МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

DOI 10.17223/20710410/6/10

УДК 519.7; 519.81

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ НАБОРОВ АЛЬТЕРНАТИВ[1]

С. И. Колесникова

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия

E-mail: skolesnikova@yandex.ru

Рассматривается проблема некорректного оценивания динамических наборов альтернатив в методе анализа иерархий, используемом в интеллектуальных системах поддержки принятия решения. Излагается модифицированная процедура корректного определения значимости альтернатив, доказываются ее свойства и приводятся иллюстративные примеры.

Ключевые слова: *метод анализа иерархий, весовые коэффициенты альтернатив, принятие решений.*

1. Введение в проблему

По ориентировочным оценкам число статей прикладного характера, в которых метод анализа иерархий (МАИ) [1] применяется к решению прикладных многокритериальных задач, еще 10 лет назад составляло более тысячи [2]. Широкому применению метода способствует и разработанный пакет зарубежных программ EXPERT CHOICE, реализующий МАИ. Однако, как известно, недостатком классического МАИ [1], отмеченным и самим автором метода, является противоречие, связанное с эффектом единичной нормировки, приводящей к тому, что предпочтения, выявленные на всем множестве альтернатив (признаков, объектов и пр.), могут не совпадать с «частными» предпочтениями на подмножестве альтернатив. Содержательно на примере это означает следующее. При оценивании двух проектов z_1 и z_2 несколькими экспертами по методу МАИ устанавливается, что z_1 предпочтительней z_2 ($z_1 \succ z_2$), знак «$\succ$» означает факт предпочтительности (доминирования). При появлении третьего проекта интеллектуальная экспертная система (на основе МАИ) их ранжирует по ценности заново, и в результате возможна ситуация: z_2 предпочтительней z_1 ($z_2 \succ z_1$).

В ряде работ (например, [3, 4]) приведены примеры нарушения предпочтений между альтернативами (в [4] — признаками) при включении в группу (удалении из группы) сравниваемых альтернатив (признаков) дополнительной альтернативы и описана конструктивная идея целесообразности оценивать относительную значимость каждой альтернативы по отношению ко всей совокупности альтернатив. В данной работе выясняются условия, при которых бинарное отношение (выражающее предпочтение

[1]Работа частично поддержана РФФИ, проект № 09-01-99014. Результаты работы докладывались на Международной конференции с элементами научной школы для молодёжи, г. Омск, 7–12 сентября 2009 г.

альтернатив) сохраняется на измененном множестве альтернатив, излагается процедура модифицированного метода анализа иерархий (ММАИ), доказываются свойства ММАИ. Тезисное изложение результатов этой работы приведено в [5].

1.1. Основные понятия и определения

В общем виде постановка задачи, решаемой МАИ [1], включает цель, альтернативы и критерии оценки альтернатив; требуется выбрать наилучшую альтернативу. После построения иерархической структуры (цели — критерии — альтернативы) система парных сравнений элементов каждого уровня приводит к результату, который может быть представлен в виде обратно симметричной матрицы (матрицы парных сравнений альтернатив), элемент которой a_{ij} есть интенсивность проявления альтернативы (как элемента иерархии) i относительно альтернативы j в смысле выбранного фиксированного критерия. Главные собственные векторы матрицы A парных сравнений (МПС) интерпретируются как векторы приоритетов сравниваемых элементов. Допускается вычислять коэффициенты важности для каждой из альтернатив в виде среднего геометрического элементов соответствующей строки МПС в случае, когда оценки элементов заданы в виде отношения (мультипликативный метод анализа иерархий).

