемы S принимаются за объекты набора $I(I, S)$, а ячейки базиса T — за объекты набора $J(J, M)$. Каждый элемент в S и в ячейках базиса T представляется кортежем вида $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$, где $a_1, a_2, \dots, a_k$ имеют в зависимости от типа элемента и его принадлежности схеме S либо ячейке в T различный смысл. Например, $a_1, a_2, \dots, a_k$ являются натуральными числами, задающими тип элемента, коэффициент разветвления выхода элемента, число входов элемента схемы (если элемент принадлежит ячейке), число задействованных переменными входов (если элемент принадлежит схеме) и др. Кортеж $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$, представляющий элемент e , обозначается символом e . Пусть E — множество всевозможных кортежей вида $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$. Отношение частичного порядка на E , называемое *отношением покрытия* и обозначаемое ∇ , определяется следующим образом: для любых $e, e' \in E$ говорим, что e покрывает e' , или e' покрывается e , и пишем $e \nabla e'$, если $a_1 \geq a'_1 \wedge a_2 \geq a'_2 \wedge \dots \wedge a_k \geq a'_k$. Это отношение распространяется на множество $\tilde{E}$ всех семейств над E следующим образом: для любых $A, B \in \tilde{E}$ говорим, что A покрывает B , или B покрывается A , и пишем $A \nabla B$, если каждому кортежу $b \in B$ можно сопоставить взаимно однозначно кортеж $a \in A$ так, что $a \nabla b$. Это отношение

имеет следующий смысл: если $e \nabla e'$, то в любой схеме, содержащей e' , элемент e' может быть заменен элементом e (возможно предварительно настроенным на e' путем отождествления некоторых его полюсов или подачи констант на некоторые его входы) так, что не нарушается правильность организации схемы и не изменяются реализуемые ею функции. Более того, если $A, B \in \tilde{E}$ представляют соответственно множество элементов некоторой ячейки в T , множество элементов некоторой подсхемы в S и $A \nabla B$, то подсхема B может быть «набрана» из элементов в A , т.е. покрывается ячейкой A .

2. Задача о кратчайшем допустимом разбиении 2

2.1. Параметры Т-метода для ЗКДР2

Пусть в ЗКДР отношение r является отношением частичного порядка $\leq$ на $E = E_1 \times E_2$, $r = (r_1, r_2)$, где r_1 — частичный порядок на E_1 , r_2 — частичный порядок на E_2 , и $b = (b_1, b_2)$, где $b_1 \in E_1$, $b_2 \in E_2$, f — немонотонная функция, которую можно представить в виде $f = (f_1, f_2)$, где f_1 — монотонная функция из $\tilde{D}$ в E_1 , f_2 — немонотонная функция из $\tilde{D}$ в E_2 . Считается, что всякое подмножество $C \subseteq A$ является допустимым тогда и только тогда, когда $\exists b \in B(f_1(C)r_1b_1) \wedge (f_2(C)r_2b_2)$, и B_1 -допустимым (монотонно допустимым), когда $\exists b \in B(f_1(C)r_1b_1)$, где B_1 — первая проекция множества B . При этом каждое допустимое $C \subseteq A$ является подмножеством некоторого B_1 -допустимого $S \subseteq A$. ЗКДР2 ставится следующим образом: для заданных A, B, f и r найти кратчайшее допустимое разбиение R .

Для разрешимости задачи требуется, чтобы каждое одноэлементное подмножество в A было допустимым, т.е. $\forall a \in A \exists b \in B(f\{a\} \leq b)$. Элементы множества $a \in A$ упорядочиваются и нумеруются по невозрастанию значений $f_1(\{a\})$. Предполагается, что введенный на A порядок сохраняется в любом $Y \subseteq X \subseteq A$. Из B удаляется всякий элемент b , для которого $\exists b' \in B(b \leq b') \vee \forall a \in A(b \leq f(\{a\}))$, в результате получается *неприводимое* множество $B' \subseteq B$. Впредь считается, что множество B неприводимое, в нем элементы занумерованы числами $1, \dots, |B|$. Через u обозначается верхняя оценка мощности наибольшего допустимого подмножества в $Y \subseteq X \subseteq A$.

