

**ОБ ИНВАРИАНТАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
КВАЗИМОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУРЕШЁТКЕ¹**

Н. Г. Парватов

*Томский государственный университет, г. Томск, Россия***E-mail:** parvatov@mail.tsu.ru

Рассматриваются классы квазимонотонных, монотонных, а также слабо существенных квазимонотонных и монотонных функций на конечной верхней полурешётке. В системах инвариантных для этих классов предикатов находятся порождающие множества, порождающие эти системы с использованием диагоналей и с помощью операций конъюнкции предикатов, отождествления и перестановки переменных, введения и удаления фиктивных переменных. Рассматриваемые вопросы связаны с проблемами полноты, выразимости и конечной порождаемости для этих классов.

Ключевые слова: *полурешётка, монотонная функция, квазимонотонная функция, мажоритарная функция.*

Введение: полурешётки и неполная информация

При описании управляющих систем средствами дискретных функций с операциями суперпозиции возникают трудности, обусловленные явлением состязаний [1]. В монографии Г. П. Агибалова [2] для преодоления этих трудностей предложено считать изменяющиеся (то есть в различной степени определённые) состояния дискретной управляющей системы элементами верхней полурешётки, интерпретируя полурешёточное отношение порядка как отношение сравнения состояний по степени их неопределённости и используя полурешёточное сложение для описания промежуточных состояний. При таком подходе функции состояний и выходов управляющей системы оказываются функциями на полурешётке, причём монотонными, ведь монотонность отражает очевидное свойство системы: её внутренние и выходные состояния уточняются (становятся более определёнными) при уточнении входного состояния. Среди монотонных функций выделяют функции, не допускающие дальнейшего монотонного уточнения. К синтезу таких функций, названных в работах Г. П. Агибалова *минимальными точечными*, сводятся задачи создания асинхронных дискретных управляющих систем. Представляют интерес также функции, в том числе и немонотонные, допускающие монотонное уточнение; такие функции называются *квазимонотонными*. Квазимонотонные функции удобно использовать для формулирования задачи синтеза дискретной управляющей системы с заданным динамическим поведением. Подобная задача может состоять в необходимости создания дискретной управляющей системы, функции состояний и выходов которой уточняют указанные заранее квазимонотонные функции. Отметим также, что идея рассматривать в разной степени неопределённые значения как элементы верхней полурешётки подмножеств лежит в основе понятия нечёткой информации, теория которой развита в работах Л. А. Шоломова (см., например, [3]).

¹Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

В связи со сказанным актуальны задачи синтеза функций в классах квазимонотонных, монотонных и минимальных точечных функций, возникающие на различных этапах проектирования асинхронных управляющих систем, а также проблемы полноты и выразимости функций в этих классах, рассматриваемые в [4, 5]. Точнее, в [4] получены критерии полноты в классах монотонных и квазимонотонных функций на трёхэлементной полурешётке непустых подмножеств двухэлементного множества, а также получен критерий выразимости минимальных точечных функций в классе монотонных функций на той же полурешётке. В [5] рассматривалась проблема полноты в классе квазимонотонных функций на произвольной полурешётке при суперпозиции со всеми так называемыми *слабо существенными квазимонотонными функциями*, допускающими, в соответствии с их определением, уточнение одноместными монотонными функциями.

В данной статье изучаются общие свойства замкнутых классов квазимонотонных и монотонных функций, а также классов слабо существенных квазимонотонных и монотонных функций на произвольной конечной верхней полурешётке. В том числе изучаются свойства предикатов, инвариантных для функций в этих классах. Рассматриваемые свойства связаны с вопросами конечной порождаемости этих классов и представляют интерес в связи с проблемами выразимости и полноты в них.

1. Верхняя полурешётка

Пусть в конечном множестве D , упорядоченном отношением $\leq$, для любых элементов a и b имеется точная верхняя грань $a + b$, а точная нижняя грань $a \cdot b$ существует не для любых элементов a и b . Иными словами, множество D вместе с указанным упорядочением является верхней полурешёткой, но не решёткой.

Отношение порядка $\leq$, определённое в полурешётке D , переносится на наборы в D^n естественным образом — покомпонентно, так, что выполнение неравенства $a \leq b$ для наборов $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ означает выполнение покомпонентных неравенств $a_i \leq b_i$ при $1 \leq i \leq n$. Таким образом, множество D^n становится полурешёткой с покомпонентными сложением и умножением.

