ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2009 Теоретические основы прикладной дискретной математики №3(5)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

DOI 10.17223/20710410/5/1

УДК 519.7

НИЖНИЕ И ВЕРХНИЕ ОКРЕСТНОСТИ В МНОЖЕСТВЕ С ЗАМЫКАНИЕМ[1]

Н. Г. Парватов

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

E-mail: parvatov@mail.tsu.ru

Изучаются свойства операции замыкания в пространстве (множестве с замыканием), обеспечивающие существование для его подмножеств конечных нижних и верхних окрестностей. Доказывается теорема о финитарности пространства, в котором конечно-порождаемые классы обладают конечными нижними окрестностями. Обобщаются известные теоремы А. В. Кузнецова о полноте и С. В. Яблонского о верхних окрестностях. Рассматриваемые вопросы представляют интерес в связи с проблемами полноты и выразимости, а также эффективного задания замкнутых совокупностей в пространствах дискретных функций с замыканием относительно суперпозиции.

Ключевые слова: *проблемы полноты и выразимости, теоремы А. В. Кузнецова и С. В. Яблонского.*

1. Пространство

Пусть в упорядоченной включением системе $\mathcal{B}(P)$ подмножеств множества P (далее будем говорить проще — в множестве P) задана операция замыкания $'$ [1, 2]. Иными словами, для любого подмножества $X \subseteq P$ определено его *замыкание* — подмножество $X' \subseteq P$, причём для любых множеств X и Y из $\mathcal{B}(P)$ выполняются условия

$$X \subseteq X', X' = X'', (X \subseteq Y) \Rightarrow (X' \subseteq Y').$$

В соответствии с [3] множество P с операцией замыкания $'$ в нём, то есть пару $(P, ')$, будем называть *пространством.* Множества элементов пространства, совпадающие со своими замыканиями, называются *замкнутыми множествами* или *замкнутыми классами* пространства. Множество X называется *порождающим* для замкнутого класса X'. Пространство, замкнутыми классами которого являются всевозможные подалгебры некоторой универсальной алгебры, называется *финитарным.* Финитарные пространства охарактеризованы в теореме Г. Биркгофа и О. Фринка [4], из которой, в частности, следует, что *пространство тогда и только тогда финитарно, когда в нём объединение любой направленной вверх системы замкнутых классов замкнуто.*

Пространства комбинаторных объектов (функций, графов, разбиений и др.) возникают в различных областях дискретной математики, но рассматриваемые далее вопросы наиболее важные приложения имеют в теории функциональных систем, при изучении некоторых функциональных и логических пространств.

[1]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

2. Проблема выразимости и нижние окрестности

В пространстве $(P, ')$ для любого подмножества $X \subseteq P$ подмножество $Y \subseteq P$ будем называть X-*мажорирующим*, X-*минорирующим* или X-*порождающим*, если выполняется соответствующее включение:

$$X' \subseteq Y', X' \supseteq Y' \text{ или } X' = Y'.$$

Множество X элементов пространства будем называть *конечно-порождаемым*, если существует конечное X-порождающее множество.

Проблема выразимости множества X в пространстве $(P, ')$ состоит в описании (в приложениях это описание должно быть по возможности эффективным) всех X-мажорирующих подмножеств этого пространства. Эта проблема возникает при изучении дискретных функций с операциями суперпозиции. Естественным средством решения этой проблемы является указание некоторой такой системы $\mathcal{S}$ замкнутых подмножеств пространства $(P, ')$, что для любого множества $Y \in \mathcal{B}(P)$ включение $X' \subseteq Y'$ равносильно отсутствию в $\mathcal{S}$ класса, включающего Y. Систему $\mathcal{S}$, обладающую указанным свойством, будем называть *нижней окрестностью* множества X в пространстве $(P, ')$. Иными словами, нижняя окрестность множества X — это всякая система замкнутых классов пространства, не включающих X, такая, что всякий, не включающий X замкнутый класс, можно расширить до класса из этой системы.

