ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/7/8

УДК 519.17

МИНИМАЛЬНЫЕ РЕБЕРНЫЕ РАСШИРЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРЕДПОЛНЫХ ГРАФОВ

М. Б. Абросимов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

E-mail: mic@rambler.ru

Рассматриваются минимальные реберные k-расширения предполных графов — графов, в которых есть вершина, смежная со всеми остальными. Доказывается лемма, позволяющая оценить предельные значения k, при которых предполный граф может иметь минимальные реберные k-расширения, а также указать их общий вид. Дается полное описание всех минимальных реберных k-расширений для предполных графов, являющихся соединением полного графа с вполне несвязным графом, цепью и циклом.

Ключевые слова: *предполный граф, минимальное реберное расширение, отказоустойчивая реализация.*

Введение

Неориентированным графом (далее просто *графом*) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V, называемое *отношением смежности.* Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершины u и v *смежны*, и эти вершины соединены ребром (u, v). При этом (u, v) и (v, u) — это одно и то же ребро, которое обозначают $\{u, v\}$. Также говорят, что ребро $\{u, v\}$ *инцидентно* вершинам u и v. Основные определения даются согласно [1].

Предполным графом называется граф, имеющий хотя бы одну *полную* вершину, то есть вершину, смежную со всеми остальными. Граф, все вершины которого являются полными, называется *полным графом* и обозначается K_n. В общем виде предполный граф можно записать как соединение одновершинного графа K_1 и некоторого n-вершинного графа G_n: K_1+G_n. Если в предполном графе p полных вершин, то такой граф можно записать как $K_p + G$.

Под *соединением* двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, не имеющих общих вершин, понимается граф

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1).$$

Под *объединением* двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ понимается граф

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2).$$

В 1976 г. Хейз в работе [2] предложил основанную на графах модель для исследования отказоустойчивости систем.

Технической системе Σ сопоставляется помеченный граф $G(\Sigma)$, вершины которого соответствуют элементам системы Σ, ребра — связям между элементами, а метки указывают тип элементов. Под отказом элемента технической системы Σ понимается удаление соответствующей ему вершины из графа системы $G(\Sigma)$ и всех связанных с ней ребер. Говорят, что система Σ^* является *k-отказоустойчивой реализацией* системы Σ, если отказ любых k элементов системы Σ^* приводит к графу, в который можно вложить граф системы Σ с учетом меток вершин. Построение k-отказоустойчивой реализации системы Σ можно представить себе как введение в нее определенного числа новых элементов и связей. При этом предполагается, что в нормальном режиме работы избыточные элементы и связи маскируются, а в случае отказа происходит реконфигурация системы до исходной структуры.

Пусть в системе Σ встречается t различных типов элементов. Очевидно, что любая ее k-отказоустойчивая реализация должна содержать не менее k дополнительных элементов каждого типа. Легко видеть, что такого числа дополнительных элементов достаточно для построения k-отказоустойчивой реализации системы Σ. В самом деле, добавим k элементов каждого типа и соединим их все между собой и с элементами системы Σ. Тогда любой отказавший элемент можно будет заменить одним из добавленных элементов соответствующего типа. Построенную таким образом k-отказоустойчивую реализацию можно назвать *тривиальной*.

k-Отказоустойчивая реализация Σ^* системы Σ, состоящей из t элементов различного типа, называется *оптимальной*, если система Σ^* отличается от системы Σ на k элементов каждого из t типов системы Σ и среди всех k-отказоустойчивых реализаций с тем же числом элементов система Σ^* имеет наименьшее число связей.

На практике элементы технических систем часто оказываются однотипными. При исследовании отказоустойчивости в подобных системах метки элементов опускаются и в качестве графа системы рассматривается граф без меток. В этом случае оптимальная k-отказоустойчивая реализация будет содержать в точности k дополнительных элементов.

Хейз предложил процедуры построения оптимальной k-отказоустойчивой реализации для цепи, цикла и помеченного дерева. Позднее Хейз совместно с Харари в работе [3] обобщили модель на случай отказов связей между элементами, предложив понятие *реберной отказоустойчивости*. Модель отказоустойчивости, в которой рассматриваются только отказы элементов, было предложено называть *вершинной отказоустойчивостью* (см. [4]).

Понятие минимального k-расширения является общеграфовым аналогом для конструкций отказоустойчивых реализаций. Исключая понятие «отказа» элемента или связи системы, рассматриваются части графа, получающиеся удалением тех или иных его элементов. Оказалось, что задачи проверки вершинной и реберной отказоустойчивости являются NP-полными (см. [5]), поэтому интерес представляет аналитическое описание минимальных вершинных и реберных k-расширений для различных классов графов.

В работе [6] удалось полностью описать вид всех минимальных вершинных k-расширений предполных графов при любом натуральном k. Для реберных расширений такой схемы, позволяющей строить все или хотя бы одно минимальное реберное k-расширение любого предполного графа, не известно и, видимо, получить ее не удастся. В данной работе предлагается решение проблемы для некоторых частных случаев предполных графов: для соединений полного графа с вполне несвязным графом, с цепью и с циклом.

