ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ

DOI 10.17223/20710410/7/5

УДК 519.17

КАРКАС АВТОМАТА

В. Н. Салий

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

E-mail: saliiVN@info.sgu.ru

Каркасом автомата (без выходов) называется упорядоченное множество, которое образуют слои автомата (т. е. его сильно связанные подмножества) вместе с отношением обратной достижимости. Установлены некоторые свойства каркаса автомата, связанные с основными алгебраическими конструкциями, такими, как подавтоматы, гомоморфизмы и конгруэнции.

Ключевые слова: *автомат, каркас автомата, подавтомат, гомоморфизм, конгруэнция, упорядоченное множество.*

В [1] было введено понятие каркаса автомата. Это упорядоченное множество, которое образуют слои автомата вместе с отношением обратной достижимости. Оно сыграло весьма существенную роль в описании автоматов, у которых каждая конгруэнция является ядром подходящего эндоморфизма. В предлагаемой работе устанавливаются некоторые свойства каркаса, связанные с основными алгебраическими конструкциями для автоматов, такими, как подавтомат, гомоморфизм, конгруэнция.

Автомат — это тройка $\mathbf{A} = (S, X, \delta)$, где S и X — конечные непустые множества, соответственно множество состояний и множество входных сигналов, а $\delta : S \times X \rightarrow S$ — отображение, называемое функцией переходов. Запись $\delta(s, x) = t$ для $s, t \in S$ и $x \in X$ означает, что автомат $\mathbf{A}$, находящийся в состоянии s , под действием входного сигнала x переходит в состояние t .

Подмножество $S' \subseteq S$ называется устойчивым в автомате $\mathbf{A}$, если $\delta(s, x) \in S'$ для любых $s \in S'$ и $x \in X$. Если S' устойчиво в $\mathbf{A}$, то, ограничивая функцию переходов δ на $S' \times X$, получают автомат $\mathbf{A}' = (S', X, \delta)$ — подавтомат автомата $\mathbf{A}$, соответствующий S' . Совокупность $\text{Sub}\mathbf{A}$ всех подавтоматов автомата $\mathbf{A}$ (сюда включается и нулевой подавтомат $\mathbf{0} = (\emptyset, X, \emptyset)$) упорядочивается отношением $\mathbf{A}_1 \leq \mathbf{A}_2 \iff S_1 \subseteq S_2$, где $\mathbf{A}_i = (S_i, X, \delta)$, $i = 1, 2$. Упорядоченное множество $(\text{Sub}\mathbf{A}, \leq)$ является дистрибутивной решеткой. Решеточные операции в ней задаются равенствами $\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 = (S_1 \cap S_2, X, \delta)$ и $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 = (S_1 \cup S_2, X, \delta)$.

Пусть $\mathbf{A} = (S, X, \delta)$ и $\mathbf{B} = (T, X, \delta)$ — сравнимые автоматы, т. е. автоматы с одним и тем же множеством входных сигналов (функции переходов всех автоматов будем обозначать символом δ). Отображение $\varphi : S \rightarrow T$ по определению является гомоморфизмом автомата $\mathbf{A}$ в автомат $\mathbf{B}$, если $\varphi(\delta(s, x)) = \delta(\varphi(s), x)$ для любых $s \in S, x \in X$. Взаимно однозначные гомоморфизмы автоматов называются вложениями, а их биективные гомоморфизмы — изоморфизмами. Эндоморфизмы автомата — это его гомоморфизмы в себя, автоморфизмы — изоморфизмы на себя.

Отношение эквивалентности $\theta \subseteq S \times S$ называется конгруэнцией автомата $\mathbf{A} = (S, X, \delta)$, если оно согласовано с функцией переходов в том смысле, что

$(\forall s, t \in S)(\forall x \in X)((s, t) \in \theta \implies (\delta(s, x), \delta(t, x)) \in \theta)$. Каждая конгруэнция θ автомата $\mathbf{A}$ определяет его фактор-автомат $\mathbf{A}/\theta = (S/\theta, X, \delta)$, где $\delta(\theta(s), x) := \theta(\delta(s, x))$ для любых $s \in S, x \in X$.