Отметим некоторые свойства нижних окрестностей. Во-первых, ясно, что каждое множество X элементов пространства обладает нижней окрестностью, например тривиальной, состоящей из всех не включающих X замкнутых классов пространства. Далее, максимальные по включению замкнутые классы пространства среди классов, не включающих X, станем называть X-*максимальными*, а их совокупность станем обозначать через $\mathcal{S}(X)$, а также через $\mathcal{S}(x)$ в случае одноэлементного множества $X = \{x\}$. Несложно понять, что система $\mathcal{S}(X)$ включена во всякую нижнюю окрестность множества X. Нижнюю окрестность, состоящую из попарно не сравнимых по включению классов, будем называть *безызбыточной*. Иными словами, безызбыточная нижняя окрестность перестаёт быть нижней окрестностью после удаления из неё любого класса. В случае своего существования безызбыточная нижняя окрестность множества X совпадает с системой $\mathcal{S}(X)$ и является наименьшей по включению нижней окрестностью множества X. Из конечной нижней окрестности множества X, опять в случае её существования, можно выделить безызбыточную нижнюю окрестность $\mathcal{S}(X)$. Множество X, обладающее конечной нижней окрестностью, оказывается конечно-порождаемым, так как элементы X-порождающего множества можно выбрать из дополнений $X \setminus K$ для всевозможных классов $K \in \mathcal{S}(X)$.

Представляют интерес условия, при которых конечно-порождаемые подмножества пространства $(P, ')$ имеют конечные нижние окрестности. Проблема поиска таких условий в более слабой форме была поставлена и частично решена в [3]. Имеет место

Теорема 1. Пространство, в котором каждое конечно-порождаемое подмножество имеет конечную нижнюю окрестность, финитарно.

Доказательство. Рассмотрим направленную вверх систему $\mathcal{S}$ замкнутых множеств пространства $(P, ')$. Очевидно включение $\cup\mathcal{S} \subseteq (\cup\mathcal{S})'$. Докажем обратное включение. С этой целью из множества $(\cup\mathcal{S})'$ выберем произвольно элемент a. Отметим, что объединение $\cup\mathcal{S}$ является $\{a\}$-мажорирующим. Тогда если множество $\{a\}$ (очевидно, конечно-порождённое) имеет конечную нижнюю окрестность $\mathcal{S}(a)$, то система $\mathcal{S}$

обладает следующим свойством: её объединение не включено ни в один из классов системы $\mathcal{S}(a)$. В силу конечности системы $\mathcal{S}(a)$ этим свойством обладает уже некоторая конечная подсистема $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. В силу конечности системы $\mathcal{R}$ и направленности системы $\mathcal{S}$ в системе $\mathcal{S}$ в качестве элемента содержится класс, включающий объединение $\cup\mathcal{R}$ системы $\mathcal{R}$. Этот класс, обозначим его буквой K, не включён ни в один из классов системы $\mathcal{S}(a)$, а потому является $\{a\}$-мажорирующим. Так как класс K замкнут (вместе со всеми классами системы $\mathcal{S}$), то имеют место включения $\{a\} \subseteq K' = K \subseteq \cup\mathcal{S}$. В силу выбора a доказано равенство $\cup\mathcal{S} = (\cup\mathcal{S})'$. ■

Обратная теорема не имеет места: пространство бесконечной циклической группы с замыканием относительно групповых операций финитарно, тем не менее в нём собственные подгруппы не имеют конечных нижних окрестностей. Можно утверждать лишь, что в пространстве с финитарным замыканием конечно-порождаемые подмножества имеют безызбыточные нижние окрестности [2].

В связи с теоремой 1 представляют интерес конструктивные достаточные условия, при которых в финитарном пространстве конечно-порождаемое подмножество имеет конечную нижнюю окрестность. Подобные условия обобщают теорему А. В. Кузнецова о полноте из [5]. Эта теорема неоднократно обобщалась и передоказывалась [6 – 9], в том числе самим А. В. Кузнецовым в [3]. Несмотря на это, задача поиска подобных обобщений, поставленная в [3], не утратила своей актуальности и по сей день. Она актуальна в связи с (возможным и действительным) появлением новых классов управляющих систем, приводящим к необходимости решать проблемы полноты и выразимости в новых постановках.