1. Леммы о реберных k-расширениях предполных графов

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k-расширением* (k — натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) G^* является реберным k-расширением G, то есть граф G допускает вложение в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k ребер;

2) G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

В отличие от минимальных вершинных k-расширений, минимальные реберные k-расширения существуют не при всех значениях k. Например, полный граф K_n (неориентированный или ориентированный, с петлями или без) не имеет минимального реберного k-расширения ни при каких значениях k. Однако, если разрешить в графе кратные дуги, то тогда любой граф будет иметь минимальные реберные k-расширения. Будем использовать обозначение $G - \{u, v\}$ для графа, получающегося из графа G удалением ребра $\{u, v\}$.

Сформулируем и докажем лемму о реберных k-расширениях произвольных предполных графов.

Лемма 1. Пусть n-вершинный предполный граф G имеет в точности p полных вершин. Если G имеет минимальное реберное k-расширение, то оно содержит не менее $p + 2k$ полных вершин.

Доказательство. Пусть G — предполный граф с p полными вершинами, а G^* — его минимальное реберное k-расширение. Рассмотрим граф G', получающийся из G^* удалением следующих k ребер: в качестве очередного ребра удаляем

а) ребро, соединяющее две полные вершины. Если таких ребер нет, то

б) ребро, инцидентное полной вершине (это возможно, только если останется единственная полная вершина). Если нет ребер из пунктов *а* и *б*, то

в) любое ребро.

Очевидно, что если среди выбранных ребер окажется хотя бы одно ребро из пунктов *б* или *в*, то получившийся граф не будет предполным и не будет допускать вложения исходного графа G. Таким образом, граф G' должен содержать не менее p полных вершин и получаться из графа G^* удалением k ребер, соединяющих полные вершины графа G^*. После удаления каждого такого ребра количество полных вершин уменьшается на две, что и доказывает утверждение. ■

Лемма 1 позволяет оценить, при каких значениях k предполный граф может иметь минимальные реберные k-расширения, а также указать общий вид этих минимальных реберных k-расширений.

Следствие 1. Пусть n-вершинный предполный граф G имеет в точности p полных вершин, тогда G не имеет минимальных реберных k-расширений при $k > \dfrac{n-p}{2}$.

Следствие 2. Пусть n-вершинный предполный граф G вида $K_p + G_n$ имеет минимальное реберное k-расширение G^*. Тогда граф G^* имеет вид $K_{p+2k} + G_{n-2k}$, где G_{n-2k} — подходящий $(n-2k)$-вершинный граф, такой, что граф $K_{2k} + G_{n-2k}$ является реберным k-расширением графа G_n.

Доказательство.

Первая часть утверждения непосредственно следует из леммы.

Докажем, что если граф $K_{p+2k} + G_{n-2k}$ является минимальным реберным k-расширением графа $K_p + G_n$, то граф $K_{2k} + G_{n-2k}$ является реберным k-расширением графа G_n. Предположим, что это неверно. Это означает, что можно выбрать k ребер графа $K_{2k} + G_{n-2k}$, таких, что получающийся после их удаления граф H не будет допускать вложения графа G_n. Но тогда удаление этих же ребер в графе $K_p + (K_{2k} + G_{n-2k}) = K_{p+2k} + G_{n-2k}$ даст граф $K_p + H$, который не будет допускать вложения графа $K_p + G_n$, а это противоречит предположению. ■

Следствие 2 позволяет свести задачу поиска минимальных реберных k-расширений графов вида $K_p + G_n$ к поиску реберных k-расширений графа G_n среди графов вида $K_{2k} + G_{n-2k}$, а также оценить количество дополнительных ребер.

Следствие 3. Пусть n-вершинный предполный граф G вида K_p+G_n имеет минимальное реберное k-расширение вида $K_{p+2k}+G_{n-2k}$. Тогда количество дополнительных ребер равно

$$2nk - 2k^2 - k + m^* - m, \tag{1}$$

где m — число ребер графа G_n, а m^* — число ребер графа G_{n-2k}.

Доказательство. Определим количество ребер графа $K_p + G_n$.

Граф K_p содержит $\dfrac{p(p-1)}{2}$ ребер.

Граф G_n содержит m ребер.

Каждая вершина из K_p соединена с каждой из n вершин графа G, что дает pn ребер.

Суммируя, получаем, что граф $K_p + G_n$ имеет $\dfrac{p(p-1)}{2} + pn + m$ ребер.

Аналогично определим количество ребер графа $K_{p+2k} + G_{n-2k}$:

$$\frac{(p+2k)(p+2k-1)}{2} + (p+2k)(n-2k) + m^* =$$
$$= \frac{p^2+4pk-p+4k^2-2k}{2} + pn + 2nk - 2kp - 4k^2 + m^* =$$
$$= \frac{p(p-1)}{2} + pn - 2k^2 - k + 2nk + m^*.$$

Вычитая, получим

$$2nk - 2k^2 - k + m^* - m.$$

■

Докажем еще одно полезное утверждение относительно минимальных реберных k-расширений произвольных графов.

Лемма 2. Пусть n-вершинный граф G имеет минимальное реберное k_1-расширение, которым является полный граф K_n. Тогда при $k > k_1$ граф G не имеет минимальных реберных k-расширений.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что если некоторый граф G^* является минимальным реберным k-расширением графа G, то любой граф H, получающийся из G^* удалением произвольного ребра, будет реберным $(k-1)$-расширением графа G. Из этого, в частности, следует, что любое минимальное реберное $(k+1)$-расширение графа G содержит больше ребер, чем минимальное реберное k-расширение графа G. Наконец, так как полный граф K_n имеет максимальное число ребер среди всех n-вершинных графов, то это и доказывает лемму. ■

2. Соединение полного и вполне несвязного графов: $K_m + O_n$

n-Вершинный граф без ребер называется *вполне несвязным* и обозначается O_n. Рассмотрим графы вида $K_m + O_n$.