Пусть X^* — множество всех конечных слов над алфавитом X . Продолжим функцию переходов δ на множество $S \times X^*$, полагая $\delta(s, e) = s$, где $e \in X^*$ — пустое слово, и $\delta(s, px) = \delta(\delta(s, p), x)$ для любых $s \in S, x \in X, p \in X^*$. Говорят, что состояние t достижимо в автомате $\mathbf{A}$ из состояния s , если найдется входное слово $p \in X^*$, такое, что $\delta(s, p) = t$. Записывая это в виде $(s, t) \in \tau$, вводим отношение достижимости τ в автомате $\mathbf{A}$. Понятно, что τ рефлексивно и транзитивно, т. е. является квазипорядком на S . Пусть $s \in S$ — произвольное состояние автомата $\mathbf{A}$. Подмножество $\tau(s)$, объединяющее все состояния, достижимые из s , устойчиво в $\mathbf{A}$ и, следовательно, определяет подавтомат $\mathbf{A}(s) = (\tau(s), X, \delta)$. Это — главный подавтомат, порожденный состоянием s .

Симметричная часть $\sigma = \tau \cap \tau^{-1}$ отношения достижимости называется отношением взаимной достижимости в $\mathbf{A}$. Очевидно, что σ будет эквивалентностью на множестве состояний S . Классы этой эквивалентности называют слоями автомата $\mathbf{A}$.

Каркасом автомата $\mathbf{A}$ назовем упорядоченное множество $F(\mathbf{A}) = (S/\sigma, \tau^{-1})$. Его элементами являются слои автомата $\mathbf{A}$, а порядком — отношение, обратное достижимости, перенесенное на слои: $(\sigma(t), \sigma(s)) \in \tau^{-1}$ равносильно тому, что $(s, t) \in \tau$.

Теорема 1. Каждое конечное упорядоченное множество изоморфно каркасу подходящего автомата с двумя входными сигналами.

Доказательство. Пусть $\mathbf{P} = (P, \leq)$ — конечное упорядоченное множество. Построим автомат $\mathbf{A} = (S, X, \delta)$, такой, что $|X| = 2$ и $F(\mathbf{A}) \cong \mathbf{P}$. (Здесь и далее знаком $\cong$ обозначается изоморфизм соответствующих структур.)

Каждому минимальному элементу $a \in P$ сопоставим символ $s_0(a)$. Если элемент a не минимален и имеет k нижних соседей, то сопоставим a символы $s_i(a), 0 \leq i \leq k-1$. Прделав эту процедуру для всех элементов из P , получим множество S состояний автомата $\mathbf{A}$. (Элемент a упорядоченного множества $(P, \leq)$ называется нижним соседом элемента b , если $a < b$ и $\neg(\exists x \in P)(a < x < b)$.)

Далее, положим $X = \{0, 1\}$. Определим функцию переходов $\delta : S \times X \rightarrow S$ следующим образом.

Если a является минимальным элементом в упорядоченном множестве $\mathbf{P}$, то $\delta(s_0(a), 0) = \delta(s_0(a), 1) = s_0(a)$.

Если a — не минимальный элемент и у него k нижних соседей, то состояния $s_0(a), s_1(a), \dots, s_{k-1}(a)$ по входному сигналу 0 образуют контур в указанном порядке их прохождения (последнее состояние переходит в первое).

Если a — не минимальный элемент и $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ — его нижние соседи, то $\delta(s_i(a), 1) = s_0(a_i), 0 \leq i \leq k-1$.

Покажем, что $\mathbf{P} \cong F(\mathbf{A})$.