Обозначим совокупность альтернатив $\Theta = \{z_1, z_2, \ldots, z_g\}$. Прежде чем сформулировать и доказать результат, в котором выясняются условия, при которых бинарное отношение (выражающее предпочтение альтернатив) $z_i \succ z_j$ $(z_j \succ z_i)$ сохраняется на множествах $\Theta' = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}\}$ $(\Theta' = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g+1}\})$, напомним требования к матрице относительных весов [1] $A = \|a_{ij}\|_{g\times g}$, $a_{ij} = w_i/w_j$, где w_i, w_j — компоненты весового вектора альтернатив $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_g\}^T$, g — количество сравниваемых альтернатив: 1) $a_{ij} \geqslant 0$; 2) $a_{ij} = a_{ji}^{-1}$; 3) $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$; 4) число g является максимальным собственным значением матрицы A, и для некоторого единственного (нормированного) вектор-столбца $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_g\}^T$ с положительными компонентами выполняется равенство: $A \cdot W = g \cdot W$.

Приведем пример негативной стороны стандартного применения МАИ из работы [3], способствуюшей неточности в принятии решения.

Пример 1. Пусть оцениваются две альтернативы (два признака) z_1, z_2 по двум равновесным мерам относительной важности со следующими МПС:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате стандартного применения МАИ получим для альтернатив z_1, z_2 вектор весовых коэффициентов (оценок) альтернатив (ВКА) $w = (w_1, w_2) = (0{,}567,\ 0{,}433)$. Так как $w_1 > w_2$, то $z_1 \succ z_2$. При оценивании трех альтернатив z_1, z_2, z_3 по тем же двум мерам относительной важности со следующими МПС:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1/3 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1/3 \\ 1/4 & 1 & 1/5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

— после стандартного применения МАИ и последующей нормализации получаем $w = (w_1, w_2, w_3) = (0{,}286,\ 0{,}354,\ 0{,}360)$, т. е. $z_2 \succ z_1$.

2. Постановка задачи

Обозначим через ρ бинарное отношение предпочтения на множестве альтернатив. Пусть заданы множества (наборы) альтернатив $\Theta_1 = \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}\}$ и $\Theta_2 =$

$= \{z_1, z_2, \ldots, z_{g-1}, z_g\}$. Требуется построить процедуру оценки значимости альтернатив по совокупности заданных критериев (назовем ее модифицированным МАИ), сохраняющей бинарные отношения $z_i \rho_1 z_j$, $z_i \rho_2 z_j$, $z_i, z_j \in \Theta_1 \subseteq \Theta_2, i \neq j$, индуцированные на множествах Θ_1 и Θ_2 применением МАИ.

3. Решение задачи

Нежелательную особенность стандартного применения МАИ в оценивании динамических наборов альтернатив, способствуюшей неточности в принятии решения в интеллектуальных системах, выразим в виде двух теорем.

Теорема 1. Бинарные отношения (предпочтения) $z_i \rho_1 z_j$, $z_i \rho_2 z_j$, где $z_i, z_j \in \Theta_1 \subseteq \Theta_2$ $(i, j \in \{1, 2, \ldots, g\}$, $i \neq j)$, индуцированные на множествах Θ_1, Θ_2 посредством применения стандартной процедуры МАИ, в общем случае не совпадают.

Доказательство. Обозначим МПС альтернатив множества Θ_1 через $A_1 = \|a_{ij}\|_{(g-1)\times(g-1)}$, где $a_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$, и МПС альтернатив множества Θ_2 через $A_2 = \left\|a'_{ij}\right\|_{g\times g}$, где $a'_{ij} = \dfrac{w'_i}{w'_j}$. В качестве приближения собственных векторов МПС A_1 и A_2 в МАИ используют векторы $W_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_{g-1}\}^T$, $W_2 = \{w'_1, w'_2, \ldots, w'_g\}^T$, компоненты которых вычисляются как среднее геометрическое по элементам строк, т. е. $w_i = \left(\prod\limits_{l=1}^{g-1} a_{il}\right)^{\frac{1}{g-1}}$ и $w'_i = \left(\prod\limits_{l=1}^{g} a'_{il}\right)^{\frac{1}{g}}$ соответственно.

Пусть после применения МАИ весовые оценки альтернатив таковы, что $w_i > w_j$, то есть на множестве Θ_1 задано отношение предпочтения $z_i \succ z_j$. Покажем, что это отношение предпочтения в общем случае не сохраняется на множестве Θ_2.