Теорема 1. При $k \leqslant n/2$ граф $K_{m+2k}+O_{n-2k}$ является единственным с точностью до изоморфизма минимальным реберным k-расширением графа K_m+O_n. При $k > n/2$ граф $K_m + O_n$ не имеет минимальных реберных k-расширений.

Доказательство. По лемме 1 число полных вершин минимального реберного k-расширения графа $K_m + O_n$ должно быть не менее $m + 2k$. По следствию 1 из леммы 1 при $n < 2k$ граф $K_m + O_n$ не имеет минимальных реберных k-расширений. По следствию 2 из леммы 1 при $n \geqslant 2k$ граф $K_m + O_n$ может иметь минимальные реберные k-расширения вида $K_{m+2k} + G_{n-2k}$, где G_{n-2k} — подходящий $(n - 2k)$-вершинный граф.

Убедимся, что при $n \geqslant 2k$ граф вида $K_{m+2k} + O_{n-2k}$ является реберным k-расширением графа $K_m + O_n$. Все ребра графа $K_{m+2k} + O_{n-2k}$ делятся на две группы:

1) ребра, соединяющие две полные вершины;

2) ребра, соединяющие одну полную вершину с вершиной из части O_{n-2k}.

Удаление ребра первого типа сокращает количество полных вершин на две, а удаление ребра второго типа — на одну. После удаления k любых ребер сохранится не менее m полных вершин.

Заметим, что из всех кандидатов на роль графа G_{n-2k} граф O_{n-2k} имеет минимально возможное число ребер. Следовательно, граф $K_{m+2k}+O_{n-2k}$ является и минимальным реберным k-расширением графа $K_m + O_n$ при $n \geqslant 2k$. ■

Следствие 4. Число дополнительных ребер в минимальном реберном k-расширении графа $K_m + O_n$ при $k \leqslant n/2$ составляет $2nk - 2k^2 - k$.

Доказательство. Воспользуемся следствием 3. В нашем случае графы G_n и G_{n-2k} являются вполне несвязными графами, поэтому $m = m^* = 0$. Подставляя в формулу (1), получим искомое значение числа дополнительных ребер: $2nk - 2k^2 - k$. ■

Замечание 1. Граф вида $K_1 + O_n$ называется *звездой* или *звездным графом.* На рис. 1 показаны минимальные реберные 1-расширения звезд $K_1 + O_2$ и $K_1 + O_3$. Для наглядности полные вершины помечены черным.

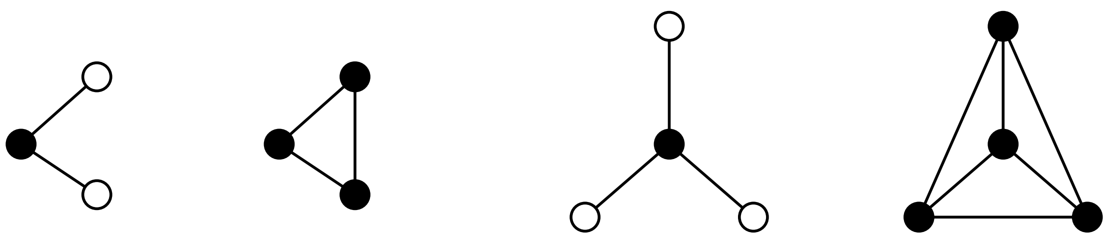

Рис. 1. Звезды $K_1 + O_2$ и $K_1 + O_3$ и их минимальные реберные 1-расширения

3. Соединение полного графа и цепи: $K_m + P_n$

Путем называется последовательность ребер в графе, такая, что конец одного ребра является началом другого. Граф называется *связным*, если между двумя любыми его вершинами существует путь. Любой максимальный связный подграф графа называется *компонентой связности* или просто *компонентой*. Граф называется *k-реберно связным*, если не менее k ребер необходимо удалить, чтобы нарушить его связность. Например, полный граф K_n является $(n-1)$-реберно связным.

Цепью P_n называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i-j| = 1\}$. Одновершинная цепь P_1 называется *тривиальной*. Будем говорить, что n-вершинный граф G *может быть покрыт* (не более чем) p цепями, если существует n-вершинный граф, являющийся объединением (не более чем) p цепей и вкладывающийся в граф G. Например, полный граф K_n может быть покрыт одной цепью P_n, а вполне несвязный граф O_n может быть покрыт n цепями (тривиальными).

Рассмотрим графы вида $K_m + P_n$.

При $n \leqslant 2$ граф $K_m + P_n$ изоморфен графу K_{m+n} и не имеет минимальных реберных k-расширений ни при каких значениях k. Пусть далее $n > 2$. Рассмотрим граф $K_{m+2} + G$, где G — $(n-2)$-вершинный граф, такой, что любой граф, получающийся из G удалением одного ребра, можно покрыть не более чем тремя цепями. Обозначим для определенности вершины подграфа K_{m+2} графа $K_{m+2} + G$ через $v_1, \ldots, v_{m+2}$. Покажем, что граф $K_{m+2} + G$ является реберным 1-расширением для графа $K_m + P_n$. Заметим, что ребра графа $K_{m+2} + G$ можно разделить на три типа:

1) ребра, соединяющие полные вершины $v_1, \ldots, v_{m+2}$;

2) ребра, соединяющие полную вершину из $v_1, \ldots, v_{m+2}$ и вершину подграфа G;

3) ребра, соединяющие вершины подграфа G.