В автомате $\mathbf{A}$ слоями будут в точности подмножества вида $\{s_0(a)\}$, где a — минимальный в $\mathbf{P}$ элемент, и подмножества вида $\{s_0(a), s_1(a), \dots, s_{k-1}(a)\}$, где a имеет $k \geq 1$ нижних соседей.

Определим отображение $\varphi : P \rightarrow F(\mathbf{A})$, полагая $\varphi(a) = \sigma(s_0(a))$. Очевидно, что φ является взаимно однозначным соответствием между множествами P и $F(\mathbf{A})$.

Пусть $a < b$ в $\mathbf{P}$. Возьмем в $\mathbf{P}$ какую-нибудь неуплотняемую возрастающую цепь $a = x_1 < x_2 < \dots < x_l = b$. Так как x_i является нижним соседом для $x_{i+1}, 1 \leq i \leq l-1$, то $\delta(s_0(x_{i+1}), 1) = s_0(x_i)$, и значит, $\delta(s_0(b), 1^{l-1}) = s_0(a)$, откуда $\varphi(a) = \sigma(s_0(a)) < \sigma(s_0(b)) = \varphi(b)$ в $F(\mathbf{A})$.

С другой стороны, если $\varphi(a) < \varphi(b)$, т. е. $\sigma(s_0(a)) < \sigma(s_0(b))$ в $F(\mathbf{A})$, то состояние $s_0(a)$ достижимо в $\mathbf{A}$ из состояния $s_0(b)$. Входным словом минимальной длины, переводящим $s_0(b)$ в $s_0(a)$, является слово вида 1^{l-1} , $l > 1$. Подавая его на вход автомата $\mathbf{A}$, получим последовательность состояний $s_0(b) = s_0(x_l), s_0(x_{l-1}), \dots, s_0(x_1) = s_0(a)$. При этом x_i будет нижним соседом в $\mathbf{P}$ для x_{i+1} , $1 \leq i \leq l-1$. Таким образом, в $\mathbf{P}$ получаем убывающую цепь от b к a , откуда $a < b$.

Итак, отображение φ биективно, изотонно и обратно изотонно, т. е. является изоморфизмом упорядоченного множества $\mathbf{P}$ на упорядоченное множество $F(\mathbf{A})$. ■

Теорема 2. Конечное упорядоченное множество тогда и только тогда изоморфно каркасу автономного автомата, когда у каждого его элемента имеется не более чем один нижний сосед.

Доказательство. Граф переходов автономного автомата представляет собой объединение функциональных графов, т. е. орграфов, в которых степень исхода каждой вершины равна 1. Слоями такого автомата будут одноэлементные множества, соответствующие состояниям, не входящим в контуры, а также сами контуры. В диаграмме каркаса автономного автомата, если под высотой элемента (слоя) понимать удаленность соответствующего состояния от контура, контурам соответствуют минимальные элементы, у них нет нижних соседей, у каждого неминимального элемента имеется в точности один нижний сосед.

С другой стороны, если диаграмма упорядоченного множества удовлетворяет условию теоремы, то эту диаграмму можно преобразовать в граф переходов автономного автомата путем ориентации ее ребер от больших элементов к меньшим и присоединения петель во всех минимальных элементах. Диаграмма каркаса построенного автомата совпадет с диаграммой исходного упорядоченного множества. ■

Теорема 3. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — произвольные автоматы, то $\text{Sub}\mathbf{A} \cong \text{Sub}\mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $F(\mathbf{A}) \cong F(\mathbf{B})$.

Доказательство. Пусть L — конечная дистрибутивная решетка. Ненулевой элемент $a \in L$ называется неразложимым, если для любых $x, y \in L$ равенство $a = x \vee y$ влечет одно из равенств $a = x$ или $a = y$. Это означает, что у a имеется в L единственный нижний сосед. Например, неразложимыми элементами решетки подавтоматов являются в точности главные подавтоматы (см. [2], с. 174, лемма 2.5).