Упорядочение $\leq$ переносится и на функции $f : D^n \rightarrow D$, множество которых при всевозможных натуральных n обозначается через P_D . При этом неравенство $f \leq g$ означает для функций f и g , что они зависят от одинакового числа переменных и для любого набора a значений их переменных выполняется неравенство $f(a) \leq g(a)$. В этом случае функция f называется *минорантой* функции g .

Наибольший элемент верхней полурешётки будем обозначать через $\top$. Удобно верхнюю полурешётку D (это касается и любой другой верхней полурешётки) считать вложенной в решётку $D \cup \{\perp\}$ с наименьшим элементом $\perp$. Указанное вложение позволяет пользоваться произведениями ab для любых элементов a и b из D . В этом случае отсутствие произведения в полурешётке означает, что это произведение принимает значение $\perp$ в решётке.

2. Основные классы квазимонотонных функций

Функции из P_D , сохраняющие полурешёточное отношение порядка $\leq$, называются *монотонными*, а их класс обозначается через M_D . Функция из P_D , имеющая монотонную миноранту, называется *квазимонотонной*. Среди монотонных минорант квазимонотонной функции f имеется наибольшая M_f , значение которой на любом наборе a из D^n (где n — число переменных функций f и M_f) можно найти так:

$$M_f(a) = \prod f(a'),$$

при этом произведение вычисляется в полурешётке D по всем наборам $a' \geq a$ из D^n .

Обозначим через $q(D)$ максимальное число элементов минимального по включению подмножества полурешётки D , не имеющего в ней нижней грани. Известный тест квазимонотонности из [2] утверждает, что *функция $f : D^n \rightarrow D$ тогда и только тогда квазимонотонная, когда выполняется следующее свойство: если какие-то наборы (достаточно какие-то $q(D)$ наборов) имеют нижнюю грань в полурешётке D^n , то значения функции f на этих наборах имеют нижнюю грань в полурешётке D* . В соответствии с этим класс квазимонотонных функций на полурешётке D , далее обозначаемый через Q_D , является классом сохранения системы предикатов

$$\varepsilon_r(x_1, \dots, x_r) \equiv \exists x(x \leq x_1 \wedge \dots \wedge x \leq x_r)$$

при всевозможных целых положительных r и даже является классом сохранения одного-единственного предиката $\varepsilon_{q(D)}$.

Функция из P_D , имеющая монотонную миноранту, существенно зависящую не более чем от одной переменной, называется *слабо существенной квазимонотонной функцией* (на полурешётке D). Слабо существенные функции введены в [5], где при суперпозиции с ними решена проблема полноты в классе квазимонотонных функций. В соответствии с [5] *функция $f : D^n \rightarrow D$ тогда и только тогда является слабо существенной квазимонотонной, когда для некоторого числа $i, 1 \leq i \leq n$, выполняется следующее свойство: если i -е компоненты каких-то наборов (достаточно каких-то $q(D)$ наборов) из D^n имеют нижнюю грань в полурешётке D , то и значения функции f на этих наборах также имеют нижнюю грань в D* .

Используя сформулированный критерий, покажем для дальнейшего использования, что *класс слабо существенных квазимонотонных функций на верхней полурешётке D является классом сохранения системы предикатов*

$$\varepsilon_{r,m} \equiv \varepsilon_r(x_1, \dots, x_r) \vee \varepsilon_r(x_{r+1}, \dots, x_{2r}) \vee \dots \vee \varepsilon_r(x_{(m-1)r+1}, \dots, x_{mr})$$