Для сохранения отношения $z_i \succ z_j$ на множестве Θ_2 необходимо должно выполняться неравенство $w'_i > w'_j$, или $\left(\prod\limits_{l=1}^{g} a'_{il}\right)^{\frac{1}{g}} > \left(\prod\limits_{l=1}^{g} a'_{jl}\right)^{\frac{1}{g}}$. Это эквивалентно требованию $D_{i,g-1} a'_{ig} > D_{j,g-1} a'_{jg}$, где $D_{s,g-1} = \prod\limits_{l=1}^{g-1} a'_{sl}, s \in \{i, j\}$.

Преобразуем обе части неравенства $\dfrac{a'_{ig}}{a'_{jg}} > \dfrac{D_{j,g-1}}{D_{i,g-1}}$, осуществив соответствующие замены с применением свойств 2 и 3 МПС:

$$\frac{a'_{ig}}{a'_{jg}} = \frac{a'_{ij} a'_{jg}}{a'_{jg}} = a'_{ij}, \quad \frac{D_{j,g-1}}{D_{i,g-1}} = \prod_{l=1}^{g-1} \frac{a'_{jl}}{a'_{il}} = \prod_{l=1}^{g-1} \frac{a'_{ji} a'_{il}}{a'_{il}} = \prod_{l=1}^{g-1} \frac{1}{a'_{ij}} = (a'_{ij})^{1-g}.$$

Таким образом, для справедливости требуемого неравенства необходимо должно выполняться соотношение $a'_{ij} > \left(a'_{ij}\right)^{1-g}$, или $\left(a'_{ij}\right)^{g} > 1$, $i, j < g$, что, очевидно, будет иметь место только в частных случаях. ■

Теорема 2. Пусть для МПС A_1 и A_2 выполнены свойства 1–4 МПС. Тогда при выполнении условий: 1) $a'_{ij} = a_{ij}\,(i, j < g)$ и 2) $\left(a'_{ij}\right)^{g} > 1 \quad \left(\left(a'_{ij}\right)^{g} < 1\right)$ бинарные отношения (предпочтения) $z_i \succ z_j$ $(z_j \succ z_i)$, индуцированные на множествах Θ_1 и Θ_2 посредством применения стандартной процедуры метода анализа иерархий, совпадают.

Доказательство теоремы 2 опирается на свойства 1–4 МПС и результат теоремы 1.

3.1. Модифицированный метод анализа иерархий

Изложим модифицированную процедуру определения ВКА, опираясь на [1, 3, 4].

1. Введем весовые коэффициенты мер относительной важности признаков, обозначенные через c_s, $\sum\limits_{s=1}^{\nu} c_s = 1$.

   Построим МПС на каждом из этапов МАИ (по числу мер относительной важности альтернатив). Результатом каждого s-го этапа ($s \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$) является g-компонентный вектор нормализованных значений ВКА $W_s = \{w_1^s, w_2^s, \ldots, w_g^s\}^T$.
2. Сформируем всевозможные векторы $w_{ij}^s = \left(w_{ij}^{s1}, w_{ij}^{s2}\right)$ локальных ВКА уровня 1 по формулам

$$w_{ij}^{s1} = \frac{w_i^s}{w_i^s + w_j^s};\ w_{ij}^{s2} = \frac{w_j^s}{w_i^s + w_j^s},\ s \in \{1, 2, \ldots, \nu\}, i, j \in \{1, 2, \ldots, g\}.$$