Известно (см. [2], с. 174, следствие 2.20), что конечная дистрибутивная решетка с точностью до изоморфизма определяется своим упорядоченным подмножеством, которое образуют ее неразложимые элементы.

Пусть $\text{PSub}\mathbf{A}$ обозначает упорядоченное множество всех главных подавтоматов автомата $\mathbf{A}$. Покажем, что $\text{PSub}\mathbf{A} \cong F(\mathbf{A})$.

Рассмотрим отображение $\varphi : \text{PSub}\mathbf{A} \rightarrow F(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}(s) \mapsto \sigma(s)$. Очевидно, что φ сюръективно. Если $\varphi(\mathbf{A}(s)) = \varphi(\mathbf{A}(t))$, то $\sigma(s) = \sigma(t)$, откуда $\tau(s) = \tau(t)$, и значит, $\mathbf{A}(s) = \mathbf{A}(t)$, что означает инъективность отображения φ . Далее, так как $\mathbf{A}(s) \leq \mathbf{A}(t) \iff \tau(s) \subseteq \tau(t) \iff (t, s) \in \tau \iff \sigma(s) \leq \sigma(t)$ для любых $s, t \in S$, то получаем, что биекция φ изотонна и обратно изотонна, т. е. является изоморфизмом упорядоченных множеств $\text{PSub}\mathbf{A}$ и $F(\mathbf{A})$.

Доказательство завершается следующей формулой: $\text{Sub}\mathbf{A} \cong \text{Sub}\mathbf{B} \iff \text{PSub}\mathbf{A} \cong \text{PSub}\mathbf{B} \iff F(\mathbf{A}) \cong F(\mathbf{B})$. ■

Теорема 4. Если φ — вложение автомата $\mathbf{A}$ в автомат $\mathbf{B}$ и $F(\mathbf{A}) \cong F(\mathbf{B})$, то φ — изоморфизм $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$.

Доказательство. Нужно показать, что φ — сюръективное отображение.

В каждом слое автомата $\mathbf{A}$ выберем одно состояние и обозначим полученное множество через S_0 . В множестве состояний автомата $\mathbf{B}$ образуем подмножество $T_0 = \{t | (\exists s \in S_0)(\varphi(s) = t)\}$. Покажем, что все элементы этого множества лежат в разных слоях автомата $\mathbf{B}$. Пусть это не так и $\sigma(t) = \sigma(t')$, где $t = \varphi(s), t' = \varphi(s')$ и $s, s' \in S_0$. Тогда существует слово $p \in X^*$, такое, что $\delta(t, p) = t'$. Отсюда имеем $\varphi(s') = t' = \delta(t, p) = \delta(\varphi(s), p) = \varphi(\delta(s, p))$. В силу инъективности φ получаем $s' = \delta(s, p)$, и значит, $(s, s') \in \tau$. Аналогично $(s', s) \in \tau$, откуда $(s, s') \in \sigma$, т.е. $\sigma(s) = \sigma(s')$, что невозможно по построению множества S_0 . Поскольку $|T_0| = |S_0| = |F(\mathbf{A})| = |F(\mathbf{B})|$, то T_0 является селективным множеством для эквивалентности σ в автомате $\mathbf{B}$.

Пусть теперь t — произвольное состояние автомата $\mathbf{B}$. Существует $t' \in T_0$, такое, что $\sigma(t) = \sigma(t')$. Значит, $t = \delta(t', p)$ для подходящего $p \in X^*$. Так как $t' = \varphi(s')$ для некоторого $s' \in S_0$, то $t = \delta(t', p) = \delta(\varphi(s'), p) = \varphi(\delta(s', p))$, т.е. $t \in \text{pr}_2\varphi$. Следовательно, φ сюръективно. Итак, φ — инъективный и сюръективный гомоморфизм, т.е. изоморфизм автомата $\mathbf{A}$ на автомат $\mathbf{B}$. ■

Следствие 1. Если $\mathbf{A}'$ — подавтомат автомата $\mathbf{A}$ и $F(\mathbf{A}') \cong F(\mathbf{A})$, то $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$.

