

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С ЗАДАНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПОРЯДКА, СТЕПЕНИ И ОБХВАТА

В. А. Мелентьев

*Институт физики полупроводников СО РАН, г. Новосибирск, Россия***E-mail:** melva@isp.nsc.ru

Предложен подход к аналитическому решению задачи синтеза структур системы с заданными свойствами. Подход основан на представлении графа системы его проекциями. Изложены понятия, основные положения и свойства проекций графа. Суть подхода состоит в построении базовой проекции остовного дерева синтезируемого графа и в его доопределении другими проекциями. Это аналогично решению системы уравнений, в качестве которой использовано множество проекций графа. Даны примеры и приведены результаты генерации графов.

Ключевые слова: *порядок, диаметр, обхват и проекция графа, синтез регулярного графа.*

Введение

Проблема синтеза структур компьютерных систем и сетей связи с заданными свойствами представлена в научной литературе достаточно широко. Наиболее распространенный подход к решению этой проблемы состоит в генерации случайных сетей с последующей режекцией не отвечающих заданным критериям вариантов. В качестве критериев при этом используют такие общеизвестные показатели, как диаметр, связность, коэффициент кластеризации и т. п. Известные из [1] исследования устойчивости вычислительных сетей и систем к случайному и/или преднамеренному удалению вершин из их структур свидетельствуют о большей устойчивости регулярных структур: наиболее устойчивая топология случайных графов характеризуется распределением степени вершин с не более чем тремя несовпадениями. При этом ни в теории сетей и систем, ни в фундаментальной ее основе — теории графов проблематика генерации структуры (графа) с заданными коммуникативными свойствами систематическими методами, исключаяющими необходимость перебора, практически не исследована. Связано это было, прежде всего, с отсутствием аппарата описания графов, позволяющего максимально формализованно производить их анализ и преобразования.

В данной работе впервые представлен аналитический подход к решению проблемы синтеза регулярных графов заданного порядка n и степени s . Подход основан на предложенной в [2, 3] формализации описания графа $G(V, E)$ его проекциями $P(v_0)$, $v_0 \in V$, и состоит в построении базовой проекции остовного дерева генерируемого графа, в анализе этой проекции, в выявлении с ее помощью нижней границы диаметра $d(G)$ и верхней границы обхвата $g(G)$ и в доопределении неизвестных ребер графа другими его проекциями в соответствии с требуемыми значениями показателей. Таким образом, поиск недостающих в остовном подграфе ребер подобен решению системы уравнений, в качестве которой использовано множество проекций генерируемого графа.

1. Основные положения

Во избежание разночтений здесь приведены некоторые общеизвестные определения [4], а также основные сведения о проекциях графа, используемых в работе.

Регулярный граф — связный граф $G(V, E)$, у которого степени всех вершин $v_i \in V$ равны между собой; степень вершин при этом называется степенью $s(G)$ регулярного графа.

Эксцентриситет вершины — для вершины u величина $e(u) = \max_{v \in V} \partial(u, v)$, где $\partial(u, v)$ — расстояние между вершинами u и v из V .

Диаметр — наибольший из эксцентриситетов вершин связного графа: $d(G) = \max_{u \in V} e(u)$.

Обхват — длина минимального цикла в графе.

Проекция $P(v_i)$ графа $G(V, E)$ — описание графа в скобочной форме, отправной точкой (ракурсной вершиной) которого является вершина $v_i \in V$.

Технология построения скобочных описаний графа и их свойства достаточно подробно представлены в работах [2, 3]. Однако в связи с тем, что проекции графа являются базовым понятием предлагаемого в работе подхода и этот инструмент описания графов пока малоизвестен из-за его относительной новизны, приведем краткое изложение основ построения проекций неориентированного связного графа, продемонстрировав их для наглядности примером единичного куба, используемого затем для сопоставления с полученными в результате синтеза графами, обладающими теми же (как в единичном кубе) значениями порядка и степени.

Проекцию $P(w)$ графа $G(V, E)$ с ракурсной вершиной $w \in V$ назовем w -й проекцией этого графа, либо его w -м ракурсом. Для конкретизации числа k уровней в проекции в обозначение добавим соответствующий индекс — $P_k(w)$. Тогда $P_0(w) = w$. Продолжив описание до 1-го уровня, получим $P_1(w) = w^{\mathcal{N}(w)}$. Здесь порожденное вершиной w подмножество $\mathcal{N}(w)$ является окружением вершины w и состоит из $s(w)$ вершин, где $s(w) = \deg(w)$ — степень вершины w . Таким образом, j -я вершина $(i-1)$ -го уровня проекции порождает на следующем i -м уровне подмножество $V_{ij} \subset V$ вершин; соответственно, число таких подмножеств равно числу вершин предшествующего уровня. Подмножеству $V_{ij} \subset V$ поставим в соответствие множество предшествующих ему вершин $V'_{ij} \subset V$, включенных в маршрут $M(v_0, v_{i-1,j})$ из ракурсной вершины v_0 в вершину $v_{i-1,j}$, порождающую подмножество V_{ij} и являющуюся его непосредственной предшественницей. Для подмножества вершин 1-го уровня V_{1w} , порожденного единственной вершиной w 0-го уровня, подмножество V'_{1w} состоит из одной вершины: $V'_{10} = \{w\}$. Подмножества $V'_{i+1,j}$ вышестоящих уровней для $i \geq 1$ получаем из соответствующих подмножеств V'_{ij} предшествующих уровней добавлением в них непосредственно предшествующей подмножеству $V_{i+1,j}$ вершины $v_{ij} \in V_{ij}$: $V'_{i+1,j} = V'_{ij} \cup \{v_{ij}\}$. Заметим, что в общем случае связных графов, в том числе содержащих циклы, на разных уровнях проекции $P_k(w)$ или на одном и том же ее уровне (кроме первого) может быть несколько экземпляров одной и той же вершины, и индексы этих экземпляров не должны совпадать. Отсутствие кратности (повторяемости) вершин на первом уровне объясняется тем, что рассматриваемые в данной работе объекты не являются мультиграфами; мы не касаемся здесь также особенностей описания графов с петлями, поэтому $v_{i-1,j} \neq v_{ij}$. Общее число C_i вершин i -го уровня проекции равно сумме мощностей подмножеств V_{ij} вершин этого уровня — $C_i = \sum_j |V_{ij}|$, а множество M_i находящихся на этом уровне вершин представляет собой объединение подмножеств V_{ij} , т. е. $M_i = \bigcup_j V_{ij}$