3. Предупорядоченное пространство

Пусть в множестве P определено (рефлексивное и транзитивное) отношение предпорядка $\leqslant$ [10]. Множество X элементов из P будем называть *наследственным классом* в предупорядоченном множестве $(P, \leqslant)$, если вместе с любым своим элементом x множество X содержит и всякий элемент $y \in P$, такой, что $y \leqslant x$. Наследственные множества комбинаторных объектов возникают естественным образом в различных областях дискретной математики, таких, как теория графов, теория дискретных функций, математическая логика и др. Наследственное множество X можно задать указанием некоторого такого подмножества $Y \subseteq X$, что X является наименьшим по включению наследственным классом среди наследственных классов, включающих Y. В этой ситуации множество Y будем называть *порождающим* для наследственного класса X, а наследственный класс X будем обозначать через $Y_{\leqslant}$. Наследственное множество X можно задать также указанием некоторого такого подмножества $Y \subseteq P \setminus X$, что X является наибольшим по включению наследственным классом среди наследственных классов, имеющих пустое пересечение с множеством Y. В этом случае X состоит из всевозможных таких элементов x из P, что для любого элемента $y \in Y$ не выполняется неравенство $y \leqslant x$. В этой ситуации множество Y будем называть *запрещающим* для X в $(P, \leqslant)$, а наследственный класс X будем обозначать через $P \setminus Y_{\geqslant}$.

Следует понимать, что дополнения наследственных классов предупорядоченного множества $(P, \leqslant)$ сами являются наследственными классами в множестве $(P, \geqslant)$ с двойственным предупорядочением. При этом запрещающее множество наследственного класса X в предупорядоченном множестве $(P, \leqslant)$ является порождающим для наследственного класса $P \setminus X$ в $(P, \geqslant)$. Этот факт согласуется с введёнными выше обозначениями.

Также полезно знать, что объединения и пересечения наследственных классов сами являются наследственными классами. Причём, если задана система наследственных классов и для каждого класса указаны некоторое порождающее и некоторое запрещающее множества, то объединение этих порождающих множеств будет порождающим множеством объединения наследственных классов системы, а объединение запрещающих множеств будет запрещающим для пересечения наследственных классов системы.

Предупорядочение $\leqslant$ и замыкание $'$ станем называть по отношению друг к другу *согласованными*, если замкнутые классы пространства $(P, ')$ являются одновременно наследственными классами предупорядоченного множества $(P, \leqslant)$. Равносильно, согласованность означает выполнение импликации

$$(x \leqslant y) \Rightarrow (\{x\}' \subseteq \{y\}')$$

для любых элементов x и y из P. При выполнении обратных импликаций предупорядочение $\leqslant$ называется *индуцированным* замыканием $'$.

Множество P, рассматриваемое вместе с определёнными в нём согласованными по отношению друг к другу замыканием $'$ и предупорядочением $\leqslant$, то есть тройку $(P, ', \leqslant)$ станем называть *предупорядоченным пространством*. При этом о замкнутых классах пространства $(P, ')$ и наследственных классах предупорядоченного множества $(P, ')$ будем говорить как о замкнутых и наследственных классах предупорядоченного пространства $(P, ', \leqslant)$. В предупорядоченном пространстве замкнутые классы являются одновременно наследственными и, следовательно, допускают задание посредством запрещающих множеств. В приложениях подобный способ задания часто оказывается эффективным (по терминологии книги [10] — «хорошим»). В связи с этим в дальнейшем наряду с прочими проблемами будем рассматривать проблему поиска условий, при которых замкнутый класс в предупорядоченном пространстве имеет конечное запрещающее множество.