Рассмотрим удаление из графа $K_{m+2} + G$ ребра типа 1. Пусть для определенности удалено ребро $\{v_1, v_2\}$. Поскольку часть графа G допускает покрытие не более чем тремя цепями, то, очевидно, и сам граф G может быть покрыт тремя цепями. Рассмотрим худший случай, когда для покрытия необходимы три цепи. Пусть цепи P_{n_1}, P_{n_2} и P_{n_3} образуют покрытие графа G. Вложение графа $K_m + P_n$ в граф $(K_{m+2} + G) - \{v_1, v_2\}$ возможно следующим образом. Полные вершины — $v_3, \ldots, v_{m+2}$, а оставшиеся вершины образуют цепь: $P_{n_1} v_1 P_{n_2} v_2 P_{n_3}$.

Рассмотрим удаление из $K_{m+2} + G$ ребра типа 2. Пусть цепи P_{n_1}, P_{n_2} и P_{n_3} образуют покрытие графа G. Пусть для определенности удалено ребро, соединяющее полную вершину v_1 с некоторой вершиной w цепи P_{n_1}. Вложение графа $K_m + P_n$ в граф $(K_{m+2} + G) - \{v_1, w\}$ возможно следующим образом. Полные вершины — $v_3, \ldots, v_{m+2}$, а оставшиеся вершины образуют цепь: $P_{n_1} v_2 P_{n_2} v_1 P_{n_3}$.

Рассмотрим удаление из $K_{m+2}+G$ ребра типа 3. Пусть для определенности удалено ребро, соединяющее вершины v и w графа G. По условию граф $G - \{v, w\}$ допускает покрытие не более чем тремя цепями, и пусть это снова будут цепи P_{n_1}, P_{n_2} и P_{n_3}. Вложение графа K_m+P_n в $(K_{m+2}+G)-\{v, w\}$ возможно следующим образом. Полные вершины — $v_3, \ldots, v_{m+2}$, а оставшиеся вершины образуют цепь: $P_{n_1} v_1 P_{n_2} v_2 P_{n_3}$.

Таким образом, граф $K_{m+2}+G$ является реберным 1-расширением графа K_m+P_n.

Заметим, что условие покрытия графа G с удаленным ребром тремя цепями является существенным, так как более трех цепей нельзя объединить в одну с помощью двух дополнительных полных вершин. В самом деле, граф $K_2 + G$ по следствию 2 из леммы 1 должен быть реберным 1-расширением цепи P_n. Если граф G с удаленным ребром может быть покрыт тремя цепями, то, как мы уже видели, граф K_2+G является реберным 1-расширением цепи P_n. Если же это неверно, т. е. граф G с удаленным ребром e может быть покрыт не менее чем 4 цепями, то цепь P_n нельзя будет вложить в граф $K_2 + (G - e)$.

Исследуем свойства графа G:

1) G содержит $n-2$ вершин;

2) любой граф, получающийся из G удалением одного ребра, можно покрыть не более чем тремя цепями;

3) граф, получающийся из G удалением одного ребра, имеет не более трех компонент связности, а следовательно, и сам граф G имеет не более трех компонент связности.

Рассмотрим граф, являющийся объединением двух цепей: $P_{n_1} \cup P_{n_2}$. При удалении любого ребра такой граф распадется на три цепи. Таким образом, объединение двух цепей может быть использовано в качестве графа G, причем число ребер в таком графе есть $n-4$. Заметим, что $P_{n_1} \cup P_{n_2}$ отличается в точности на одно ребро от объединения трех цепей. С учетом следствия 2 из леммы 1 получаем, что минимальное реберное 1-расширение графа $K_m + P_n$ имеет вид $K_{m+2} + G$, где G — $(n-2)$-вершинный граф, каждая часть которого, получающаяся удалением одного ребра, может быть покрыта не более чем тремя цепями. Условиям 2, 3 удовлетворяют следующие n-вершинные графы:

— Объединение двух цепей: $P_{n_1} \cup P_{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n-1$. Таких графов будет $[n/2]$.
— При $n \geqslant 5$: цикл и две изолированные вершины: $O_2 \cup C_{n-2}$.
— При $n = 5$: $O_1 \cup K_{1,3}$.

Из всего сказанного получается

Теорема 2. Относительно минимальных реберных 1-расширений предполных графов вида $K_m + P_n$ справедливо следующее:

— при $n = 1, 2$: минимальных реберных 1-расширений нет;
— при $n = 3$: минимальное реберное 1-расширение единственно и имеет вид K_{m+n};
— при $n \geqslant 4$: существует $([n/2]-1)$ минимальных реберных 1-расширений вида

$$K_{m+2} + (P_{n_1} \cup P_{n_2}), \quad n_1 + n_2 = n-2, \quad 1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n-3;$$

— при $n = 7$: имеется минимальное реберное 1-расширение вида $K_{m+2} + (O_1 \cup K_{1,3})$;
— при $n \geqslant 7$: имеется минимальное реберное 1-расширение вида $K_{m+2} + (O_2 \cup C_{n-4})$.