и $C_i \geq |M_i|$. Вершины, входящие в состав подмножества V_{ij} , определяются вычитанием из окружения вершины $v_{i-1,j}$, порождающей это подмножество, множества его вершин-предшественниц V'_{ij} : $V_{ij} = \mathcal{N}(v_{i-1,j}) \setminus V'_{ij}$. Это исключает повторение вершин в маршрутах, определяемых проекцией. Тогда выражение для 3-уровневой проекции, содержащее каждого уровня которой раскрыто здесь на примере лишь одной вершины одного из подмножеств вершин этого уровня, имеет вид

$$P_3(w) = w^{\{u^{\{t:t \in \mathcal{N}(v) \setminus V'_{3v}, V'_{3v} = V'_{2u} \cup \{u\} = \{w,u\}\}} : v \in \mathcal{N}(u) \setminus V'_{2u}, V'_{2u} = \{w\} : u \in \mathcal{N}(w)\}}.$$

Здесь множество вершин 1-го уровня состоит из единственного подмножества — $V_{1w} = \mathcal{N}(w)$, мощность этого множества $|V_{1w}| = \deg(w)$. Множество вершин 2-го уровня включает в себя $\deg(w)$ подмножеств, каждое из которых имеет своими непосредственными предшественниками все вершины 1-го уровня; в частности, вершина v входит в подмножество вершин V_{2u} , непосредственной предшественницей которых является вершина u : $v \in V_{2u}$, $V_{2u} = \mathcal{N}(u) \setminus V'_{1u}$, $V'_{1u} = \{w\}$. Итак, множество вершин любого n -го ($n \leq k$) уровня проекции $P_k(w)$ объединяет в себе подмножества, число которых равно числу вершин $(n-1)$ -го уровня, а их содержимое получено вычитанием из окружений этих вершин всех их предшественниц в данной проекции.

Продemonстрируем данное выше конструктивное описание проекций на простом примере единичного куба (рис. 1).

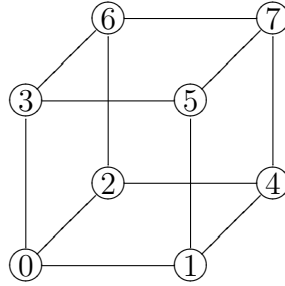


Рис. 1. Единичный куб

Выберем вершину $v_0 = 0$ в качестве ракурсной вершины проекции $P_k(0)$. Окружение этой вершины $\mathcal{N}(0) = \{1, 2, 3\}$ составляет множество вершин 1-го уровня: $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $|M_1| = C_1 = 3$. Множество M_2 вершин 2-го уровня объединяет в себе $C_1 = 3$ подмножества, являющиеся окружениями (без вершины 0, непосредственно предшествующей этим подмножествам) трех вершин 1-го уровня: $M_2 = M_{21} \cup M_{22} \cup M_{23} = \{4, 5\} \cup \{4, 6\} \cup \{5, 6\} = \{4, 5, 6\}$, при этом $C_2 = 6$, а $|M_2| = 3$. Отметим, что $M_1 \cup M_2 \neq V$, поэтому построение проекции необходимо продолжить следующим уровнем. Множество M_3 вершин 3-го уровня состоит из 6 подмножеств, представляющих собой окружения соответствующих им 6 вершин 2-го уровня, каждое из которых модифицировано вычитанием множеств предшествующих этому окружению вершин: $M_3 = M_{34}^1 \cup M_{35}^1 \cup M_{34}^2 \cup M_{36}^1 \cup M_{35}^2 \cup M_{36}^2$. Здесь первая цифра нижнего индекса указывает на принадлежность к соответствующему уровню проекции, вторая идентифицирует вершину графа, а верхний индекс служит для дополнительной индексации нескольких экземпляров одной и той же вершины на рассматриваемом уровне проекции. Из построенной таким образом проекции

$$P_3(0) = 0^{\{1^{\{4\{2,7\}, 5\{3,7\}\}}, 2^{\{4\{1,7\}, 6\{3,7\}\}}, 3^{\{5\{1,7\}, 6\{2,7\}\}}\}}$$

видно, что только на 3-м уровне появляется вершина 7, не включенная в состав ни одного из подмножеств предшествующих уровней: $M_3 = \{2, 7\} \cup \{3, 7\} \cup \{1, 7\} \cup \{3, 7\} \cup \{1, 7\} \cup \{2, 7\} = \{1, 2, 3, 7\}$, $C_3 = 12$, $|M_3| = 4$. Запись этой же проекции в однострочном варианте имеет вид

$$P_3(0) = 0\{1\{4\{2, 7\}, 5\{3, 7\}\}, 2\{4\{1, 7\}, 6\{3, 7\}\}, 3\{5\{1, 7\}, 6\{2, 7\}\}\}.$$

Открывающиеся скобки перед тем или иным подмножеством вершин указывают на его вложенность, а число скобок, «непогашенных» закрывающимися, определяет уровень вложенности этого подмножества в множества вершин-предшественниц. В работах [2, 3] показано, что уровень вложенности подмножества в множество потомков ракурсной вершины (номер уровня в проекции) определяет ее удаленность от вершин соответствующего подмножества, а k -й уровень, впервые доопределяющий множество вершин всех нижерасположенных уровней проекции графа $G(V, E)$ до V , определяет эксцентриситет ракурсной вершины: $e(v_0) = k$, для которого $\bigcup_{i=0}^{k-1} M_i \neq V$,