Алгоритм начального разбиения. Для получения начального разбиения R_0 корректируется приближенный быстродействующий алгоритм ρ_1 следующим образом. Всякий раз в построенном классе (монотонно допустимом подмножестве) выделяется наибольшее допустимое подмножество путем отбрасывания некоторых элементов с большими номерами. Выделенное таким способом подмножество образует класс начального разбиения R_0 . Непустота этого класса гарантируется допустимостью каждого одноэлементного подмножества в A .

Алгоритм перечисления (φ) допустимых подмножеств. Для любого $Y \subseteq X = A$ и любого $a_i \in Y$ через $\varphi^{(i)}(Y)$ обозначается множество всех допустимых подмножеств в Y , содержащих a_i , и через $A^{(i)} \subset Y$ — множество всех тех $a_k \in Y$, расположенных в порядке возрастания их номеров, для которых $i \neq k$ и $\{a_i, a_k\}$ есть B_1 -допустимое множество. Алгоритм перечисления φ составляют следующие три правила выделения некоторых допустимых подмножеств в Y , применяемые в указанном порядке.

- 1) Если для некоторых $a_i, a_k \in Y$ множество $C = \{a_i, a_k\} \subseteq Y$ есть максимальное допустимое множество и все подмножества $H = (A^{(i)}(Y) \cup A^{(k)}(Y)) \setminus C$ являются допустимыми множествами, то $\varphi(Y) = \{C\}$ для a_i, a_k с наименьшими i, k и указанными свойствами.
- 2) Если для некоторых различных $a_i, a_k \in Y$ и любых различных $a_p, a_q \in Y$, таких, что $a_p \in A^{(i)}(Y)$, $p \neq q$, $a_q \in A^{(k)}(Y)$, $q \neq i$, множества $C = \{a_i, a_k\}$ и $H = \{a_p, a_q\}$

допустимы и для любого трехэлементного подмножества S в Y , включающего a_p или a_q , справедливо условие $\exists b = (b_1, b_2) \in B(f_1(S)r_1b_1)$, то $\varphi(Y) = \{C\}$ для a_i, a_k с наименьшими i, k и указанными свойствами.

3) Во всех остальных случаях $\varphi(Y) = \varphi^{(i)}(Y)$ для некоторого $a_i \in Y$.

Алгоритм построения этого множества является результатом корректировки одноименного алгоритма построения всех максимальных монотонно допустимых подмножеств в Y .

Операция сокращения. Для определения операции сокращения (ψ) на множестве всех подмножеств в $Y \subseteq X = A$ вводится отношение предшествования α следующим образом. Пусть $C, S \subseteq Y$. Тогда $C\alpha S \Leftrightarrow [C \setminus S = \{a_i\} \wedge T = (A^{(i)}(Y) \cup S) \setminus C \Rightarrow \forall H \subseteq T(\exists b \in B(f(H) \leq b))]$ и результат применения операции ψ к множеству $Z \subseteq \varphi(Y)$ определяется как множество $\psi(Z)$, содержащее всякое такое множество $S \subseteq Z$, для которого в Z не существует множества C , предшествующего множеству S , т.е. $C\alpha S$ или если такое множество $C \in Z$ существует, то и $S\alpha C$. При этом C (либо S) не включается в $\psi(Z)$.

Граничная функция. Граничная функция F_0 определяется формулой $F_0(Y) = \max(\sigma, \tau)$, где $\sigma = \lceil |Y|/u \rceil$ и τ есть мощность некоторого подмножества попарно несовместимых элементов в Y , т.е. таких различных $a, k \in Y$, для которых $\exists b \in B(f(\{a, k\}) \leq b)$, определяемая с помощью алгоритма τ . В [4] доказывается допустимость алгоритма перечисления и операции сокращения для ЗКДР2, т.е. доказывается достаточность множества $\psi(\varphi(Y))$ для любого $Y \subseteq X = A$.

Далее рассматриваются ЗКДР 5, 6, 7 — частные случаи ЗКДР2 и сводимые к ним задачи синтеза и компоновки схем. Частные случаи выделяются последовательной конкретизацией A, B, f и r . Для каждого из них предлагаются параметры Т-метода, более эффективные, чем указанные выше для ЗКДР2.