4. Обобщённая теорема А. В. Кузнецова

Имеет место

Лемма 1. Пусть для некоторых множеств B_1 и B_2 и для любого множества X из $\mathcal{B}(P)$ выполняется включение

$$X' \cap B_1 \subseteq (X_{\leqslant} \cap B_2)'. \tag{1}$$

Тогда в предупорядоченном пространстве $(P, ', \leqslant)$ для любого замкнутого класса Q, такого, что $Q = (Q \cap B_1)'$, всякий класс Q_1 из $\mathcal{S}(Q)$ обладает конечным запрещающим множеством $B_2 \setminus Q_1$, то есть имеет место равенство $P \setminus Q_1 = (B_2 \setminus Q_1)_{\geqslant}$.

Доказательство. Включение $(B_2 \setminus Q_1)_{\geqslant} \subseteq P \setminus Q_1$ следует из согласованности замыкания с предупорядочением. Докажем обратное включение. Выберем произвольно элемент a в множестве $P \setminus Q_1$ и покажем, что наследственный класс $\{a\}_{\leqslant}$ имеет непустое пересечение с $B_2 \setminus Q_1$ (тогда элемент a принадлежит $(B_2 \setminus Q_1)_{\geqslant}$, и желаемое включение доказано). Предположим противное. Тогда $\{a\}_{\leqslant} \cap B_2 \subseteq Q_1$. Используя это включение, Q-максимальность множества Q_1 и включение (1), получаем последовательность включений

$$Q \cap B_1 \subseteq (Q_1 \cup \{a\})' \cap B_1 \subseteq ((Q_1 \cup \{a\})_{\leqslant} \cap B_2)' = ((Q_{1\leqslant} \cup \{a\}_{\leqslant}) \cap B_2)' =$$

$$= ((Q_{1\leqslant} \cap B_2) \cup (\{a\}_{\leqslant} \cap B_2))' \subseteq Q_1,$$

откуда $Q = (Q \cap B_1)' \subseteq Q_1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. ■

В связи с леммой 1 согласованные в множестве P предупорядочение $\leqslant$ и замыкание $'$ станем называть *сильно согласованными*, если множество P является объединением направленной вверх системы $\mathcal{N}$ конечных подмножеств и существует функция $\alpha : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, такая, что для любых множеств $B_1 \in \mathcal{N}$, $B_2 = \alpha(B_1)$ и $X \in \mathcal{B}(P)$ выполняется включение (1). Также будем говорить в этой ситуации, что предупорядочение $\leqslant$ сильно согласовано с замыканием $'$ при помощи системы $\mathcal{N}$ и отображения α. Предупорядоченное пространство, в котором предупорядочение сильно согласовано с замыканием, будем называть *сильно предупорядоченным.*

Поскольку в финитарном пространстве конечно-порождаемые подмножества имеют безызбыточные нижние окрестности, следствием леммы 1 является

Теорема 2. В финитарном сильно предупорядоченном пространстве всякое конечно-порождаемое подмножество обладает конечной нижней окрестностью, каждый класс которой имеет конечное запрещающее множество.

Теорема 2 указывает достаточные условия существования конечных нижних окрестностей у конечно-порождаемых подмножеств пространства, чем обобщает теорему А. В. Кузнецова о полноте из [5]. Вместе с тем в теореме речь идёт не просто о существовании конечных нижних окрестностей, но о существовании нижних окрестностей, состоящих из классов с конечными множествами запретов. Как указывалось, в приложениях задание замкнутых классов конечными запрещающими множествами оказывается эффективным. Тем самым теорема 2 усиливает теорему А. В. Кузнецова.

5. Запрещающие множества и верхние окрестности

В интересующих нас приложениях существование конечного запрещающего множества у замкнутого класса предупорядоченного пространства является благоприятным, позволяя получить эффективный алгоритм распознавания принадлежности этому классу. В связи с этим представляют интерес условия, при которых замкнутый класс имеет в предупорядоченном пространстве конечное запрещающее множество. Желая найти некоторые такие условия, введём в рассмотрение (двойственное к понятию нижней окрестности) понятие верхней окрестности множества X в пространстве. Именно, станем называть так систему $\mathcal{H}$ замкнутых классов пространства, не включённых в X', если всякий не включённый в X' замкнутый класс пространства можно сузить (удаляя элементы) до класса из $\mathcal{H}$.