$\bigcup_{i=0}^k M_i = V$. Проекция графа $P_k(v_0)$ считается полной, если ею определены все вершины и все ребра (отношения смежности) этого графа. Тогда необходимые условия полноты проекции могут быть записаны следующим образом: $\bigcup_{i=0}^k M_i = V$ и $\bigcup_{i=0}^k E_i = E$. Здесь $E_i = \{u, v : u \in M_{i-1}, v \in M_i\}$ — множество ребер, инцидентных парам вершин со смежных уровней проекции. Нетрудно заметить, что второе из этих условий полноты проекции (реберное) поглощает в себе первое (для вершин). Из приведенной выше проекции $P_3(0)$ видно, что и вершинное, и реберное условия полноты выполняются здесь только на 3-м уровне: $\bigcup_{i=0}^3 M_i = V$ и $|\bigcup_{i=0}^3 M_i| = |V| = 8$; $E_0 = \emptyset$, $E_1 = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}\}$, $E_2 = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$, $E_3 = \{\{4, 2\}, \{4, 7\}, \{5, 3\}, \{5, 7\}, \{4, 1\}, \{6, 3\}, \{6, 7\}, \{5, 1\}, \{6, 2\}\}$ и $E = \bigcup_{i=0}^3 E_i = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}$, $|E| = 12$.

Дополним приведенные здесь описания проекций их свойствами, доказанными в [2, 3]. Выше указывалось, что не являющаяся ракурсной вершина $v_j \neq v_0$ проекции $P_k(v_0)$ может находиться на любом из $k > 0$ ее уровней с некоторой кратностью $0 \leq m_{ij} \leq C_k$. Для вершин из V_{ij} , расположенных на уровнях $0 < i \leq k$, существуют упорядоченные множества вершин $W(v_{ij}) = (v_0, v_{i0}, \dots, v_{ij})$, представляющие собой простые цепи из v_0 в v_{ij} , а длины этих цепей — $\partial(v_0, v_{ij}) = i$.

Отметим и другое свойство проекции графа, доказательство которого дано там же: число уровней $k_{\min}(v_0)$ в минимальной полной проекции $P_{k_{\min}}(v_0)$ связного простого графа $G(V, E)$ не меньше эксцентриситета $e(v_0)$ ракурсной вершины v_0 и не превышает увеличенного на единицу его значения:

$$k_{\min}(v_0) = \begin{cases} e(v_0), & \text{если } \nexists \{u, v\} \in M_k \ (\partial(v_0, u) = \partial(v_0, v) = e(v_0) \ \& \ \partial(u, v) = 1); \\ e(v_0) + 1, & \text{если } \exists \{u, v\} \in M_k \ (\partial(v_0, u) = \partial(v_0, v) = e(v_0) \ \& \ \partial(u, v) = 1). \end{cases}$$

Следствием этого является то, что проекция графа, построенная из любой его вершины до уровня с номером, большим диаметра, всегда является полной.

В дополнение к приведенным выше свойствам, используемым предлагаемым в работе подходом, сформулируем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Если в проекции $P(v_0)$ графа $G(V, E)$ вершина $u \in V$ принадлежит двум подмножествам одного и того же или двум подмножествам разных уровней, то обхват графа $g(G)$ не превышает суммы номеров этих уровней.

Доказательство этого утверждения следует из приведенного выше свойства проекции, согласно которому для любой вершины $u \in V$, расположенной на i -м уровне ($i > 0$) проекции $P(v_0)$ графа $G(V, E)$, существует простая цепь $W(v_0, u)$ из v_0 в u , длина $\partial(v_0, u)$ которой равна i . Изначально мы исключили наличие в синтезируемых здесь графах кратных ребер, поэтому вершина u не может входить в состав подмножества вершин, порожденных одной из вершин предшествующего уровня проекции. Проиндексируем ее принадлежность разным подмножествам, помня при этом, что это одна и та же конечная вершина ($u_1 = u_2 = u$) двух разных путей $W_1(v_0, u)$ и $W_2(v_0, u)$ из v_0 в u . Если пересечение множеств W_1 и W_2 входящих в эти пути вершин содержит всего две вершины ($W_1 \cap W_2 = \{v_0, u\}$), то длина простого цикла, образованного этими цепями, максимальна и равна сумме номеров уровней i_1 и i_2 , на которых расположена вершина u . Если же $W_1 \cap W_2$ включает в себя большее число вершин ($|W_1 \cap W_2| > 2$), то очевидно, что существует несколько (именно $|W_1 \cap W_2| - 2 \geq 1$) не совпадающих с v_0 вершин, из которых также существуют простые цепи в u_1 и u_2 , являющиеся участками цепей W_1 и W_2 . При этом вершина v_x пересечения, расположенная на более высоком уровне, является начальной вершиной двух непересекающихся цепей из v_x в u_1 и u_2 . Тогда длина цикла, образованного этими цепями, определяется выражением $(i_1 - i_x) + (i_2 - i_x) = i_1 + i_2 - 2i_x$, и $g(G) \leq i_1 + i_2$, что и требовалось доказать.