Следствие 5. Число дополнительных ребер в минимальном реберном 1-расширении графа $K_m + P_n$ при $n > 3$ составляет $2n-6$.

Доказательство. Воспользуемся следствием 3.

Так как граф G_n в данном случае — это цепь P_n, то $m = n-1$.

При $n > 3$ одно из минимальных реберных 1-расширений графа $K_m + P_n$ имеет вид

$$K_{m+2} + (P_{n_1} \cup P_{n_2}),$$

где $n_1 + n_2 = n-2$, $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n-3$. Имеем $m^* = n-4$.

Подставляя значения m и m^* в формулу (1) при $k = 1$, получаем

$$2n - 2 - 1 + n - 4 - (n-1) = 2n - 6.$$

Таким образом, число дополнительных ребер составляет $2n-6$. ■

На рис. 2 представлен граф $K_1 + P_7$ и 4 его минимальных реберных 1-расширения. Полные вершины обозначены черными точками. Для наглядности некоторые ребра, соединяющие полные вершины с остальными, опущены. Количество дополнительных ребер минимальных реберных 1-расширений равно 8.

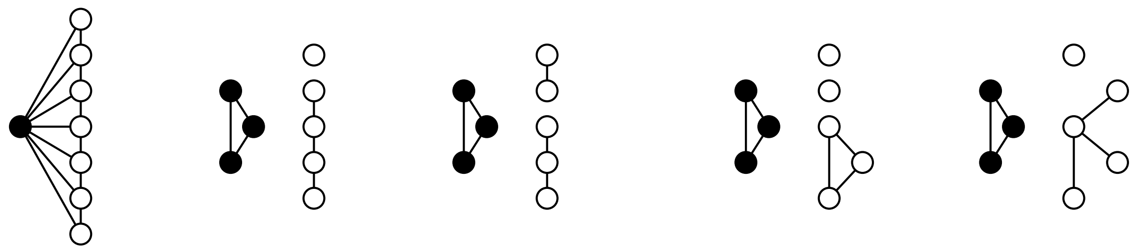

Рис. 2. Граф $K_1 + P_7$ и все его минимальные реберные 1-расширения

Теорему 2 можно обобщить:

Теорема 3. Относительно минимальных реберных k-расширений предполных графов вида $K_m + P_n$ справедливо следующее:

1) при $n < 2k$: минимальных реберных k-расширений нет;

2) при $n = 2k$: минимальное реберное k-расширение единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид K_{2k+m};

3) при $2k < n \leqslant 4k + 1$: минимальное реберное k-расширение единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид $K_{2k+m} + O_{n-2k}$;

4) при $n > 4k+1$: минимальные реберные k-расширения имеют вид $K_{2k+m}+G_{n-2k}$, где G_{n-2k} — $(n-2k)$-вершинный граф с $n-3k-1$ ребрами, такой, что после удаления любых его k-ребер оставшаяся часть может быть покрыта не более чем $2k+1$ цепями.

Доказательство.

Пункт 1 вытекает из следствия 1 леммы 1.

Пункт 2 получается из следствия 2 леммы 1.

Пусть далее $n > 2k$.

Из следствия 2 леммы 1 следует, что если граф $K_m + P_n$ имеет минимальное реберное k-расширение, то оно имеет вид $K_{2k+m} + G$, где G — $(n-2k)$-вершинный граф. Обозначим для определенности через $v_1, \ldots, v_{2k+m}$ полные вершины из части K_{2k+m} графа $K_{2k+m} + G$. Рассмотрим граф, получающийся после удаления k ребер из графа $K_{2k+m}+G$. В нем останется, по крайней мере, m полных вершин, пусть для определенности это будут вершины $v_{2k+1}, \ldots, v_{2k+m}$. Оставшиеся вершины должны образовывать цепь. Обозначим через K^* подграф, образованный из вершин $v_1, \ldots, v_{2k}$, а через G^* — подграф, образованный из вершин графа G. Для построения цепи имеется $2k$ вершин $v_1, \ldots, v_{2k}$ и вершины подграфа G^*. Граф K_{2k} является $(2k-1)$-реберно связным, поэтому удаление из него любых k ребер его связности не нарушит. Предположим, что подграф G^* можно покрыть не более чем $2k+1$ цепями $P_{n_1}, \ldots, P_{n_l}$. Тогда легко построить n-вершинную цепь, соединяя концы цепей $P_{n_1}, \ldots, P_{n_l}$ вершинами $v_1, \ldots, v_{2k}$. Если же подграф G^* нельзя покрыть не более чем $2k+1$ цепями, то n-вершинную цепь построить невозможно.

Заметим, что минимальным по числу ребер p-вершинным графом, который удовлетворяет приведенному условию, при $p \leqslant 2k+1$ является вполне несвязный граф O_p, а при $p > 2k+1$ — объединение $k+1$ цепей $P_{n_1}, \ldots, P_{n_{k+1}}$. В самом деле, удаление одного ребра разбивает цепь на две цепи, следовательно, удаление k ребер приведет к образованию $2k+1$ цепей. Легко подсчитать и число ребер в p-вершинном графе, являющемся объединением $k+1$ цепей: $p-k-1$. ■

Следствие 6. Число дополнительных ребер в минимальном реберном k-расширении графа $K_m + P_n$ при $2k < n \leqslant 4k + 1$ составляет

$$2nk - 2k^2 - k - n + 1,$$

а при $n > 4k + 1$ —

$$2nk - 2k^2 - 4k.$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 3.