2.2. Задача о кратчайшем допустимом разбиении 5 и синтез одноярусных схем в базисе программируемых функциональных блоков

Формулируется частный случай ЗКДР2, называемый ЗКДР5 [11]. В этой задаче разбиваемым множеством является набор объектов $I(I, M, N)$ с атрибутами I, M, N . Объект в этом наборе представляет кортеж $\langle i, M_i, N_i \rangle$, где i — номер объекта, являющийся его идентификатором, M_i, N_i — конечные множества натуральных чисел, $i = 1, \dots, m, m \geq 1$. Допускающим множеством является набор объектов $J(J, U, V, W)$ с атрибутами J, U, V, W . Объект в этом наборе представляет кортеж $\langle j, u_j, v_j, w_j \rangle$, где j — номер объекта, являющийся его идентификатором, u_j, v_j, w_j — натуральные числа, $j = 1, \dots, n, n \geq 1$.

Для разрешимости задачи предполагается, что

$$\forall i \in I \exists j \in J (1 \leq u_j \wedge |M_i| \leq v_j \wedge |N_i| \leq w_j). \quad (11)$$

Для любого $C \subseteq I$ вводятся обозначения $O(C, M) = \bigcup_{i \in C} M_i, O(C, N) = \bigcup_{i \in C} N_i$. Подмножество $C \subseteq I$ называется допустимым, если

$$\exists j \in J (|C| \leq u_j \wedge |O(C, M) \setminus C| \leq v_j \wedge |O(C, N)| \leq w_j). \quad (12)$$

ЗКДР5 ставится следующим образом: для заданных наборов объектов $I(I, M, N)$, $J(J, U, V, W)$ найти кратчайшее допустимое разбиение R множества I . Эта задача является частным случаем ЗКДР2, где $A = I(I, M, N) \subseteq D = D_1 \times D_2 \times D_3$,

$B = J(J, U, V, W) \subseteq E = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$, f_1 — монотонная функция из $\tilde{D}$ в $E_2 \times E_4$, f_2 — немонотонная функция из $\tilde{D}$ в E_3 , такие, что $f_1(C) = \langle |C|, |O(C, N)| \rangle$, $f_2(C) = |O(C, M) \setminus C|$ для любого $C \subseteq I$.

Параметры Т-метода для ЗКДР5 вводятся путём конкретизации параметров метода для ЗКДР2. Предварительно для каждого $i \in I$ через s_i обозначается число собственных элементов множества M_i и через σ_i обозначается число собственных элементов множества N_i . На множестве кортежей $\langle |M_i|, s_i, |N_i|, \sigma_i \rangle$, $i = 1, \dots, m$, вводится лексикографический порядок $\geq$, и объекты в I нумеруются в соответствии с этим порядком. Он сохраняется в любом $Y \subseteq X \subseteq I$. Из J удаляется всякий объект j , для которого $\exists k \in J(u_k \geq u_j \vee v_k \geq v_j \vee w_k \geq w_j)$, в результате получается неприводимый набор объектов $J' \subseteq J$. Впредь считается, что набор объектов J неприводимый, в нем вводится лексикографический порядок $\leq$, и объекты в J нумеруются в соответствии с этим порядком. Через J_1 обозначается проекция множества $J(J, U, V, W) \subseteq E = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$ на $E_1 \times E_2 \times E_4$. Подмножество $C \subseteq I$ называется J_1 -допустимым, если $\exists j \in J(|C| \leq u_j \wedge |O(C, N)| \leq w_j)$.

Для получения **начального разбиения** R_0 используется одноименный алгоритм для ЗКДР2 с учетом вида функций f_1 и f_2 . **Алгоритм перечисления** допустимых подмножеств совпадает с одноименным алгоритмом для ЗКДР2, в котором $A = I$, $B = J$ и допустимость подмножеств в I трактуется согласно (12).