2. Описание подхода

Из приведенных в п. 1 свойств проекций следует, что вершина v_0 регулярного простого графа с невзвешенными ребрами обладает минимальным эксцентриситетом, если уровень k_e проекции $P_{k_e}(v_0)$, на котором впервые выполняется условие $\bigcup_{i=0}^{k_e} M_i = V$, является минимально возможным для заданных значений порядка $n = |V|$ и степени s графа. Максимально возможное при степени графа s число вершин n , расположенных на i -м ($i > 0$) уровне проекции, равно

$$C_i(s) = s(s-1)^{i-1}. \quad (1)$$

Тогда минимальное число уровней в проекции синтезируемого графа с заданными парой $\{n, s\}$ значениями его порядка и степени может быть определено из соотношения

$$1 + s \sum_{i=1}^{k_e-1} (s-1)^{i-1} < n \leq 1 + s \sum_{i=1}^{k_e} (s-1)^{i-1}. \quad (2)$$

Из определения диаметра графа как наибольшего из эксцентриситетов всех его вершин следует, что синтезируемый граф будет обладать минимальным диаметром, если условие (2) выполняется для всех его проекций. Диаметр рассмотренного выше единичного куба с $n = 8$, $s = 3$ равен трем — $d(G) = 3$, что превышает полученное из (2) значение $k_e = 2$ для графа с $4 < n \leq 10$ и $s = 3$. Это означает принципиальную возможность синтеза графа с диаметром $d(G) = 2$ — меньшим, чем у обладающего теми же значениями порядка и степени единичного куба.

Следует обратить внимание на то, что процедура синтеза графа в предлагаемом подходе достаточно формализована, чтобы не использовать его геометрическое представление, поэтому из соображений общепринятости далее покажем полученный граф

в традиционном виде, но только как результат проведенных нами процедур формального синтеза.

Итак, для генерации 2-уровневой проекции $P_2(v_j)$ графа с $n = 8$, $s = 3$ и диаметром $d = 2$ все его $|V| = 8$ вершин необходимо разместить на двух уровнях проекции; пронумеруем вершины от 0 до 7. На 0-м уровне проекции $P_2(v_0)$ разместим вершину $v_0 = 0$, она же является корневой вершиной выстраиваемого для данной проекции остовного дерева. На 1-м уровне расположим 3 произвольно выбранные вершины (в данном случае выбраны вершины 1, 2 и 3). Так как рассматриваемые здесь графы не имеют кратных ребер, то и вершины 1-го уровня в любой проекции не могут быть кратными. На 2-м уровне проекции в соответствии с (1) $C_2(3) = 6$, т. е. здесь должны быть размещены 6 вершин, в то время как у нас остались нераспределенными всего 4 вершины: 4, 5, 6 и 7. Таким образом, на этом уровне мы имеем возможность разместить все вершины из $\{4, 5, 6, 7\}$, при том что некоторые из них могут быть кратными и/или их число может быть дополнено до $C_2(3) = 6$ вершинами предыдущего уровня. Так как в общем случае подмножества вершин 2-го уровня могут включать в себя и вершины 1-го, то проекцию $P_2(0)$ запишем следующим образом:

$$P_2(0) = 0^{\{1^{\{2,3,4,5,6,7\}_2}, 2^{\{1,3,4,5,6,7\}_2}, 3^{\{1,2,4,5,6,7\}_2}\}}. \quad (3)$$

Здесь множество $\{v_x, v_y, \dots, v_z\}_m$ является потенциальным подмножеством окружения вершины, непосредственно предшествующей этому подмножеству в данной проекции. Индекс m определяет число искомым в данном подмножестве вершин. Изначально в такие подмножества включим все вершины, число известных элементов окружения которых меньше степени графа s . Таковыми здесь являются все вершины графа, кроме 0, т. е. исходным будет подмножество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Так как вершина не содержит в своем окружении саму себя, то в проекции $P_2(0)$ подмножества соответствующим образом скорректированы. Выше уже отмечено, что множество M_2 вершин 2-го уровня обязательно должно содержать в себе подмножество $\{4, 5, 6, 7\}$, иначе эксцентриситет вершины 0 превысит полученное из (2) значение $e(v_0) = k_e = 2$, причем на оставшиеся два места могут претендовать любые две вершины из $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Отметим также, что при общем числе ребер в графе $|E| = ns/2 = 12$ проекцией (3) определены лишь три ребра. Остальные 9 неизвестных ребер предстоит определить, причем вторым уровнем проекции могут быть определены не более шести ребер. Из этого следуют недостаточность двух уровней проекции для ее полноты и необходимость последующего надстраивания ее 3-м уровнем в случае описания графа не системой, а лишь одной из его проекций.

Из проекции (3) и доказанной в п. 1 леммы видно, что если хотя бы одна из вершин 1-го уровня будет включена в состав 2-го уровня, то длина минимального цикла графа (его обхват) не превысит трех. Если же на 2-м уровне разместить только вершины из $\{4, 5, 6, 7\}$, обхват такого графа будет равен 4. Покажем это на синтезе соответствующих графов.