при всевозможных целых положительных r и m , и даже классом сохранения предикатов $\varepsilon_{q(D),m}$ при всевозможных целых положительных m . С этой целью условие сохранения n -местной функцией f предиката $\varepsilon_{r,m}$ сформулируем следующим образом. Если заданы mr наборов из множества D^n , разбитых на m r -элементных групп, и на наборах каждой группы значения функции f не имеют нижней грани, то найдётся компонента, значения которой в каждой группе наборов не имеют нижней грани. Это условие выполняется для слабо существенной квазимонотонной функции. Обратное, при достаточно большом m (но не превосходящем числа $|D|^{nr}$ всевозможных r -элементных групп наборов из D^n) mr наборов можно выбрать так, чтобы среди их групп присутствовала каждая r -элементная группа наборов из D^n , на которых функция f не имеет нижней грани. В связи с этим сформулированное выше условие приводит к наличию у функции f , сохраняющей предикат $\varepsilon_{r,m}$, такой переменной, пусть с номером i , что если на каких-то r наборах функция не имеет нижней грани, то i -е компоненты этих наборов не имеют нижней грани. Равносильно, если i -е компоненты каких-то r наборов имеют нижнюю грань, то и значения функции на этих наборах имеют нижнюю грань. Если сказанное выполняется для $r = q(D)$, то оно выполняется при любом r ; это следует из определения числа $q(D)$. Таким образом, желаемое свойство установлено.

Класс слабо существенных квазимонотонных функций станем обозначать через Φ_D .

Основная цель данной статьи состоит в выявлении некоторых общих свойств замкнутых классов квазимонотонных, монотонных и слабо существенных функций, а также систем инвариантов (то есть систем предикатов, сохраняемых функциями) этих классов. Результаты данной статьи иллюстрируют конструкции, введённые в [9] в связи с задачей выявления свойств, обеспечивающих конечную порождаемость замкнутого класса функций конечнозначной логики.

3. Клоны с мажоритарной функцией и их обобщения

Напомним некоторые необходимые для дальнейшего факты. При этом рассматриваемые здесь свойства выполняются для произвольного конечного множества D , не обязательно являющегося полурешёткой.

Мажоритарной называется функция $m(x_1, \dots, x_n)$, зависящая от $n \geq 3$ переменных и удовлетворяющая при любом $i = 1, \dots, n$ соотношению

$$x = m(x, \dots, x, x_i, x, \dots, x),$$

где переменная x_i находится на i -м месте под знаком функции m , переменная x — на остальных местах. Клоны с мажоритарной функцией конечно порождены [6].

Обратимся к вопросу о строении алгебры инвариантных предикатов клона, содержащего мажоритарную функцию. (Напомним, что *клоном* называют замкнутый суперпозицией класс функций, содержащий тождественную одноместную функцию.) Как известно [7], для любого множества K функций из P_D множество $\text{inv}_D(K)$ предикатов $p : D^n \rightarrow \{И, Л\}$, сохраняемых функциями из K , замкнуто операциями конъюнкции, проектирования, отождествления и перестановки переменных, введения и удаления фиктивных переменных и включает все диагонали. (Диагоналями называются тождественно истинные и тождественно ложные предикаты, а также предикаты, выражающиеся формулами вида $x_i = x_j \wedge \dots \wedge x_k = x_l$, где $\{i, j, \dots, k, l\} = \{1, \dots, n\}$ для натуральных n .) Множества предикатов, включающие диагонали и замкнутые операциями конъюнкции, отождествления и перестановки переменных, введения и удаления фиктивных переменных, назовём *и-классами*. Для любого множества A предикатов $p : D^n \rightarrow \{И, Л\}$ обозначим через $[A]_\wedge$ *и-класс*, порождённый множеством A , то есть наименьший по включению среди и-классов, включающих множество A ; через $A^{(d)}$ обозначим множество предикатов из A , зависящих не более чем от d переменных.

Клоны с мажоритарной функцией в терминах их инвариантных предикатов характеризует теорема Бейкера и Пиксли из [8]. С использованием этой теоремы в [9] установлено, что для клона K функций из P_D равносильны условия:

- (1) клон K содержит $(d + 1)$ -местную мажоритарную функцию;
- (2) и-класс $\text{inv}_D(K)$ порождается всеми своими предикатами, зависящими не более чем от d переменных, то есть имеет место равенство

$$\text{inv}_D(K) = [(\text{inv}_D(K))^{(d)}]_\wedge.$$

В качестве обобщений клонов с мажоритарной функцией в [9] были введены d -подклоны и (c, d) -клоны. Клон K_1 называется d -подклоном клона K_2 , если выполняются равносильные в силу [9] свойства:

- (1) имеет место включение $K_1 \subseteq K_2$, и для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из K_2 в K_1 найдётся функция $m_f(x_1, \dots, x_{n+d+1})$, удовлетворяющая всевозможным соотношениям

$$f(x) = m_f(x, f(x), \dots, f(x), x_{i+n}, f(x), \dots, f(x)),$$

где через x обозначен набор переменных $x_1, \dots, x_n$, переменная x_{i+n} находится на $(i+n)$ -м месте функции m_f и $1 \leq i \leq d+1$;

- (2) имеет место равенство $\text{inv}_D(K_1) = [\text{inv}_D(K_2) \cup (\text{inv}_D(K_1))^{(d)}]_{\wedge}$.