   С содержательной точки зрения, первая компонента w_{ij}^{s1} вектора $w_{ij}^s = \left(w_{ij}^{s1}, w_{ij}^{s2}\right)$ означает относительный вес альтернативы z_i по отношению к суммарному весу альтернатив z_i и z_j; вторая компонента w_{ij}^{s2} вектора w_{ij}^s означает относительный вес альтернативы z_j.
3. Сформируем матрицу $W = \|w_{ij}\|$, где векторы $w_{ij} = (w_{ij}^i, w_{ij}^j)$ — локальные ВКА (уровня 2) альтернатив z_i, z_j относительно всей совокупности мер относительной важности признаков; компоненты векторов находим по формулам

$$w_{ij}^i = \frac{u_{ij}^i}{u_{ij}^i + u_{ij}^j};\ w_{ij}^j = \frac{u_{ij}^j}{u_{ij}^i + u_{ij}^j},\ \text{где } u_{ij}^i = \sum_{s=1}^{\nu} c_s w_{ij}^{s1},\ u_{ij}^j = \sum_{s=1}^{\nu} c_s w_{ij}^{s2}.$$

4. Вычислим глобальные значения ВКА по одной из формул:

$$V_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{g} w_{ij}^i,\ V_i^{(2)} = \left(\prod_{j=1}^{g} w_{ij}^i\right)^{1/g},\ i \in\ 1, 2, \ldots, g.$$

Отметим, что в соответствии с модифицированной процедурой для исходных данных примера 1 получаем следующие ВКА: $w = (w_1, w_2, w_3) = (0{,}349,\ 0{,}325,\ 0{,}326)$. Таким образом, предпочтения между альтернативами z_1, z_2 не изменились: $z_1 \succ z_2$.

Процедура определения ВКА, несмотря на простоту, нуждается в численной иллюстрации.

3.2. Иллюстративный пример применения модифицированного метода анализа иерархий

1. Пусть МПС трех альтернатив $z_i, i = 1, 2, 3$, составлена по каждому из двух данных равновесных критериев ($c_1 = c_2 = 0{,}5$) и посчитаны весовые коэффициенты альтернатив. Последние два столбца в нижеприведенных расширенных МПС представляют собой собственные векторы W^1 (W^2) и нормализованные собственные векторы W_n^1 (W_n^2) МПС альтернатив по 1-му критерию (вычисления проведены с точностью до трёх знаков):

$$\begin{array}{c}
\\ z_1 \\ z_2 \\ z_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \quad z_1 \quad & \quad z_2 \quad & \quad z_3 \quad & \quad W^1 \quad & \quad W_n^1 \quad \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1{,}000 & 0{,}500 & 4{,}000 & 1{,}260 & 0{,}308 \\
2{,}000 & 1{,}000 & 8{,}000 & 2{,}520 & 0{,}615 \\
0{,}250 & 0{,}125 & 1{,}000 & 0{,}315 & 0{,}077
\end{pmatrix}
\end{array}$$

и МПС альтернатив по 2-му критерию:

$$\begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z_1 & z_2 & z_3 & W^2 & W_n^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1{,}000 & 4{,}000 & 0{,}500 & 1{,}260 & 0{,}323 \\ 0{,}250 & 1{,}000 & 0{,}167 & 0{,}347 & 0{,}089 \\ 2{,}000 & 6{,}000 & 1{,}000 & 2{,}289 & 0{,}588 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Формируем обобщенные матрицы относительных локальных ВКА по нижеприведенной схеме.

   2.1. Формируем матрицу относительных ВКА по 1-му критерию $(w_{ij}^1 = w_i^1, w_j^1)$:

$$\begin{pmatrix} (1{,}000;\ 1{,}000) & (0{,}308;\ 0{,}615) & (0{,}308;\ 0{,}077) \\ (0{,}615;\ 0{,}308) & (1{,}000;\ 1{,}000) & (0{,}615;\ 0{,}077) \\ (0{,}077;\ 0{,}308) & (0{,}077;\ 0{,}615) & (1{,}000;\ 1{,}000) \end{pmatrix}.$$

   2.2. Нормализуем локальные ВКА по 1-му критерию, например, $w_{12}^1 = \left(\dfrac{0{,}308}{0{,}308+0{,}615};\ \dfrac{0{,}615}{0{,}308+0{,}615}\right)$:

$$\begin{pmatrix} (0{,}500;\ 0{,}500) & (0{,}333;\ 0{,}667) & (0{,}800;\ 0{,}200) \\ (0{,}667;\ 0{,}333) & (0{,}500;\ 0{,}500) & (0{,}889;\ 0{,}111) \\ (0{,}200;\ 0{,}800) & (0{,}111;\ 0{,}889) & (0{,}500;\ 0{,}500) \end{pmatrix}.$$