Отметим некоторые свойства. Ясно, что всякое множество X элементов пространства обладает верхней окрестностью, например тривиальной, состоящей из всех не включённых в X' замкнутых классов. Более того, всякое множество X обладает верхней окрестностью

$$\mathcal{H}_Y = \{\{y\}' | y \in Y\}$$

для некоторого множества $Y \subseteq P \setminus X'$. Эта верхняя окрестность состоит из замкнутых классов с одноэлементными порождающими множествами. Её можно получить из произвольной верхней окрестности $\mathcal{H}$, выбрав в множество Y по элементу из дополнений $Z \setminus X'$, где $Z \in \mathcal{H}$. Безызбыточная (состоящая из попарно не сравнимых по включению классов) верхняя окрестность в случае своего существования обязана совпадать с системой $\mathcal{H}(X)$ всех X-минимальных классов пространства. При этом X-минимальным называем минимальный по включению замкнутый класс среди подмножеств пространства, не включённых в X'. Вне зависимости от того, образуют X-минимальные классы верхнюю окрестность множества X или нет, они обладают, очевидно, одноэлементными порождающими множествами (поскольку оказываются минимальными по включению классами в любой верхней окрестности вида $\mathcal{H}_Y$).

Из конечной нижней окрестности, опять в случае её существования, можно выделить безызбыточную.

Заметим, что система $\mathcal{H}_Y$ является верхней окрестностью множества X в предупорядоченном пространстве, если множество Y является запрещающим для замкнутого класса X'. Если же предупорядочение пространства индуцировано замыканием, то верно обратное. Именно, при индуцированном предупорядочении для любого множества $Y \subseteq P \setminus X'$ система $\mathcal{H}_Y$ тогда и только тогда является верхней окрестностью замкнутого класса X', когда для него множество Y является запрещающим. Из сказанного следует, что существование конечного запрещающего множества для замкнутого класса в предупорядоченном пространстве влечёт существование у замкнутого класса конечной верхней окрестности, а при индуцированном предупорядочении равносильно существанию конечной верхней окрестности. Представляется интересной задача выявления условий, при которых в предупорядоченном пространстве замкнутые классы с конечными верхними окрестностями обладают конечными запрещающими множествами. Подобные условия обобщают теорему С. В. Яблонского из [11] о верхней окрестности. Как будет показано далее, подобные условия выполняются в сильно предупорядоченном пространстве.

Лемма 2. Пусть $Y \subseteq P$ и система $\mathcal{H}_Y$ является верхней окрестностью замкнутого класса X в сильно предупорядоченном пространстве $(P, {}', \leqslant)$. Тогда пересечение всех включающих X $\{y\}$-максимальных классов, где $y \in Y$, совпадает с X.

Доказательство. Ясно, что это пересечение включает X. Покажем, что включение не может быть строгим. Для этого выберем произвольно не принадлежащий X элемент z пространства. Поскольку множество Y является запрещающим для X при индуцированном предупорядочении, в множестве Y найдётся элемент y, такой, что $\{y\}' \subseteq \{z\}'$. По теореме 2 система $\mathcal{S}(y)$ является нижней окрестностью множества X. По этой причине ($\{y\}$-мажорирующее) множество $\{z\}$ не содержится ни в одном из классов этой системы, в отличие от (не $\{y\}$-мажорирующего) множества X, содержащегося в каком-то из классов системы. Отсюда z не содержится в рассматриваемом пересечении и лемма доказана. ∎

Следствием этой леммы является

Теорема 3. В сильно предупорядоченном пространстве замкнутые классы с конечной верхней окрестностью обладают конечными запрещающими множествами.