Операция сокращения. Для определения операции сокращения (ψ) на множестве всех подмножеств в $Y \subseteq X = A$ вводится отношение предшествования α следующим образом. Пусть $C = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_p}\} \subseteq Y$, $S = \{a_{k_1}, \dots, a_{k_q}\} \subseteq Y$, $i_2 < \dots < i_p$, $k_2 < \dots < k_q$. Тогда $C \alpha S \Leftrightarrow$

$$[p \geq q \wedge \forall t \in \{1, \dots, q\}(i_t \leq k_t \Rightarrow |M_{k_t} - M_{i_t}| \leq s_i \wedge |N_{k_t} - N_{i_t}| \leq \sigma_i)], \quad (13)$$

$$\vee [C \setminus S = \{k\} \wedge T = (A^{(k)}(Y) \cup S) \setminus C \Rightarrow \forall H \subseteq T(\exists j \in J(|H| \leq u_j \wedge |O(H, M)| \leq v_j \wedge |O(H, N)| \leq w_j))], \quad (14)$$

и результат применения операции ψ к множеству $Z \subseteq \varphi(Y)$ определяется как множество $\psi(Z) = \psi_2(\psi_1(Z))$, где $\psi_1(Z) \subseteq Z$ есть множество, содержащее всякое такое множество $S \subseteq Z$, для которого в Z не существует множества $C \neq S$ и $C \alpha S$ согласно (13), а $\psi_2(\psi_1(Z)) \subseteq \psi_1(Z)$ есть множество, содержащее всякое такое множество $S \in \psi_1(Z)$, для которого в $\psi_1(Z)$ не существует множества $C \neq S$ и $C \alpha S$ согласно (14) или если такое множество $C \in \psi_1(Z)$ существует, то и $S \alpha C$ согласно (14). При этом C (либо S) не включается в $\psi(Z)$. Операция $\psi_2(\psi_1(Z))$, выраженная формулой (14), является конкретизацией операции сокращения для ЗКДР2, а операция $\psi_1(Z)$, выраженная формулой (13), отражает дополнительную возможность сокращения дерева поиска.

Граничная функция F_0 определяется формулой $F_0(Y) = \max(k, l, \sigma, \tau)$, где $\sigma = \left\lceil |O(Y, N)| / \max_{j \in J} w_j \right\rceil$, $l = \left\lceil |O(Y, M) \setminus Y| / \max_{j \in J} v_j \right\rceil$, $k = \lceil |Y| / u_n \rceil$ и τ есть мощность некоторого подмножества попарно несовместимых элементов в Y , определяемая с помощью алгоритма τ .

Пусть $F = \{F_1, \dots, F_k, F_{k+1}, \dots, F_m\}$ — система из $m \geq 1$ формул, где каждая формула является ДНФ или расширенной АНФ булевой функции, и первые $k \geq 1$ формул представляют функции возбуждения триггеров, а последние $(m - k) \geq 1$ формул — комбинационные функции синтезируемой схемы. Формулируется сводимая к ЗКДР5

задача синтеза минимальной по числу элементов одноярусной схемы в базисе программируемых функциональных блоков, а именно: требуется разбить заданную систему F на минимальное число подсистем, каждая из которых реализуется хотя бы одним блоком заданного базиса. Базис синтеза состоит из программируемых функциональных блоков $B = \{B_1(s_1, t_1, q_1), \dots, B_n(s_n, t_n, q_n)\}$, где блок $B_j(s_j, t_j, q_j)$ имеет s_j входов, t_j выходов и q_j горизонтальных шин в своей матрице И, допускает замыкание обратных связей внутри блока, и все триггеры всех блоков одинаковы.

Под программируемым функциональным блоком понимается всякое PAL-подобное логическое устройство с s входами, t выходами, имеющее в своей структуре программируемую матрицу И с q горизонтальными шинами, допускающее внутреннее замыкание обратных связей через одинаковые триггеры с одним входом и способное реализовать систему формул, каждая из которых является ДНФ или расширенной АНФ булевой функции при условии, что число формул в системе не больше t , общее число термов в этих формулах не превышает q , и общее число переменных в термах (за исключением внутренних переменных), представленных данными формулами, не превышает s . При подсчете числа переменных в формулах переменная и ее инверсия не различаются из-за парафазности вертикальных шин матрицы И блока. Исключение внутренних переменных из числа всех переменных в термах этих формул обеспечивается возможностью замыкания обратных связей внутри блока.