Так как граф G_n в данном случае — это цепь P_n, то $m = n - 1$.

При $2k < n \leqslant 4k+1$ минимальное реберное k-расширение графа K_m+P_n имеет вид $K_{2k+m}+O_{n-2k}$, поэтому $m^* = 0$. Подставляя значения m и m^* в формулу (1), получаем

$$2nk - 2k^2 - k - (n - 1) = 2nk - 2k^2 - k - n + 1.$$

При $n > 4k + 1$ минимальные реберные k-расширения графа $K_m + P_n$ имеют вид $K_{2k+m} + G_{n-2k}$, где граф G_{n-2k} имеет $m^* = n - 3k - 1$ ребер.

Подставляя значения m и m^* в формулу (1), получаем

$$2nk - 2k^2 - k + n - 3k - 1 - (n - 1) = 2nk - 4k - 2k^2.$$

■

На рис. 3 представлены минимальные реберные 2-расширения для графа $K_1 + P_{10}$. По-прежнему полные вершины обозначаются черными точками и для наглядности некоторые ребра, соединяющие полные вершины с остальными, опущены. Количество дополнительных ребер минимальных реберных 2-расширений равно 24.

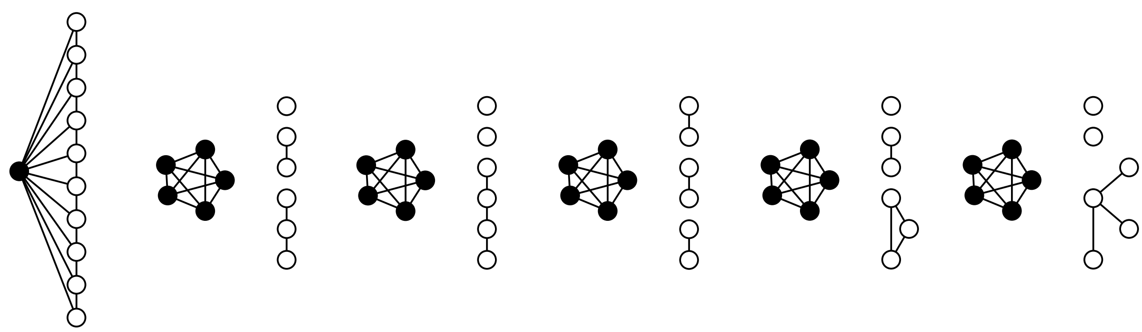

Рис. 3. Граф $K_1 + P_{10}$ и все его минимальные реберные 2-расширения

4. Соединение полного графа и цикла: $K_m + C_n$

Связный n-вершинный граф, все вершины которого имеют степень 2, называется *циклом* и обозначается C_n. Очевидно, что цикл не может иметь менее 3 вершин. Связный граф без циклов называется *деревом*. Вершина дерева, имеющая степень 1, называется *листом*.

Теорема 4. Относительно минимальных реберных 1-расширений графа K_m+C_n справедливы следующие утверждения:

1) при $n = 3$ минимальных реберных 1-расширений нет;

2) при $n = 4$ существует единственное минимальное реберное 1-расширение вида K_{m+4};

3) при $n \geqslant 5$ одно из минимальных реберных 1-расширений имеет вид $K_{m+2}+P_{n-2}$;

4) при $n = 6$ одно из минимальных реберных 1-расширений имеет вид $K_{m+3} + O_3$;

5) при $n \geqslant 6$ одно из минимальных реберных 1-расширений имеет вид $K_{m+2} + +(O_1 \cup C_{n-2})$;

6) других минимальных реберных 1-расширений, кроме описанных в п. 2–5, у графа $K_m + C_n$ нет.

Доказательство. При $n = 3$ граф K_m+C_n изоморфен полному графу K_{m+n} и поэтому минимальных реберных 1-расширений не имеет. Далее рассматриваем случай $n > 3$.

По следствию 2 из леммы 1, если граф $K_m + C_n$ имеет минимальное реберное 1-расширение, то его можно представить в виде $K_{m+2} + G_{n-2}$. Обозначим для определенности через $v_1, \ldots, v_{m+2}$ полные вершины в части K_{m+2}, а через $u_1, \ldots, u_{n-2}$ — вершины части G_{n-2}.

Убедимся, что при $n > 3$ граф $K_{m+2} + P_{n-2}$ является реберным 1-расширением графа $K_m + C_n$. Аналогично доказательству теоремы 2 все ребра разделим на три типа: ребра внутри K_{m+2}, ребра внутри P_{n-2} и ребра, соединяющие вершины из K_{m+2} и из P_{n-2}. Заметим, что при удалении ребра любого типа остается, по крайней мере, m полных вершин, поэтому достаточно убедиться, что остальные вершины образуют n-вершинный цикл. Рассмотрим удаление ребра каждого типа.

1) При удалении ребра в части K_{m+2}, для определенности пусть это будет ребро $\{v_1, v_2\}$, остаются полные вершины $v_3, \ldots, v_{m+2}$, а остальные вершины образуют цикл $v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots, u_{n-2}, v_1$.