Доказательство. Тожественное отображение из множества состояний автомата $\mathbf{A}'$ в множество состояний автомата $\mathbf{A}$ является автоматным вложением. Согласно теореме 4, оно будет изоморфизмом. ■

Следствие 2. Если φ — эндоморфизм автомата $\mathbf{A}$ и $F(\varphi(\mathbf{A})) \cong F(\mathbf{A})$, то φ — автоморфизм.

Доказательство. Поскольку эндоморфный образ $\varphi(\mathbf{A})$ является подавтоматом автомата $\mathbf{A}$, то из следствия 1 получаем требуемое утверждение. ■

Теорема 5. Если θ — конгруэнция автомата $\mathbf{A}$, то $F(\mathbf{A}/\theta) \cong F(\mathbf{A})$ тогда и только тогда, когда $\theta \subseteq \sigma$.

Доказательство. Пусть θ — произвольная конгруэнция автомата $\mathbf{A} = (S, X, \delta)$.

I. Предположим, что $\theta \subseteq \sigma$, и докажем изоморфность упорядоченных множеств (каркасов) $F(\mathbf{A}/\theta)$ и $F(\mathbf{A})$.

Прежде всего, заметим, что естественное отображение $\text{nat}\theta : S \rightarrow S/\theta, s \mapsto \theta(s)$, согласовано с отношениями достижимости в автоматах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}/\theta$. В самом деле,

$$\begin{aligned} (s, t) \in \tau &\implies (\exists p \in X^*)(\delta(s, p) = t) \implies \\ &\implies (\exists p \in X^*)(\delta(\theta(s), p) = \theta(\delta(s, p)) = \theta(t)) \implies (\theta(s), \theta(t)) \in \tau. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(s, t) \in \sigma$ влечет $(\theta(s), \theta(t)) \in \sigma$.

Рассмотрим теперь отображение $\varphi : F(\mathbf{A}/\theta) \rightarrow F(\mathbf{A})$, полагая $\varphi(\sigma(\theta(s))) = \sigma(s)$.

В силу сделанного выше замечания, φ определено корректно, т.е. не зависит от выбора конкретных представителей в классах $\theta(s)$ и $\sigma(s)$. Действительно, если $\theta(t) = \theta(s)$, то $(s, t) \in \theta \subseteq \sigma$, откуда $\varphi(\sigma(\theta(t))) = \varphi(\sigma(\theta(s))) = \sigma(s) = \sigma(t)$.

Очевидно, что φ сюръективно. Покажем, что оно и инъективно. В самом деле,

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma(\theta(s))) = \varphi(\sigma(\theta(t))) &\implies \sigma(s) = \sigma(t) \implies (s, t) \in \sigma \implies \\ &\implies (\theta(s), \theta(t)) \in \sigma \implies \sigma(\theta(s)) = \sigma(\theta(t)). \end{aligned}$$

Итак, φ — биекция.

Теперь доказываем ее изотонность:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta(s)) \leq \sigma(\theta(t)) &\implies (\theta(t), \theta(s)) \in \tau \implies (\exists p \in X^*)(\delta(\theta(t), p) = \theta(s)) \implies \\ &\implies (\exists p \in X^*)(\theta(\delta(t, p)) = \theta(s)) \implies (\exists p \in X^*)((\delta(t, p), s) \in \theta) \implies \\ &\implies (\exists p \in X^*)((\delta(t, p), s) \in \sigma) \implies (\exists p, q \in X^*)(\delta(t, pq) = s) \implies (t, s) \in \tau \implies \\ &\implies \sigma(s) \leq \sigma(t) \implies \varphi(\sigma(\theta(s))) \leq \varphi(\sigma(\theta(t))); \end{aligned}$$

и обратную изотонность:

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma(\theta(s))) \leq \varphi(\sigma(\theta(t))) &\implies \sigma(s) \leq \sigma(t) \implies (t, s) \in \tau \implies \\ &\implies ((\theta(t), \theta(s)) \in \tau \implies \sigma(\theta(s)) \leq \sigma(\theta(t))). \end{aligned}$$

Таким образом, φ — изоморфизм каркаса $F(\mathbf{A}/\theta)$ на каркас $F(\mathbf{A})$.