Клон с конечно-порождаемым d -подклоном сам конечно-порождаемый [9].

Если функцию m_f в первом условии сделанного выше определения всегда удаётся выбрать зависящей не более чем от s переменных набора x (и тогда она зависит не более чем от $s + d + 1$ переменных), то клон K_1 называется (c, d) -подклоном клона K_2 и оба клона K_1 и K_2 называются (c, d) -клонами. В соответствии с этим клоны $s(d+1)$ -местной мажоритарной функцией являются $(0, d)$ -подклонами клона P_D и $(0, d)$ -клонами. В статье [9] показано, что (c, d) -клоны (при натуральных n и d) конечно порождены.

Как видно, клоны с мажоритарной функцией и их обобщения — d -подклоны обладают двумя определениями: функциональным и предикатным. Функциональное определение характеризует указанные (под)клоны в терминах содержащихся в них функций, а предикатное — в терминах инвариантных предикатов. Для (c, d) -клонов в настоящее время известно только функциональное определение. Автор планирует исправить ситуацию в скором времени, охарактеризовав в одной из ближайших статей (c, d) -клоны в терминах сохраняемых предикатов.

Для нахождения порождающих множеств инвариантных и-классов полезной оказывается следующая

Лемма 1 (о продолжении частичной функции). Для клона K функций из P_D и множества A предикатов из $\text{inv}_D(K)$ следующие условия равносильны:

- (1) $\text{inv}_D(K) = [A]_{\wedge}$;
- (2) произвольную частичную функцию $f : A \rightarrow D$, где $A \subseteq D^n$, тогда и только тогда можно доопределить до функции в K , когда f сохраняет все предикаты из A .

Напомним, что сохранение частичной функцией $f : A \rightarrow D$, где $A \subseteq D^n$, m -местного предиката p означает, что для любых удовлетворяющих ему наборов $x^i = (x_1^i, \dots, x_m^i)$, $1 \leq i \leq n$, набор

$$f(x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, f(x_m^1, \dots, x_m^n)$$

либо содержит неопределённую компоненту, либо также удовлетворяет предикату p . Доказывать здесь лемму о продолжении частичной функции не станем; сделаем это в одной из следующих статей.

4. Свойства основных классов квазимонотонных функций

В [10] показано, что классы M_D и Q_D содержат мажоритарную функцию

$$M(x_1, \dots, x_{q(D)+1}) = \prod_{i=1}^{q(D)} (x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_{q(D)+1}).$$

Значения этой функции определены при любых значениях переменных, несмотря на то, что операция умножения — частичная в полурешётке. Действительно, если в записанном соотношении произведение справа не определено при каких-то значениях переменных, то какие-то $q(D)$ из скобок-сомножителей этого произведения не имеют общей нижней грани в силу определения числа $q(D)$; но это невозможно, так как суммы в этих скобках имеют общее слагаемое. Функция M мажоритарная, в чём можно

убедиться с использованием полурешётчных тождеств следующим образом:

$$M(x, \dots, x, x_i, x, \dots, x) = (x + x_i) \cdots (x + x_i) \cdot x \cdot (x + x_i) \cdots (x + x_i) = (x + x_i)x = x.$$

Наконец, функция M монотонная, так как является композицией монотонных функций.

В силу сказанного и-классы $\text{inv}_D(M_D)$ и $\text{inv}_D(Q_D)$ порождаются множествами своих предикатов, зависящих не более чем от $q(D)$ переменных. С использованием леммы 1 можно получить более точные соотношения:

$$\text{inv}_D(M_D) = [\leq, \varepsilon_{q(D)}]_{\wedge}, \text{inv}_D(Q_D) = [\varepsilon_{q(D)}]_{\wedge}. \quad (1)$$

Действительно, частичную функцию $f : A \rightarrow D$, определённую на множестве $A \subseteq D^n$ и сохраняющую предикат $\varepsilon_{q(D)}$, можно доопределить значением $\top$ до квазимонотонной функции, а если f сохраняет ещё и порядок $\leq$, то её можно доопределить до монотонной функции f' , такой, что $f'(d) = \prod f(d')$, где произведение вычисляется в полурешётке D по всем наборам d' из A , таким, что $d' \leq d$, и произведение пустого множества элементов считается равным элементу $\top$.