2) При удалении ребра в части P_{n-2} эта цепь распадается на две цепи: P_{n_1} и P_{n_2}. Полные вершины — $v_3, \ldots, v_{m+2}$, а остальные вершины образуют цикл $v_1, P_{n_1}, v_2, P_{n_2}, v_1$.

3) При удалении ребра, соединяющего вершины из K_{m+2} и P_{n-2}, для определенности пусть это будет ребро $\{v_1, u_p\}$, где $1 \leqslant p \leqslant n - 2$, остаются полные вершины $v_3, \ldots, v_{m+2}$, а остальные вершины образуют цикл или $v_1, u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, v_2, v_1$ (если $p \neq 1$), или $v_2, u_1, \ldots, u_{n-2}, v_1, v_2$ (если $p = 1$).

Таким образом, при $n > 3$ граф $K_{m+2} + P_{n-2}$ действительно является реберным 1-расширением графа $K_m + C_n$. При $n = 4$ граф $K_{m+2} + P_2$ изоморфен графу K_{m+4}.

Пусть $K_{m+2} + G_{n-2}$ является минимальным реберным 1-расширением графа $K_m + C_n$. Тогда граф G_{n-2} содержит не более $n - 3$ ребер. Рассмотрим удаление произвольного ребра e в G_{n-2}. По предположению вершины графа G_{n-2} вместе с двумя полными вершинами образуют цикл, следовательно, граф $(G_{n-2} - e)$ содержит не более двух компонент связности и может быть покрыт двумя цепями. Первое условие означает, что число ребер в G_{n-2} не менее $n - 3$. Поскольку цепь P_{n-2} содержит в точности $n - 3$ ребра, то граф $K_{m+2} + P_{n-2}$ является минимальным реберным 1-расширением графа $K_m + C_n$, а любое другое минимальное реберное 1-расширение, если оно есть, имеет вид $K_{m+2}+G_{n-2}$, где граф G_{n-2} имеет $n-2$ вершин и $n-3$ ребер. Так как граф $(G_{n-2} - e)$ содержит не более двух компонент связности, то граф G_{n-2} либо состоит из одной компоненты связности и тогда является деревом, либо из одной $(n - 3)$-вершинной двусвязной компоненты с $n - 3$ ребрами, то есть цикла, и одной изолированной вершины.

Исследуем, каким может быть дерево в первом случае. Покажем, что оно не может иметь более трех листьев. Предположим, что это не так и граф G_{n-2} является деревом с более чем тремя листьями. Рассмотрим граф, получающийся удалением из G_{n-2} ребра при некотором листе v. Получим дерево с числом вершин на одну меньше и не менее чем с тремя листьями и изолированную вершину: $T_{n-3} \cup O_1$. По условию граф $K_2 + (T_{n-3} \cup O_1)$ должен содержать n-вершинный цикл. Вершина v в этом цикле должна соседствовать с обеими полными вершинами v_1 и v_2. Другим соседом полной вершины v_1 будет один из листьев дерева. Далее последует цепь (единственная) до другого листа, затем вершина v_2. Оставшиеся листья не могут быть присоединены к циклу. Таким образом, дерево не может иметь более трех листьев. Один лист может иметь только тривиальное дерево (состоящее из одной вершины). Если листа два, то получаем рассмотренный ранее случай цепи.

Исследуем случай трех листьев. В этом случае дерево, очевидно, имеет одну вершину степени 3, три вершины степени 1 и может иметь несколько вершин степени 2. Однако, если хотя бы один лист не смежен с вершиной степени 3, то, удалив ребро при таком листе, мы опять получим граф вида $T_{n-3} \cup O_1$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим противоречие. Итак, деревом с тремя листьями может быть лишь 4-вершинная звезда $K_1 + O_3$.

Таким образом, граф G_{n-2} может иметь вид $O_1 \cup C_{n-3}$, P_{n-2} или $K_1 + O_3$. ■

Следствие 7. Число дополнительных ребер в минимальном реберном 1-расширении графа $K_m + C_n$ при $n \geqslant 5$ составляет $2n - 6$.

Доказательство. Воспользуемся следствием 3.

Так как граф G_n в данном случае — это цикл C_n, то $m = n$.

При $n \geqslant 5$ минимальное реберное 1-расширение графа $K_m + C_n$ имеет вид $K_{m+2} + P_{n-2}$, поэтому $m^* = n - 3$. Подставляя значения m и m^* в формулу (1) при $k = 1$, получаем $2n - 2 - 1 + n - 3 - n = 2n - 6$. ■

Таким образом, графы K_1+C_4 и K_1+C_5 имеют единственное минимальное реберное 1-расширение, граф $K_1 + C_6$ имеет три минимальных реберных 1-расширения, а при $n > 6$ граф $K_1 + C_n$ имеет два минимальных реберных 1-расширения. На рис. 4 представлены все минимальные реберные 1-расширения для графа $K_1 + C_6$. Как и ранее, полные вершины обозначаются черными точками и для наглядности некоторые ребра, соединяющие полные вершины с остальными, опущены. Количество дополнительных ребер минимальных реберных 1-расширений равно 6.