Итак, для синтеза графа с $g(G) = 3$ соединим вершину $v_1 = 1$ с вершиной $v_2 = 2$; выбор этих вершин может быть произвольным. Получим

$$P_2(0) = 0^{\{1^{\{2,\{4,5,6,7\}_1\}}, 2^{\{1,\{4,5,6,7\}_1\}}, 3^{\{4,5,6,7\}_2}\}}.$$

Заметим, что введенное отношение смежности для двух вершин 1-го уровня занимает две из шести позиций 2-го уровня и оставшихся четырёх позиций едва хватает для размещения четырёх вершин множества $\{4, 5, 6, 7\} = M_2 \setminus \{v_1, v_2\} = V \setminus (M_1 \cup M_0)$. Поэтому

в потенциальных списках подмножеств вершин 2-го уровня оставляем только эти вершины. Две из них должны быть смежны вершине 3 и по одной — вершинам 1 и 2, при этом выбор отношений смежности здесь может быть произволен, поскольку вершины подмножества $\{4, 5, 6, 7\}$ пока что изолированы и в этом отношении абсолютно равноправны. Запишем известные и принятые на настоящий момент отношения смежности в виде списка окружений каждой из вершин синтезируемого графа:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(0) &= \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{N}(2) = \{0, 1, 5\}, \quad \mathcal{N}(4) = \{1, \{5, 6, 7\}_2\}, \quad \mathcal{N}(6) = \{3, \{4, 5, 7\}_2\}, \\ \mathcal{N}(1) &= \{0, 2, 4\}, \quad \mathcal{N}(3) = \{0, 6, 7\}, \quad \mathcal{N}(5) = \{2, \{4, 6, 7\}_2\}, \quad \mathcal{N}(7) = \{3, \{4, 5, 6\}_2\}.\end{aligned}$$

Построенная в соответствии с этим списком 2-уровневая проекция графа

$$P_2(0) = 0^{\{1^{\{2,4\}}, 2^{\{1,5\}}, 3^{\{6,7\}}\}}$$

содержит все 8 вершин графа, но не является полной, так как множество вершин 2-го уровня включает в себя вершины с не выявленными пока окружениями. Число известных ребер в синтезируемом графе увеличилось с 3-х до 8-и, но неизвестными при этом остались 4 ребра. Достроив проекцию 3-м уровнем, получим

$$P_3(0) = 0^{\{1^{\{2^{\{0,5\}}, 4^{\{5,6,7\}_2}\}}, 2^{\{1^{\{0,4\}}, 5^{\{4,6,7\}_2}\}}, 3^{\{6^{\{4,5,7\}_2}, 7^{\{4,5,6\}_2}\}}\}.$$

Используя приведенный выше список окружений, построим проекцию графа с ракурсной вершиной $v_1 = 1$:

$$P_3(1) = 1^{\{0^{\{2^{\{5\}}, 3^{\{6,7\}}\}}, 2^{\{0^{\{3\}}, 5^{\{4,6,7\}_2}\}}, 4^{\{5,6,7\}_2}\}.$$

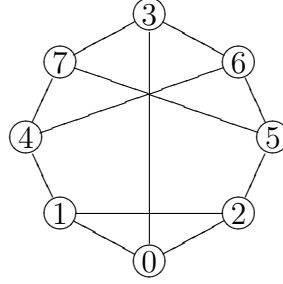
Как уже отмечалось, равенство диаметра синтезируемого графа заданному значению будет обеспечено, если эксцентриситет любой из его вершин не превысит этого значения. Другими словами, если $d(G) = d$, то все вершины графа должны быть размещены не более чем на $k = d$ уровнях любой v_j -й проекции графа $P_k(v_j)$: $\bigcup_{i=0}^k M_i = V$, $k \leq d$. Таким образом, анализируя проекцию $P_3(1)$, заметим, что выполнение этого условия в ней единственным образом возможно только при соединении вершины 4 с вершинами 6 и 7. Скорректировав список окружений соответствующим образом ($\mathcal{N}(4) = \{1, \{5, 6, 7\}_2\} \Rightarrow \mathcal{N}(5) = \{2, \{4, 6, 7\}_2\}$), получаем единственно возможное решение:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(0) &= \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{N}(2) = \{0, 1, 5\}, \quad \mathcal{N}(4) = \{1, 6, 7\}, \quad \mathcal{N}(6) = \{3, 4, 5\}, \\ \mathcal{N}(1) &= \{0, 2, 4\}, \quad \mathcal{N}(3) = \{0, 6, 7\}, \quad \mathcal{N}(5) = \{2, 6, 7\}, \quad \mathcal{N}(7) = \{3, 4, 5\}.\end{aligned}$$

Чтобы истинность решения не вызывала сомнений, ниже даны построенные на его основе все минимальные полные проекции и геометрическое изображение (рис. 2) полученного графа:

$$\begin{aligned}P_3(0) &= 0^{\{1^{\{2^{\{5\}}, 4^{\{6,7\}}\}}, 2^{\{1^{\{4\}}, 5^{\{6,7\}}\}}, 3^{\{6^{\{4,5\}}, 7^{\{4,5\}}\}}\}, \\ P_3(1) &= 1^{\{0^{\{2^{\{5\}}, 3^{\{6,7\}}\}}, 2^{\{0^{\{3\}}, 5^{\{6,7\}}\}}, 4^{\{6^{\{3,5\}}, 7^{\{3,5\}}\}}\}, \\ P_3(2) &= 2^{\{0^{\{1^{\{4\}}, 3^{\{6,7\}}\}}, 1^{\{0^{\{3\}}, 4^{\{6,7\}}\}}, 5^{\{6^{\{3,4\}}, 7^{\{3,4\}}\}}\}, \\ P_3(3) &= 3^{\{0^{\{1^{\{2,4\}}, 2^{\{1,5\}}\}}, 6^{\{4^{\{1,7\}}, 5^{\{2,7\}}\}}, 7^{\{4^{\{1,6\}}, 5^{\{2,6\}}\}}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3(4) &= 4^{\{1^{\{0\{2,3\}}, 2^{\{0,5\}\}}, 6^{\{3^{\{0,7\}}, 5^{\{2,7\}\}}, 7^{\{3^{\{0,6\}}, 5^{\{2,6\}\}}\}, \\
P_3(5) &= 5^{\{2^{\{0\{1,3\}}, 1^{\{0,4\}\}}, 6^{\{3^{\{0,7\}}, 4^{\{1,7\}\}}, 7^{\{3^{\{0,6\}}, 4^{\{1,6\}\}}\}, \\
P_3(6) &= 6^{\{3^{\{0\{1,2\}}, 7^{\{4,5\}\}}, 4^{\{1^{\{0,2\}}, 7^{\{3,5\}\}}, 5^{\{2^{\{0,1\}}, 7^{\{3,4\}\}}\}, \\
P_3(7) &= 7^{\{3^{\{0\{1,2\}}, 6^{\{4,5\}\}}, 4^{\{1^{\{0,2\}}, 6^{\{3,5\}\}}, 5^{\{2^{\{0,1\}}, 6^{\{3,4\}\}}\}.
\end{aligned}$$