II. Предположим, что $F(\mathbf{A}/\theta) \cong F(\mathbf{A})$, и докажем, что $\theta \subseteq \sigma$.

От противного. Пусть θ не содержится в σ . Тогда существует пара $(s, t) \in \theta$, где s и t лежат в разных слоях автомата $\mathbf{A}$. Здесь могут представиться два случая.

1. Предположим, что слои $\sigma(s)$ и $\sigma(t)$ сравнимы в каркасе $F(\mathbf{A})$, например, $\sigma(s) < \sigma(t)$.

Из всех таких пар слоев выберем одну с тем свойством, что в ней $\sigma(s)$ имеет наименьшую возможную высоту. Тогда каждое состояние из слоя $\sigma(t)$ находится в одном θ -классе с некоторым состоянием из $\sigma(s)$. Действительно, если $t' \in \sigma(t)$, то существует слово $p \in X^*$, такое, что $\delta(t, p) = t'$. Так как $(s, t) \in \theta$, то $(\delta(s, p), t') \in \theta$. По выбору слоя $\sigma(s)$ имеем $\delta(s, p) \in \sigma(s)$. Точно так же любое состояние из каждого промежуточного слоя $\sigma(u)$, т. е. когда имеют место неравенства $\sigma(s) < \sigma(u) < \sigma(t)$, находится в одном θ -классе с подходящим состоянием из $\sigma(s)$. Отсюда следует, что при факторизации автомата $\mathbf{A}$ по конгруэнции θ все слои из интервала $[\sigma(s), \sigma(t)]$ отождествятся, и значит, в каркасе $F(\mathbf{A}/\theta)$ будет меньше элементов, чем в изоморфном ему каркасе $F(\mathbf{A})$, что невозможно.

2. Предположим, что слои $\sigma(s)$ и $\sigma(t)$ несравнимы в $F(\mathbf{A})$.

Допустим, что найдется слово $p \in X^*$, такое, что $s' = \delta(s, p) \in \sigma(s)$, но $t' = \delta(t, p) \notin \sigma(t)$. Возьмем слово $q \in X^*$ со свойством $\delta(s', q) = s$. Тогда по модулю θ имеем $t \equiv s = \delta(s', q) \equiv \delta(t', q) \notin \sigma(t)$, и мы получаем пару состояний $(t, \delta(t', q)) \in \theta$, где $\sigma(\delta(t', q)) < \sigma(t)$, что приводит к рассмотренному случаю 1.

Пусть, напротив, оказалось, что любое слово $p \in X^*$, переводящее s в одно из состояний слоя $\sigma(s)$, переводит t в одно из состояний слоя $\sigma(t)$. Тогда каждому $s' \in \sigma(s)$ соответствует $t' \in \sigma(t)$, такое, что $(s', t') \in \theta$. Следовательно, при факторизации автомата $\mathbf{A}$ по конгруэнции θ слой $\sigma(s)$ отождествится со слоем $\sigma(t)$, и значит, в каркасе $F(\mathbf{A}/\theta)$ будет меньше элементов, чем в $F(\mathbf{A})$, что невозможно.

Полученные противоречия приводят к выводу о том, что $\theta \subseteq \sigma$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Саллий В. Н. Автоматы, у которых все конгруэнции — внутренние // Изв. вузов. Математика. 2009. №9. С. 36–45.
2. Богомолов А. М., Саллий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.