   2.3. Формируем всевозможные векторы локальных ВКА по 2-му критерию $(w_{ij}^2 = w_i^2, w_j^2)$:

$$\begin{pmatrix} (1{,}000;\ 1{,}000) & (0{,}323;\ 0{,}089) & (0{,}323;\ 0{,}588) \\ (0{,}089;\ 0{,}323) & (1{,}000;\ 1{,}000) & (0{,}089;\ 0{,}588) \\ (0{,}588;\ 0{,}323) & (0{,}588;\ 0{,}089) & (1{,}000;\ 1{,}000) \end{pmatrix}.$$

   2.4. Нормализуем локальные ВКА по 2-му критерию аналогично п. 2.2:

$$\begin{pmatrix} (0{,}500;\ 0{,}500) & (0{,}784;\ 0{,}216) & (0{,}355;\ 0{,}645) \\ (0{,}216;\ 0{,}784) & (0{,}500;\ 0{,}500) & (0{,}132;\ 0{,}868) \\ (0{,}645;\ 0{,}355) & (0{,}868;\ 0{,}132) & (0{,}500;\ 0{,}500) \end{pmatrix}.$$

3. Формируем обобщенную матрицу $W = \|w_{ij}\| = \left\|\left(w_{ij}^i, w_{ij}^j\right)\right\|$, компонентами которой являются векторы — локальные ВКА альтернатив относительно всей заданной совокупности критериев. Компоненты локальных ВКА находим по формулам п. 3 вышеприведенной процедуры ММАИ, например:

$$\left(u_{12}^1; u_{12}^2\right) = \left(\frac{0{,}333+0{,}784}{2};\ \frac{0{,}667+0{,}216}{2}\right); w_{12} = \left(w_{12}^1; w_{12}^2\right) = (0{,}559;\ 0{,}441)\,.$$

В итоге получаем обобщенную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} (0{,}500;\ 0{,}500) & (0{,}542;\ 0{,}458) & (0{,}567;\ 0{,}433) \\ (0{,}458;\ 0{,}542) & (0{,}500;\ 0{,}500) & (0{,}515;\ 0{,}485) \\ (0{,}433;\ 0{,}567) & (0{,}485;\ 0{,}515) & (0{,}500;\ 0{,}500) \end{pmatrix}.$$

4. Глобальные значения ВКА определяем как линейную свертку [1]:

$$V_1^{(1)} = \sum_{j=1}^{3} w_{1j} = 0{,}500 + 0{,}542 + 0{,}567;\ V_2^{(1)} = \sum_{j=1}^{3} w_{2j} = 0{,}458 + 0{,}500 + 0{,}515;$$

$$V_3^{(1)} = \sum_{j=1}^{3} w_{3j} = 0{,}433 + 0{,}485 + 0{,}500.$$

Нормализованный итоговый вектор оценок значимости альтернатив имеет вид $V^{(1)} = (0{,}358;\ 0{,}327;\ 0{,}315)$.

Свойство данной процедуры сформулировано в теореме 3.

Теорема 3. Бинарные отношения (предпочтения) $z_i \rho_1 z_j$, $z_i \rho_2 z_j$, $z_i, z_j \in \Theta_1 \subseteq \subseteq \Theta_2, i \neq j$, индуцированные посредством применения стандартной процедуры МАИ на множестве Θ_1 и модифицированного метода анализа иерархий на множестве Θ_2, совпадают.

Доказательство.