Пусть множество конъюнкций системы F пронумеровано числами $1, 2, \dots$, входные переменные $x_1, \dots, x_l$ перенумерованы числами $m+1, \dots, m+l$, внутренние переменные $z_1, \dots, z_k$ занумерованы в F соответственно формулам $F_1, \dots, F_k$. За набор объектов I принимается система F , а за набор объектов J — базис B , т.е., принимая F_i для $i = 1, \dots, m$ за объект $\langle i, M_i, N_i \rangle$, где M_i есть множество букв в F_i и N_i есть множество конъюнкций в F_i , и принимая j -й элемент базиса B для $j = 1, \dots, n$ за объект $\langle j, u_j, v_j, w_j \rangle$, где $u_j = t_j$, $v_j = s_j$, $w_j = q_j$ для $j = 1, \dots, n$, получаем ЗКДР5.

2.3. Задача о кратчайшем допустимом разбиении 6 и синтез одноярусной схемы в базисе однородных PAL с универсальными макроячейками

Формулируется частный случай ЗКДР2, называемый ЗКДР6 [12, 13]. В этой задаче разбиваемым множеством является набор объектов $I(I, M, N)$ с атрибутами I, M, N . Объект в этом наборе представляет кортеж $\langle i, M_i, N_i \rangle$, где i — номер объекта, являющийся его идентификатором, M_i — конечное множество, N_i — натуральное число, $i = 1, \dots, m$, $m \geq 1$. Допускающим множеством является набор объектов $J(J, U, V, W)$ с атрибутами J, U, V, W . Объект в этом наборе представляет кортеж $\langle j, u_j, v_j, w_j \rangle$, где j — номер объекта, являющийся его идентификатором, u_j, v_j, w_j — натуральные числа, $j = 1, \dots, n$, $n \geq 1$. Для разрешимости задачи предполагается, что

$$\forall i \in I \exists j \in J (1 \leq u_j \wedge |M_i| \leq v_j \wedge N_i \leq w_j). \quad (15)$$

Для любого $C \subseteq I$ вводятся обозначения $O(C, M) = \bigcup_{i \in C} M_i$, $h(C) = \max_{i \in C} N_i$. Фиксируется некоторое множество $L \subseteq O(I, M)$, и подмножество $C \subseteq I$ называется допустимым, если

$$\exists j \in J (|C| \leq u_j \wedge |O(C, M) \cap (L \cup O(I \setminus C, M))| \leq v_j \wedge h(C) \leq w_j). \quad (16)$$

ЗКДР6 ставится следующим образом: для заданных наборов объектов $I(I, M, N)$, $J(J, U, V, W)$ найти кратчайшее допустимое разбиение R множества I . Данная задача является частным случаем ЗКДР2, где $A = I(I, M, N) \subseteq D = D_1 \times D_2 \times D_3$,

$B = J(J, U, V, W) \subseteq E = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$, f_1 — монотонная функция из $\tilde{D}$ в $E_2 \times E_4$, f_2 — немонотонная функция из $\tilde{D}$ в E_3 , такие, что $f_1(C) = \langle |C|, h(C) \rangle$, $f_2(C) = |O(C, M) \cap (L \cup O(I \setminus C, M))|$ для любого фиксированного $L \subset O(I, M)$.

Подходящие значения параметров ρ, φ, ψ, F_0 Т-метода для ЗКДР6 являются конкретизацией одноименных параметров для ЗКДР2, учитывающей вид функций f_1 и f_2 .

Формулируется сводимая к ЗКДР6 задача синтеза минимальной по числу элементов схемы в базисе так называемых однородных PAL с универсальными макроячейками, а именно: требуется разбить заданную систему D из $m \geq 1$ ДНФ $\{D_1, \dots, D_m\}$ структурных функций выходов $\varphi_r(x_1, \dots, x_l, z_1, \dots, z_k)$ и функций возбуждения триггеров $f_s(x_1, \dots, x_l, z_1, \dots, z_k)$, $r = 1, \dots, t$, $s = 1, \dots, k$, $k \geq 0$, $t + k = m$, представляющую собой оператор некоторого цифрового устройства с входными переменными $x_1, \dots, x_l$, внутренними переменными $z_1, \dots, z_k$, выходными переменными $y_1 = \varphi_1, \dots, y_t = \varphi_t$ и с множеством внешних переменных $C = \{x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_t\} \cup B$, где $B \subseteq \{z_1, \dots, z_k\}$, на минимальное число подсистем, каждая из которых реализуется хотя бы на одной PAL заданного базиса E из $n \geq 1$ однородных PAL с универсальными макроячейками.