Рис. 2. Регулярный граф с $n = 8$, $s = 3$, $g = 3$

Рассмотрим теперь синтез графа с теми же значениями порядка n , степени s и диаметра d , но с бóльшим, чем в предыдущем случае, обхватом $g = 4$. Естественно, что при этом треугольные циклы будут исключены и проекция (3) преобразуется к виду

$$P_2(0) = 0^{\{1^{\{4,5,6,7\}}, 2^{\{4,5,6,7\}}, 3^{\{4,5,6,7\}}\}}.$$

Произвольным образом разместим вершины из $\{4, 5, 6, 7\}$ на 2-м уровне проекции, введя смежность вершины 1 с вершинами 4 и 5 и вершины 2 с вершинами 6 и 7, и отразим эти изменения в проекции и в списке окружений синтезируемого графа:

$$P_2(0) = 0^{\{1^{\{4,5\}}, 2^{\{6,7\}}, 3^{\{4,5,6,7\}}_2\}},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(0) &= \{1, 2, 3\}, & \mathcal{N}(1) &= \{0, 4, 5\}, \\
\mathcal{N}(2) &= \{0, 6, 7\}, & \mathcal{N}(3) &= \{0, \{4, 5, 6, 7\}_2\}, \\
\mathcal{N}(4) &= \{1, \{3, 5, 6, 7\}_2\}, & \mathcal{N}(5) &= \{1, \{3, 4, 6, 7\}_2\}, \\
\mathcal{N}(6) &= \{2, \{3, 4, 5, 7\}_2\}, & \mathcal{N}(7) &= \{2, \{3, 4, 5, 6\}_2\}.
\end{aligned}$$

Число ребер $|E_k|$, задаваемых k -уровневой ($k \leq e(v_j)$) проекцией $P_k(v_j)$ регулярного графа $G(V, E)$ степени s , не превышает величины $s \sum_{i=1}^k (s-1)^{i-1}$, поэтому 2-уровневой проекцией регулярного графа степени $s = 3$ в лучшем случае могут быть заданы не более 9 ребер из общего числа $|E| = 12$. Проекция $P_2(0)$ содержит в себе все 8 вершин графа, но определяет лишь 7 его ребер, поэтому для полноты проекцию следовало бы нарастить еще одним уровнем. Однако поскольку далее применяется система проекций, полнота описания графа которой обеспечивается несмотря на то, что отдельные ее проекции не обладают этим свойством и содержат неизвестные ребра, ограничимся здесь использованием проекций с двумя уровнями, достаточными для анализа эксцентриситетов ракурсных вершин и обхватов соответствующих проекциям подграфов:

$$\begin{aligned}
P_2(0) &= 0^{\{1^{\{4,5\}}, 2^{\{6,7\}}, 3^{\{4,5,6,7\}}_2\}}, & P_2(1) &= 1^{\{0^{\{2,3\}}, 4^{\{3,5,6,7\}}_2, 5^{\{3,4,6,7\}}_2\}}, \\
P_2(2) &= 2^{\{0^{\{1,3\}}, 6^{\{3,4,5,7\}}_2, 7^{\{3,4,5,6\}}_2\}}, & P_2(3) &= 3^{\{0^{\{1,2\}}, \{4,5,6,7\}_2\}}, \\
P_2(4) &= 4^{\{1^{\{0,5\}}, \{3,5,6,7\}_2\}}, & P_2(5) &= 5^{\{1^{\{0,4\}}, \{3,4,6,7\}_2\}}, \\
P_2(6) &= 6^{\{2^{\{0,7\}}, \{3,4,5,7\}_2\}}, & P_2(7) &= 7^{\{2^{\{0,6\}}, \{3,4,5,6\}_2\}}.
\end{aligned}$$

Из $P_2(0)$ видно, что любое из потенциально возможных отношений смежности не сможет изменить эксцентриситет $e(v_0)$ ракурсной вершины. Зададимся условием равенства эксцентриситетов для всех вершин графа: $\forall v_j \in V (e(v_j) = d(G) = 2)$. Это условие реализуется размещением всех вершин графа не более чем на 2-х уровнях любой проекции; меньшее значение диаметра нашего графа нереализуемо в соответствии с (2). Рассмотрим также все проекции синтезируемого графа с позиции обеспечения заданного значения его обхвата $g(G)$: в любой из проекций системы сумма номеров уровней, на которых расположена одна и та же вершина, не должна быть менее обхвата. В данном случае $g(G) = 4$, и вершины 1-го уровня не должны входить в потенциальные подмножества 2-го и наоборот. Покажем это зачеркиванием соответствующих вершин в проекциях:

$$\begin{aligned} P_2(0) &= 0^{\{1^{\{4,5\}}, 2^{\{6,7\}}, 3^{\{4,5,6,7\}_2}\}}, & P_2(1) &= 1^{\{0^{\{2,3\}}, 4^{\{3,\cancel{5},6,7\}_2}, 5^{\{3,\cancel{4},6,7\}_2}\}}, \\ P_2(2) &= 2^{\{0^{\{1,3\}}, 6^{\{3,4,5,\cancel{7}\}_2}, 7^{\{3,4,5,\cancel{6}\}_2}\}}, & P_2(3) &= 3^{\{0^{\{1,2\}}, \{4,5,6,7\}_2\}}, \\ P_2(4) &= 4^{\{1^{\{0,5\}}, \{3,\cancel{5},6,7\}_2\}}, & P_2(5) &= 5^{\{1^{\{0,4\}}, \{3,\cancel{4},6,7\}_2\}}, \\ P_2(6) &= 6^{\{2^{\{0,7\}}, \{3,4,5,\cancel{7}\}_2\}}, & P_2(7) &= 7^{\{2^{\{0,6\}}, \{3,4,5,\cancel{6}\}_2\}}. \end{aligned}$$

Скорректируем список окружений, удалив из них «запрещенные» вершины (в дальнейшем все коррекции будем производить без визуального зачеркивания):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(0) &= \{1, 2, 3\}, & \mathcal{N}(1) &= \{0, 4, 5\}, \\ \mathcal{N}(2) &= \{0, 6, 7\}, & \mathcal{N}(3) &= \{0, \{4, 5, 6, 7\}_2\}, \\ \mathcal{N}(4) &= \{1, \{3, \cancel{5}, 6, 7\}_2\}, & \mathcal{N}(5) &= \{1, \{3, \cancel{4}, 6, 7\}_2\}, \\ \mathcal{N}(6) &= \{2, \{3, 4, 5, \cancel{7}\}_2\}, & \mathcal{N}(7) &= \{2, \{3, 4, 5, \cancel{6}\}_2\}. \end{aligned}$$

Из всех висячих в $P_2(0)$ вершин (это вершины с 3 по 7) выберем вершину меньшего уровня (вершина 3) и соединим ребром с одной из вершин ее потенциального окружения $\{4, 5, 6, 7\}_2$. Выбор в данном случае может быть произвольным, так как все эти вершины расположены на одном и том же 2-м уровне и являются на данный момент висячими. Соединив ребром вершины 3 и 4, скорректируем список окружений

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(0) &= \{1, 2, 3\}, & \mathcal{N}(1) &= \{0, 4, 5\}, & \mathcal{N}(2) &= \{0, 6, 7\}, \\ \mathcal{N}(3) &= \{0, 4, \{5, 6, 7\}_1\}, & \mathcal{N}(4) &= \{1, 3, \{6, 7\}_1\}, & \mathcal{N}(5) &= \{1, \{3, 6, 7\}_2\}, \\ \mathcal{N}(6) &= \{2, \{3, 4, 5\}_2\}, & & & \mathcal{N}(7) &= \{2, \{3, 4, 5\}_2\} \end{aligned}$$

и проекции графа

$$\begin{aligned} P_2(0) &= 0^{\{1^{\{4,5\}}, 2^{\{6,7\}}, 3^{\{4,\{5,6,7\}_1}\}\}}, & P_2(1) &= 1^{\{0^{\{2,3\}}, 4^{\{3,\{6,7\}_1\}}, 5^{\{3,6,7\}_2}\}}, \\ P_2(2) &= 2^{\{0^{\{1,3\}}, 6^{\{3,4,5\}_2}, 7^{\{3,4,5\}_2}\}}, & P_2(3) &= 3^{\{0^{\{1,2\}}, 4^{\{1,\{6,7\}_1\}}, \{5,6,7\}_1\}}, \\ P_2(4) &= 4^{\{1^{\{0,5\}}, 3^{\{0\{5,6,7\}_1\}}, \{6,7\}_1\}}, & P_2(5) &= 5^{\{1^{\{0,4\}}, \{3,6,7\}_2\}}, \\ P_2(6) &= 6^{\{2^{\{0,7\}}, \{3,4,5\}_2\}}, & P_2(7) &= 7^{\{2^{\{0,6\}}, \{3,4,5\}_2\}}. \end{aligned}$$

Заметим, что в проекции $P_2(0)$ вершина 4 расположена в двух разных подмножествах 2-го уровня, порожденных вершинами 1 и 3 предшествующего уровня ¹. Физически

¹Это предопределено изначальным выбором попарного размещения всех вершин из $\{4, 5, 6, 7\}$ в двух подмножествах, порожденных вершинами 1 и 2 проекции $P_2(0)$. При ином размещении возможна (но не обязательна) ситуация, когда кратность размещения одной из вершин множества $\{4, 5, 6, 7\}$ равнялась бы трем, а остальных — единице; соответственно решение нашей системы проекций с неизвестными ребрами было бы другим.