Доказательство. Рассмотрим в сильно предупорядоченном пространстве замкнутый класс X, обладающей конечной верхней окрестностью. Тогда его конечной верхней окрестностью оказывается система $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}_Y$ для некоторого конечного подмножества $Y \subseteq P \setminus X$. В силу леммы 2 запрещающим множеством для X является объединение F запрещающих множеств F_K для всевозможных включающих X классов K из $\mathcal{S}(y)$, таких, что $y \in Y$. Запрещающие множества F_K можно выбрать конечными в силу теоремы 2. Тогда конечным окажется и запрещающее множество F замкнутого класса X. ∎

6. Пример использования: замыкание относительно суперпозиции

Условимся через P_E обозначать множество, состоящее из всех функций $f : E^n \to E$ при всевозможных натуральных n. Это множество будем рассматривать вместе с согласованными в нём замыканием относительно суперпозиции [5–7] и *предупорядочением* $\leqslant$ *относительно отождествления* (переменных), таким, что неравенство $f \leqslant g$ означает возможность получить функцию f из функции g отождествлением переменных. Замыкание множества X функций из P_E, обозначаемое через $[X]$, состоит из всевозможных функций, вычисляемых термами, отличными от переменных, в которых функциональные символы интерпретируются в множестве X, а переменные принимают значения в множестве E. В действительности, замыкание относительно суперпозиции сильно согласовано с предупорядочением относительно отождествления. Это вытекает из следующей леммы, в которой через $P_E^{(n)}$ обозначено множество всех функций в P_E, зависящих не более чем от n переменных.

Лемма 3. Для любых натуральных n и $m = |E|^{|E|^n}$ и любого подмножества $X \subseteq P_E$ имеет место включение

$$[X] \cap P_E^{(n)} \subseteq [X_{\leqslant} \cap P_E^{(m)}].$$

Доказательство. Функция $f \in [X] \cap P_E^{(n)}$ вычисляется термом, составленным из функциональных символов функций из X и символов переменных $x_1, \ldots, x_n$. В некотором таком терме рассмотрим подтерм $g(H_1, \ldots, H_r)$, где g — символ функции из X, а $H_1, \ldots, H_r$ — некоторые термы, вычисляющие, очевидно, какие-то функции из $P_E^{(n)}$. Если какие-то термы H_i вычисляют одинаковые функции, то можно избавиться от этого, отождествив соответствующие переменные у функции g, то есть заменив её некоторой функцией из $X_{\leqslant}$ и удалив лишние подформулы. Проделав это пока возможно, получим терм для f, в образовании которого участвуют символы функций из множества $X_{\leqslant}$, зависящих не более чем от $m = |P_E^{(n)}| = |E|^{|E|^n}$ переменных. ■

Непосредственно из леммы получаем

Следствие 1. В множестве P_E замыкание относительно суперпозиции и предупорядочение относительно отождествления сильно согласованы посредством системы $\mathcal{N}$ и отображения α, где $\mathcal{N}$ состоит из множеств $P_E^{(n)}$ при натуральных n и $\alpha(P_E^{(n)}) = P_E^{(m)}$ для $m = |E|^{|E|^n}$.

Отсюда с использованием теорем 2 и 3 можно получить теорему А. В. Кузнецова о полноте из [3], а также теорему С. В. Яблонского о верхних окрестностях из [11]. Рассмотренный пример отнюдь не исчерпывает область применения теорем 2 и 3.

7. Пример использования: алгебра предикатов

Станем обозначать через Π_E множество всевозможных предикатов $p : E^n \to \{\text{И}, \text{Л}\}$, где E, как и прежде, фиксированное конечное множество, а n принимает всевозможные натуральные значения. Множество Π_E будем рассматривать с $(\exists, \wedge)$-замыканием, понимая под ним замыкание относительно операций конъюнкции и проектирования, а также операций отождествления и перестановки переменных [12]. При этом $(\exists, \wedge)$-замыкание множества X предикатов из Π_E обозначается через $[X]$. Множество $[X]$ состоит из предикатов, выражаемых формулами первого порядка, в которых предикатные символы интерпретируются в множестве X, предметные переменные интерпретируются в множестве E, а логические символы принадлежат множеству

$\{\exists, \wedge\}$. В силу возможного переобозначения связанных переменных и известного логического закона (именно следующего закона: $\exists x A \wedge B \equiv \exists x(A \wedge B)$, если x не входит в B), в предыдущей фразе слово «формулами» можно заменить фразой «предварёнными формулами». Также в множестве Π_E будем рассматривать согласованное с $(\exists, \wedge)$-замыканием *предупорядочение* $\leqslant$ *относительно отождествления* (переменных), при котором неравенство $p \leqslant q$ означает возможность получить предикат p из предиката q отождествлением переменных. На самом деле, предупорядочение сильно согласовано с замыканием в множестве Π_E в силу следующей леммы.