В однородной PAL(s, p, q) с универсальными макроячейками s — число входов, p — число выходов, равное числу ее макроячеек, и q — число горизонтальных шин одной макроячейки. Макроячейка состоит из программируемой пользователем матрицы И, образованной пересечением s входных, p выходных шин и p шин обратных связей PAL с q горизонтальными шинами макроячейки, отдельного элемента ИЛИ, объединяющего q выходов матрицы И, триггера, подключенного к выходу элемента ИЛИ, и переключателя, позволяющего обходить этот триггер. Выход каждой макроячейки образует шину обратной связи, которая пересекает все горизонтальные шины всех p макроячеек и через еще один переключатель может быть подключена к выходу PAL(s, p, q). Каждый выход PAL(s, p, q), не подключенный с помощью переключателя к шине обратной связи, может быть использован как вход этой PAL(s, p, q). Все триггеры и все макроячейки PAL(s, p, q) одинаковы, а все ее вертикальные шины парафазны. Таким образом, любой макроячейкой в составе PAL(s, p, q) может быть тривиально реализована любая ДНФ системы D , содержащая не более q конъюнкций и не более $s + p - \delta$ букв, где $\delta = 0$, если ДНФ представляет функцию возбуждения и содержит внутреннюю переменную z_j или ее отрицание, иначе $\delta = 1$. При этом в ДНФ буква и ее инверсия не различаются, триггер на выходе макроячейки задействуется для получения структурной функции переходов, если ДНФ представляет функцию возбуждения, иначе — обходится, выражение $s + p - 1$ означает, что один из выходов PAL(s, p, q) резервируется для вывода функции, получаемой на выходе макроячейки.

Предполагается, что номер i каждой ДНФ $D_i \in D$ совпадает с номером представляемой ею функции и каждая ДНФ $D_i \in D$ может быть реализована макроячейкой в составе хотя бы одной PAL(s, p, q) базиса E , т. е. число букв любой ДНФ в D не превосходит величины $s + p - \delta$, а число конъюнкций — величины q хотя бы одной PAL(s, p, q) базиса E . Функции φ_r, f_s и их переменные $x_1, \dots, x_l, z_1, \dots, z_k$ перенумерованы согласно подстановке

$$\begin{pmatrix} \varphi_1, & \dots, & \varphi_t, & f_1, & \dots, & f_k, & x_1, & \dots, & x_l, & z_1, & \dots, & z_k \\ \varphi_1, & \dots, & \varphi_t, & f_{t+1}, & \dots, & f_{r+k}, & x_{m+1}, & \dots, & x_{m+l}, & z_{t+1}, & \dots, & z_{t+k} \end{pmatrix},$$

где $m = t + k$. За набор объектов I принимается система D , а за набор объектов J — базис E , т. е. за объект $\langle i, M_i, N_i \rangle$ принимается D_i для $i = 1, \dots, m$, где M_i есть множество номеров всех букв в D_i , включая номер i , и N_i есть число всех конъюнкций в D_i , и за объект $\langle j, u_j, v_j, w_j \rangle$ принимается PAL(s_j, p_j, q_j) $\in E$, где $u_j = p_j$,

$v_j = s_j + p_j$, $w_j = q_j$, и при $C = \{1, \dots, t, m+1, \dots, m+l\} \cup B$, где $B \subset \{t+1, \dots, t+k\}$, получаем ЗКДР6.

**2.4. Задача о кратчайшем допустимом разбиении 7
и компоновка схем в ячейки, ограниченные
по вместимости или по числу выводов**

Формулируется частный случай ЗКДР2, называемый ЗКДР7 [14]. В этой задаче разбиваемым множеством является набор объектов $I(I, M, N)$ с атрибутами I, M, N . Объект в этом наборе представляет кортеж $\langle i, M_i, N_i \rangle$, где i — номер объекта, являющийся его идентификатором, M_i — конечное множество, N_i — натуральное число, $i = 1, \dots, m$, $m \geq 1$. Допускающим множеством является набор объектов $J(J, V, W)$ с атрибутами J, V, W . Объект в этом наборе представляет кортеж $\langle j, v_j, w_j \rangle$, где j — номер объекта, являющийся его идентификатором, v_j, w_j — натуральные числа, $j = 1, \dots, n$, $n \geq 1$. Для разрешимости задачи предполагается, что

$$\forall i \in I \exists j \in J (|M_i| \leq v_j \wedge N_i \leq w_j). \quad (17)$$