При выполнении условия 1 теоремы 2 справедлива полезная формула, связывающая ВКА двух множеств (по каждому критерию) Θ_1 и Θ_2: $w'_i = (w_i)^{\frac{g-1}{g}} \left(a'_{ig}\right)^{\frac{1}{g}}$, $i < g$. Действительно, использование представления компонент весового вектора альтернатив в мультипликативном МАИ как среднего геометрического по строкам МПС приводит к справедливости соотношений

$$w'_i = \left(\prod_{l=1}^{g} a'_{il}\right)^{\frac{1}{g}} = \left(\prod_{l=1}^{g-1} a'_{il}\right)^{\frac{1}{g}} \left(a'_{ig}\right)^{\frac{1}{g}} = \left(\prod_{l=1}^{g-1} a_{il}\right)^{\frac{1}{g}} \left(a'_{ig}\right)^{\frac{1}{g}} = w_i^{\frac{g-1}{g}} \left(a'_{ig}\right)^{\frac{1}{g}}.$$

Пусть для определенности на множестве Θ_1 задано отношение предпочтения $z_i \succ z_j$, то есть $w_i > w_j$. Требуется показать, что это отношение предпочтения сохранится на множестве Θ_2 при оценивании весовых коэффициентов альтернатив по модифицированному МАИ, т. е. необходимо должно выполняться неравенство $w'_i > w'_j$ $(i, j < g)$.

Предположим сначала выполнение условия 1 теоремы 2. Применяя полученную зависимость, вышеприведенные формулы для ВКА по методу ММАИ, свойства 1–4 МПС (в частности, свойство 3 — транзитивность МПС), получаем

$$w'_i - w'_j = w_i^{\frac{g-1}{g}} \left(a'_{ig}\right)^{\frac{1}{g}} - w_j^{\frac{g-1}{g}} \left(a'_{jg}\right)^{\frac{1}{g}} = w_i^{\frac{g-1}{g}} \left(a'_{ij} a'_{jg}\right)^{\frac{1}{g}} - w_j^{\frac{g-1}{g}} \left(a'_{jg}\right)^{\frac{1}{g}} =$$

$$= \left(a'_{ig}\right)^{\frac{1}{g}} \left[w_i^{\frac{g-1}{g}} \left(a'_{ij}\right)^{\frac{1}{g}} - w_j^{\frac{g-1}{g}}\right] = \left(a'_{ig}\right)^{\frac{1}{g}} \left[w_i^{\frac{g-1}{g}} \left(a_{ij}\right)^{\frac{1}{g}} - w_j^{\frac{g-1}{g}}\right] \geqslant 0.$$

Справедливость последнего неравенства обеспечивается предположением $a_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$ и $w_i > w_j$.

В общем случае используются непосредственно формулы для вычисления ВКА по методу ММАИ:

$$w_i = \frac{V_i}{\sum\limits_{j=1}^{g} V_j}, \quad \text{где } V_i = \sum_{l=1}^{g} w_{il}^i = \sum_{l=1}^{g} \frac{u_{il}^i}{u_{il}^i + u_{il}^j}, \quad u_{il}^i = \sum_{s=1}^{\nu} c_s \frac{w_i^s}{w_i^s + w_l^s},$$

величины w_i^s, w_j^s являются компонентами собственного вектора МПС альтернатив на s-м уровне иерархии (по s-му критерию). Осуществляя последовательно несложные, но громоздкие преобразования, можно показать, что и в общем случае $w'_i \geqslant w'_j$. ■

Замечание 1. Прокомментируем условие $a'_{ij} = a_{ij}$ $(i, j < g)$ (условие 1 теоремы 2). Данное условие означает, что при добавлении новой альтернативы в исследуемую группу альтернатив предпочтения относительно «старых» альтернатив не изменились, т. е. выполнено условие независимости совокупности альтернатив по предпочтению, а, как известно [6], этот факт является обоснованием использования линейной свертки для агрегирования многокритериальных решений (в том числе и МАИ).