Из полученных соотношений (1) следует, что и-класс $\text{inv}_D(M_D)$ порождается множеством $\text{inv}_D(Q_D)$, пополненным 2-местным предикатом $\leq$. В частности, *клон M_D является 2-подклоном клона Q_D* . В справедливости этого можно убедиться иначе, воспользовавшись функциональным определением d -клона. Для этого достаточно заметить, что для квазимонотонной n -местной функции f , обладающей монотонной минорантой m' , функцию m_f , зависящую от $n+3$ переменных, можно выбрать следующим образом:

$$m_f(x_1, \dots, x_{n+3}) = m'(x_1, \dots, x_n) + (x_{n+1} + x_{n+2})(x_{n+1} + x_{n+3})(x_{n+2} + x_{n+3});$$

например, в качестве монотонной миноранты m' можно взять наибольшую M_f . Если функция f слабо существенная из Φ_D , то монотонную миноранту m' можно выбрать зависящей от некоторой одной переменной x_i при $1 \leq i \leq n$. В этом случае функция $m'(x_i)$ является минорантой функции m_f , принадлежащей классу $M_D \cap \Phi_D$, который является в силу сказанного $(1, 2)$ -подклоном клона Φ_D .

Из сказанного видно, что порождающее множество и-класса $\text{inv}_D(M_D \cap \Phi_D)$ можно получить из порождающего множества и-класса $\text{inv}_D(\Phi_D)$, дополнив последнее какими-то 2-местными предикатами. С использованием леммы 1 можно получить более точные соотношения

$$\text{inv}_D(M_D \cap \Phi_D) = [\leq, \Upsilon_D]_{\wedge}, \text{inv}_D(\Phi_D) = [\Upsilon_D]_{\wedge},$$

где Υ_D — система всевозможных предикатов $\varepsilon_{q(D),m}$ при целых положительных m . Эти соотношения доказываются аналогично соотношениям (1). Таким образом, верна

Теорема 1. Имеют место следующие утверждения:

- (1) и-класс $\text{inv}_D(Q_D)$ порождается предикатом $\varepsilon_{q(D)}$;
- (2) и-класс $\text{inv}_D(M_D)$ порождается парой предикатов $\varepsilon_{q(D)}$ и $\leq$;
- (3) и-класс $\text{inv}_D(\Phi_D)$ порождается системой предикатов Υ_D ;
- (4) и-класс $\text{inv}_D(\Phi_D \cap M_D)$ порождается системой предикатов $\Upsilon_D \cup \{\leq\}$.

В частности, клон M_D является 2-подклоном клона Q_D и клон $\Phi_D \cap M_D$ является 2-подклоном клона Φ_D . Более того, клон $\Phi_D \cap M_D$ является $(1, 2)$ -подклоном клона Φ_D .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агibalов Г. П., Оранов А. М.* Лекции по теории конечных автоматов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. 185 с.
2. *Агibalов Г. П.* Дискретные автоматы на полурешётках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. 227 с.
3. *Шоломов Л. А.* Элементы теории недоопределённой информации // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2009. № 2. С. 18–42.
4. *Парватов Н. Г.* Функциональная полнота в замкнутых классах квазимонотонных и монотонных трехзначных функций на полурешетке // Дискретн. анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2003. Т. 10. № 1. С. 1–78.
5. *Парватов Н. Г.* Теорема о функциональной полноте в классе квазимонотонных функций на конечной полурешетке // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2006. Т. 13. № 3. С. 62–82.
6. *Марченков С. С.* К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. № 1. С. 88–99.
7. *Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.* Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
8. *Baker K. A., Pixly A. F.* Polynomial interpolation and chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Zeiteschr. 1975. Bd. 143. No. 2. S. 165–174.
9. *Парватов Н. Г.* Замечания о конечной порождаемости замкнутых классов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11. № 3. С. 32–47.
10. *Парватов Н. Г.* Некоторые конструкции конечно-порождаемых клонов // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2004. № 9. С. 26–28.