Для любого $C \subseteq I$ вводятся обозначения $O(C, M) = \bigcup_{i \in C} M_i$, $h(C) = \sum_{i \in C} N_i$. Фиксируется некоторое множество $L \subseteq O(I, M)$, и подмножество $C \subseteq I$ называется допустимым, если

$$\exists j \in J (|O(C, M) \cap (L \cup O(I \setminus C, M))| \leq v_j \wedge h(C) \leq w_j). \quad (18)$$

ЗКДР7 ставится следующим образом: для заданных наборов объектов $I(I, M, N)$, $J(J, V, W)$ найти кратчайшее допустимое разбиение R множества I . Данная задача является частным случаем ЗКДР2, где $A = I(I, M, N) \subseteq D = D_1 \times D_2 \times D_3$, $B = J(J, V, W) \subseteq E = E_1 \times E_2 \times E_3$, f_1 — монотонная функция из $\tilde{D}$ в E_3 , f_2 — немонотонная функция из $\tilde{D}$ в E_2 , такие, что $f_1(C) = \langle h(C) \rangle$, $f_2(C) = |O(C, M) \cap (L \cup O(I \setminus C, M))|$ для любого фиксированного $L \subseteq O(I, M)$. Подходящие значения параметров ρ, φ, ψ, F_0 метода для ЗКДР7 являются конкретизацией одноименных параметров для ЗКДР2, учитывающей вид функций f_1 и f_2 .

Формулируется сводимая к ЗКДР7 задача компоновки произвольной схемы в минимальное количество ячеек, ограниченных по вместимости или числу выводов. В ней рассматривается схема S из $m \geq 1$ элементов, множество C ее внешних полюсов и конструктивный базис T из $n \geq 1$ ячеек, различных по вместимости или по числу выводов. Предполагается, что каждый элемент $e_i(M_i, N_i)$ схемы S характеризуется номером i , множеством M_i «окрасок» его полюсов и размером N_i , где N_i — натуральное число, а каждая ячейка $t_j(v_j, w_j)$ базиса T — номером j , числом выводов v_j и вместимостью w_j , где v_j, w_j — натуральные числа. Кроме того, предполагается, что каждый элемент $e_i(M_i, N_i)$ схемы S в отдельности может быть скомпонован хотя бы в одной ячейке базиса T , т.е. $|M_i| \leq v_j \wedge N_i \leq w_j$. В этом случае схема S однозначно определяется множеством S всех своих элементов и множеством C всех своих внешних полюсов, а задача компоновки может быть сформулирована как задача разбиения схемы (множества S) на минимальное число подсхем (подмножеств), реализуемых ячейками базиса T . При этом подсхема считается *реализуемой* некоторой одной ячейкой базиса T , если число внешних контактов подсхемы и сумма размеров ее элементов не превышают числа выводов и вместимости этой ячейки соответственно. Внешними контактами подсхемы считаются «окраски» полюсов ее элементов, содержащиеся в C или среди окрасок полюсов элементов других подсхем, а условие компоновки каждого элемента схемы S в некоторой ячейке базиса T , т.е. соотношение $|M_i| \leq v_j \wedge N_i \leq w_j$, является

необходимым и достаточным условием разрешимости задачи компоновки, если C содержит «окраски» внешних полюсов всех элементов схемы S (все полюсы схемы S), иначе — только достаточным.

3. Комбинаторные свойства задач разбиения и алгоритмов их решения

Исследована сложность всех сформулированных задач разбиения и качества предложенных алгоритмов их решения. Результаты исследования сформулированы в терминах и обозначениях теории вычислительной сложности в виде следующих теорем.

Теорема 1 [15, 16]. ЗКДР 3–7 являются NP -трудными в сильном смысле.

Теорема доказывается методом сужения. При этом для ЗКДР3, ЗКДР5, ЗКДР6, ЗКДР7 в доказательстве в качестве известной NP -полной задачи используется задача УПАКОВКА В КОНТЕЙНЕРЫ, а для ЗКДР4 — NP -полная задача МИНИМАЛЬНОЕ ПОКРЫТИЕ.