Замечание 2. В практических задачах «групповой эффект» и «человеческий фактор» при экспертном оценивании альтернатив (признаков) нередко приводит к нарушению свойства 3 МПС, которое, в свою очередь, приводит к некорректному использованию МАИ, так как в этом случае собственный вектор такой (уже несовместной) МПС соответствует максимальному собственному значению, которое строго больше g, а не равно g (см. свойство 4 МПС). Следует отметить, что доказательства теорем 1–3 существенно опираются на свойства МПС, в частности на свойства 2 и 3, т. е. эти условия (поскольку они являются условиями применения МАИ) считаются по умолчанию выполненными.

4. Применение модифицированного МАИ в решении прикладной задачи

Основой одного из наиболее эффективных подходов к созданию интеллектуальных систем являются тестовые методы распознавания образов [7], использующие для принятия решений наборы (тесты), содержащие меньшее количество признаков и имеющие больший вес (под весом теста понимается сумма весовых коэффициентов признаков). Один из методов определения «весов» сравниваемых признаков предложен в работе [8]. Метод учитывает вклад признаков в распознающую способность теста с учетом их взаимозависимости и базируется на представлении совокупности всех различимых пар объектов из разных классов (образов) для каждого признака в виде мультимножества [9] и применении МАИ с использованием парных сравнений признаков на основе специальным образом выбранных мер относительной важности признаков, учитывающих их особенности. Приведем пример [7], связанный с целесообразностью изменения состава тестового набора (удаления признака).

Пример 2. Пусть матрица описаний Q содержит описание шести объектов (строки) по четырём признакам (z_1, z_2, z_3, z_4) (столбцы), в матрице различений R указывается на соответствие номеров объектов (1-й столбец) и классов (2-й столбец), которым объекты принадлежат:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для данного примера тупиковыми тестами являются наборы признаков $\tau_1 = (z_1, z_2, z_3)$, $\tau_2 = (z_1, z_2, z_4)$ и $\tau_3 = (z_2, z_3, z_4)$. Если использовать тестовый алгоритм непосредственно, то объект $S = (0, 1, 2, 1)$ не будет отнесен ни к одному из классов, однако фрагмент $(0, 1)$, порождаемый набором $\tau = (z_1, z_2)$, содержится в S и соответствующих объектах из первого класса и не содержится в объектах из второго класса, что дает основание полагать, что распознаваемый объект более близок к первому классу. Непосредственное применение классического МАИ в методе из работы [8] может привести к ошибочному определению весовых коэффициентов признаков, а следовательно, и к неточности в принятии решения. Модифицированный МАИ корректно «взвесит» признаки в изменившемся (удалением признака из теста) наборе.

Заключение

Дальнейшее развитие МАИ (и модифицированного МАИ) должно быть связано с выяснением условий, связанных с правомочностью применения линейной свертки при оценивании ВКА (шаг 4 вышеизложенного алгоритма), поскольку данный способ агрегирования приемлем при весьма ограничительных предположениях и может приводить к неточности в принятии решений (см., например, работу [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саати Т. Л.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1989. 311с.
2. *Ногин В. Д.* Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журн. вычислит. матем. и математич. физ. 2004. Т. 44. № 7. С. 1259–1268.
3. *Самохвалов Ю. Я.* Групповой учет относительного превосходства альтернатив в задачах принятия решений // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 6. С. 141–145.
4. *Колесникова С. И.* Системный подход к оцениванию взаимного влияния признаков в тестовом распознавании // Кибернетика и системный анализ. 2009. № 3. С. 127–135.
5. *Колесникова С. И.* Метод корректного определения весовых коэффициентов альтернатив в процедуре анализа иерархий // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2009. № 1. С. 107–109.
6. *Кини Р. Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
7. *Дюкова Е. В., Журавлев Ю. И.* Дискретный анализ признаковых описаний в задачах распознавания большой размерности // Журн. вычислит. матем. и математич. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1264–1278.
8. *Колесникова С. И., Янковская А. Е.* Оценка значимости признаков для тестов в интеллектуальных системах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 6. С. 135–148.
9. *Петровский А. Б.* Упорядочивание и классификация объектов с противоречивыми признаками // Новости искусственного интеллекта. 2003. № 4. С. 34–43.