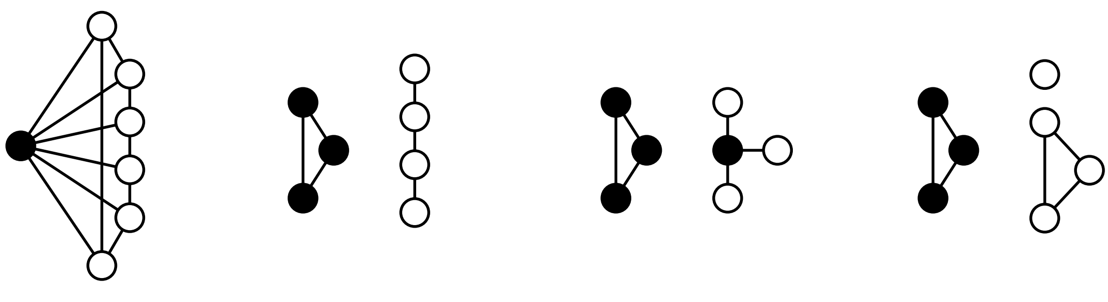

Рис. 4. Граф $K_1 + C_6$ и все его минимальные реберные 1-расширения

Теорему 4 можно обобщить:

Теорема 5. Относительно минимальных реберных k-расширений предполных графов вида $K_m + C_n$ при $k > 1$ справедливо следующее:

1) при $n < 2k$ и $n = 4$: минимальных реберных k-расширений нет;

2) при $n = 2k$: минимальное реберное k-расширение единственно: K_{2k+m};

3) при $2k < n \leqslant 4k$: минимальное реберное k-расширение единственно: $K_{2k+m} + O_{n-2k}$;

4) при $n > 4k$: минимальные реберные k-расширения имеют вид $K_{2k+m} + G_{n-2k}$, где G_{n-2k} — это $(n-2k)$-вершинный граф с $n-3k$ ребрами, такой, что после удаления любых его k ребер оставшаяся часть может быть покрыта не более чем $2k$ цепями.

Доказательство. Пункты 1 и 2 вытекают из следствий 1 и 2 леммы 1.

Рассмотрим $n > 2k$.

Рассуждаем аналогично доказательству теоремы 3. Из следствия 2 леммы 1 следует, что если граф $K_1 + C_n$ имеет минимальное реберное k-расширение, то оно имеет вид $K_{2k+m} + G$, где G — это $(n-2k)$-вершинный граф. Обозначим для определенности через $v_1, \ldots, v_{2k+m}$ полные вершины из части K_{2k+m} графа $K_{2k+m} + G$. Рассмотрим граф, получающийся после удаления k ребер из графа $K_{2k+m} + G$. В нем останется, по крайней мере, m полных вершин, пусть для определенности это будут вершины $v_{2k+1}, \ldots, v_{2k+m}$. Оставшиеся вершины должны образовывать цикл. Обозначим через K^* подграф, образованный из вершин $v_1, \ldots, v_{2k}$, а через G^* — подграф, образованный из вершин графа G. Для построения цикла имеется $2k$ вершин $v_1, \ldots, v_{2k}$ и вершины подграфа G^*. Граф K_{2k} является $(2k-1)$-реберно связным, поэтому удаление из него любых k ребер его связности не нарушит. Предположим, что подграф G^* можно покрыть не более чем $2k$ цепями $P_{n_1}, \ldots, P_{n_l}$. Тогда легко построить n-вершинный цикл, соединяя концы цепей $P_{n_1}, \ldots, P_{n_l}$ с вершинами $v_1, \ldots, v_{2k}$. Если же подграф G^* нельзя покрыть не более чем $2k$ цепями, то n-вершинний цикл построить невозможно.

Заметим, что минимальным по числу ребер p-вершинным графом, который удовлетворяет приведенному условию, при $p \leqslant 2k$ является вполне несвязный граф O_p, а при $p > 2k$ — объединение k цепей $P_{n_1}, \ldots, P_{n_k}$. В самом деле, удаление одного ребра разбивает цепь на две цепи, следовательно, удаление k ребер приведет к образованию $2k$ цепей. Легко подсчитать и число ребер в p-вершинном графе, являющемся объединением k цепей: $p - k$. Вспоминая, что $p = n - 2k$, завершаем доказательство. ∎

Следствие 8. Число дополнительных ребер в минимальном реберном k-расширении графа $K_m + C_n$ при $2k < n \leqslant 4k$ составляет

$$2nk - 2k^2 - k - n,$$

а при $n > 4k$ —

$$2nk - 2k^2 - 4k.$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 3.

Так как граф G_n в данном случае — это цикл C_n, то $m = n$.

При $2k < n \leqslant 4k$ минимальное реберное k-расширение графа $K_m + C_n$ имеет вид $K_{2k+m} + O_{n-2k}$, поэтому $m^* = 0$. Подставляя значения m и m^* в формулу (1), получаем

$$2nk - 2k^2 - k - n.$$

При $n > 4k$ минимальные реберные k-расширения графа $K_m + P_n$ имеют вид $K_{2k+m} + G_{n-2k}$, где граф G_{n-2k} имеет $m^* = n - 3k$ ребер.

Подставляя значения m и m^* в формулу (1), получаем

$$2nk - 2k^2 - k + n - 3k - 1 - n = 2nk - 4k - 2k^2 - 1.$$

∎

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
2. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
3. *Harary F., Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
4. *Harary F., Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
5. *Абросимов М. Б.* О вычислительной сложности расширений графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2009. № 1. С. 94–95.
6. *Абросимов М.Б.* Минимальные k-расширения предполных графов // Изв. вузов. Математика. 2003. № 6(493). С. 3–11.