Лемма 4. Для любых натуральных n и $m = |E|^{|E|^n}$ и любого подмножества $X \subseteq \Pi_E$ имеет место включение

$$[X] \cap \Pi_E^{(n)} \subseteq [X_{\leqslant} \cap \Pi_E^{(m)}].$$

Здесь через $\Pi_E^{(n)}$ обозначено множество всех предикатов в Π_E, имеющих не более n аргументов.

Доказательство. Рассмотрим предикат p, принадлежащий множеству $[X] \cap \Pi_E^{(n)}$, то есть зависящий не более чем от n переменных, для определённости $x_1, \ldots, x_n$, и выражающийся в силу сделанного ранее замечания некоторой предварённой формулой вида

$$\exists x_{n+1} \ldots \exists x_{n+s}(p_1 \wedge \cdots \wedge p_r). \tag{2}$$

В ней предикаты p_i принадлежат множеству X и зависят (для определённости) от переменных из следующего списка: $x_1, \ldots, x_{n+s}$. Рассмотрим далее всевозможные наборы $ab = (a_1, \ldots, a_{n+s})$ значений этих переменных в множестве E, делающие истинной бескванторную часть $p_1 \wedge \cdots \wedge p_r$ формулы (2). Удалим часть этих наборов, оставив в рассмотрении наборы с различными и всеми возможными началами $a = (a_1, \ldots, a_n)$ из E^n. Если выполняется неравенство $n + s > m$ (где $m = |E|^{|E|^n}$), то у рассматриваемых наборов какие-то две компоненты, скажем i-я и j-я (где $1 \leqslant i < j \leqslant n + s$), совпадают. Это позволяет в формуле (2) соответствующие этим компонентам переменные x_i и x_j отождествить, заменив их одной буквой x_i (и удалив, если потребуется, ставшие бесполезными кванторные приставки). Проделаем это, пока возможно. После этого осталось заменить предикаты p_i, входящие с одинаковыми переменными, равносильными предикатами из множества $X_{\leqslant} \cap \Pi_E^{(m)}$, входящими без одинаковых переменных. Полученная в результате формула равносильна исходной и выражает всё тот же предикат p. Тем самым лемма доказана. ■

Следствие 2. В множестве Π_E $(\exists, \wedge)$-замыкание и предупорядочение относительно отождествления сильно согласованы посредством системы $\mathcal{N}$ и отображения α, где $\mathcal{N}$ состоит из множеств $\Pi_E^{(n)}$ при натуральных n и $\alpha(P_E^{(n)}) = P_E^{(m)}$ для $m = |E|^{|E|^n}$.

Рассмотренное пространство Π_E представляет интерес в связи с функциями многозначной логики в силу соответствия Галуа из [12], определяемого отношением сохранения функцией предиката. Используя это соответствие Галуа и теоремы 2 и 3, из следствия 2 можно снова получить как теоремы С. В. Яблонского о верхних окрестностях из [11], так и теорему А. В. Кузнецова о полноте из [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. СПб.: Лань, 2005.
2. *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

3. *Кузнецов А. В.* Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты // Успехи матем. наук. 1961. Т. XVI. № 2 (98). С. 201–202.
4. *Birkhoff G., Frink O.* Representations of lattices by sets // Transactions on American mathematical society. 1948. V. 64. P. 299–316.
5. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та им. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
6. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.
7. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. № 2. С. 5–24.
8. *Парватов Н. Г.* Замечания о конечной порождаемости замкнутых классов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11. № 3. С. 32–47.
9. *Парватов Н. Г.* Наследственные системы дискретных функций // Там же. Сер. 2. 2007. Т. 14. № 2. С. 76–91.
10. *Дистель Р.* Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.
11. *Яблонский С. В.* О строении верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 2. С. 302–307.
12. *Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.* Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.