Теорема 2 [15]. Если для заданных $I(I, M, N)$, $J(J, U, V, W)$ в ЗКДР3 любое трехэлементное множество недопустимо, то задача разрешима за полиномиальное время с помощью алгоритма сложности $O(n^4)$.

Теорема 3 [15]. Если для заданных $I(I, M, N)$, $J(J, U, V, W)$ в ЗКДР3 множество $A^{(i)} \cup \{a_i\}$ допустимо для $i = 1, \dots, m$, то задача разрешима за полиномиальное время с помощью алгоритма сложности $O(n^2)$.

ЗКДР3 с конкретными наборами объектов $I(I, M, N)$, $J(J, U, V, W)$ называется *индивидуальной* задачей L .

Теорема 4 [17]. Для любой индивидуальной задачи L имеют место неравенства $|R_1(L)| \leq |R_{OPT}(L)| \cdot \lceil (u+1)/2 \rceil$, $|R_2(L)| \leq (|R_{OPT}(L)| - 1) \cdot u + 1$, где $R_{OPT}(L)$ и $R_1(L)$, $R_2(L)$ — соответственно кратчайшее разбиение и разбиения, построенные алгоритмами ρ_1 , ρ_2 , все — для индивидуальной задачи L . Эти оценки достижимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агibalов Г. П., Беляев В. А. Технология решения комбинаторно-логических задач методом сокращенного обхода дерева поиска. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. 125 с.
2. Оранов А. М. Алгоритм построения кратчайших монотонно допустимых разбиений конечных множеств // Автоматизация проектирования дискретных систем: Материалы второй Междунар. конф. (12–14 ноября 1997 года, г. Минск). Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1997. Т. 3. С. 228–231.
3. Андреева Л. Н., Оранов А. М. Модифицированный алгоритм построения кратчайших монотонно допустимых разбиений конечных множеств // Автоматизация проектирования дискретных систем: Материалы четвертой Междунар. науч.-технич. конф. (14–16 ноября 2001 года, г. Минск). Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 2001. Т. 3. С. 150–157.
4. Андреева Л. Н., Оранов А. М. Алгоритмы построения кратчайших немонотонно допустимых разбиений конечных множеств // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2003. № 6. С. 188–192.
5. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.
6. Оранов А. М., Андреева Л. Н. Алгоритм минимального разбиения системы множеств // Автоматика и вычислительная техника. 1992. № 2. С. 37–44.
7. Оранов А. М., Андреева Л. Н. Алгоритм синтеза и компоновки одноярусных схем в некоторых базисах // Автоматика и вычислительная техника. 1992. № 5. С. 57–63.

8. *Оранов А. М., Андреева Л. Н.* Алгоритм минимального разбиения некоторого набора объектов // Автоматика и вычислительная техника. 1993. № 2. С. 27–35.
9. *Агибалов Г. П., Оранов А. М.* Алгоритмы покрытия схем свободными модулями // Автоматика и вычислительная техника. 1977. № 4. С. 15–16.
10. *Агибалов Г. П., Оранов А. М.* Покрытие логических схем модулями некоторых серийных систем // Кибернетика. 1986. № 2. С. 34–38.
11. *Оранов А. М.* Алгоритм синтеза дискретных схем в базисе программируемых функциональных блоков // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2004. № 9. С. 240–244.
12. *Оранов А. М.* К синтезу комбинационных схем в базисе ПЛИС // Автоматика и вычислительная техника. 1996. № 1. С. 27–35.
13. *Оранов А. М.* Алгоритм синтеза цифровых схем в базисе неоднородных ПМЛ // Моделирование интеллектуальных процессов проектирования и производства: Материалы Междунар. науч.-технич. конф. (10–12 ноября 1998 года, г. Минск). Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1998. С. 214–215.
14. *Оранов А. М.* Метод построения дискретных схем на базе комплексных программируемых логических устройств // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2002. № 1(II). С. 102–107.
15. *Андреева Л. Н., Оранов А. М.* О сложности некоторых задач разбиения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 2. С. 114–116.
16. *Оранов А. М.* О сложности задачи кратчайшего допустимого разбиения // Всесибирские чтения по математике и механике: Материалы Междунар. конф. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. Т. 1. Математика. С. 161–162.
17. *Андреева Л. Н., Оранов А. М.* Оценки погрешности двух приближенных алгоритмов разбиения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С. 89–93.