это означает, что она соединена с ракурсной вершиной $v_0 = 0$ двумя маршрутами одинаковой длины $\partial(0, 4) = 2$. Очевидно, что лишь одна вершина подмножества $\{5, 6, 7\}_1$ тоже будет дублирована на этом уровне. Логично (с позиций подобия) распространить это условие (дублирования двух вершин на 2-м уровне) на остальные проекции синтезируемого графа. Тогда вершину 3, уже дважды включенную во 2-й уровень проекции $P_2(1)$, необходимо исключить из подмножества $\{3, 6, 7\}_2$, порожденного вершиной 5. Это равносильно запрету отношения смежности вершин 5 и 3 и введению двух ребер, соединяющих вершину 5 с двумя вершинами из $\{6, 7\}_2 = \{6, 7\}$. Учитывая полученные решения, скорректируем список окружений

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(0) &= \{1, 2, 3\}, & \mathcal{N}(1) &= \{0, 4, 5\}, & \mathcal{N}(2) &= \{0, 6, 7\}, \\ \mathcal{N}(3) &= \{0, 4, \{6, 7\}_1\}, & \mathcal{N}(4) &= \{1, 3, \{6, 7\}_1\}, & \mathcal{N}(5) &= \{1, 6, 7\}, \\ \mathcal{N}(6) &= \{2, \{3, 4\}_1, 5\}, & & & \mathcal{N}(7) &= \{2, \{3, 4\}_1, 5\}\end{aligned}$$

и систему проекций

$$\begin{aligned}P_2(0) &= 0^{\{1^{\{4,5\}}, 2^{\{6,7\}}, 3^{\{4, \{6,7\}_1\}}\}}, & P_2(1) &= 1^{\{0^{\{2,3\}}, 4^{\{3, \{6,7\}_1\}}, 5^{\{6,7\}}\}}, \\ P_2(2) &= 2^{\{0^{\{1,3\}}, 6^{\{3,4\}_1, 5\}}, 7^{\{3,4\}_1, 5\}}\}}, & P_2(3) &= 3^{\{0^{\{1,2\}}, 4^{\{1, \{6,7\}_1\}}, \{6,7\}_1\}}, \\ P_2(4) &= 4^{\{1^{\{0,5\}}, 3^{\{0, \{6,7\}_1\}}, \{6,7\}_1\}}, & P_2(5) &= 5^{\{1^{\{0,4\}}, 6^{\{2, \{3,4\}_1\}}, 7^{\{2, \{3,4\}_1\}}\}}, \\ P_2(6) &= 6^{\{2^{\{0,7\}}, \{3,4\}_1, 5^{\{1,7\}}\}}, & P_2(7) &= 7^{\{2^{\{0,6\}}, \{3,4\}_1, 5^{\{1,6\}}\}}.\end{aligned}$$

Заметим, что и известные, и потенциально допустимые вершины окружений $\mathcal{N}(6)$ и $\mathcal{N}(7)$ в новом списке совпадают — $\mathcal{N}\{6\} = \mathcal{N}(7) = \{2, \{3, 4\}_1, 5\}$, что может означать правомерность любой допустимой для этих окружений подстановки², поэтому добавим ребро, инцидентное вершинам 7 и 3. Скорректировав окружения и проекции с учетом этой подстановки, получим искомый граф (см. рис. 3), все отношения смежности в котором полностью определены списком окружений

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(0) &= \{1, 2, 3\}, & \mathcal{N}(1) &= \{0, 4, 5\}, & \mathcal{N}(2) &= \{0, 6, 7\}, \\ \mathcal{N}(3) &= \{0, 4, 7\}, & \mathcal{N}(4) &= \{1, 3, 6\}, & \mathcal{N}(5) &= \{1, 6, 7\}, \\ \mathcal{N}(6) &= \{2, 4, 5\}, & & & \mathcal{N}(7) &= \{2, 3, 5\}\end{aligned}$$

и соответствующей этому списку системой проекций

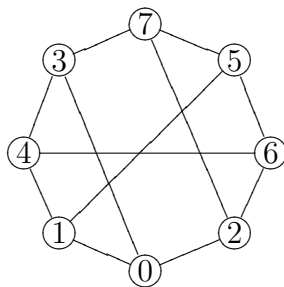
$$\begin{aligned}P_2(0) &= 0^{\{1^{\{4,5\}}, 2^{\{6,7\}}, 3^{\{4,7\}}\}}, & P_2(1) &= 1^{\{0^{\{2,3\}}, 4^{\{3,6\}}, 5^{\{6,7\}}\}}, \\ P_2(2) &= 2^{\{0^{\{1,3\}}, 6^{\{4,5\}}, 7^{\{3,5\}}\}}, & P_2(3) &= 3^{\{0^{\{1,2\}}, 4^{\{1,6\}}, 7^{\{2,5\}}\}}, \\ P_2(4) &= 4^{\{1^{\{0,5\}}, 3^{\{0,7\}}, 6^{\{2,5\}}\}}, & P_2(5) &= 5^{\{1^{\{0,4\}}, 6^{\{2,4\}}, 7^{\{2,3\}}\}}, \\ P_2(6) &= 6^{\{2^{\{0,7\}}, 4^{\{1,3\}}, 5^{\{1,7\}}\}}, & P_2(7) &= 7^{\{2^{\{0,6\}}, 3^{\{0,4\}}, 5^{\{1,6\}}\}}.\end{aligned}$$

В отличие от малоинформативного геометрического представления полученная в результате синтеза система проекций в явном виде указывает на равенство диаметру эксцентриситетов всех вершин графа: все вершины этого графа перечислены двумя уровнями любой его проекции.

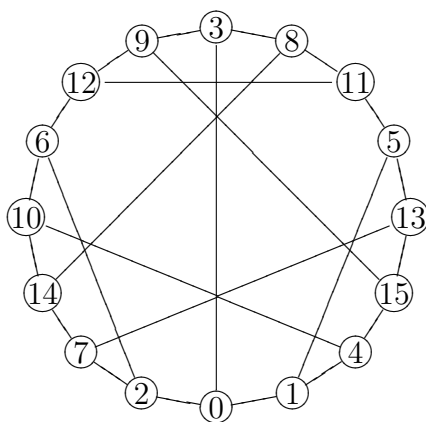
Полное описание графа может быть задано также единственной (любой из составляющих систему) проекцией наращиванием последней до полноты, например:

$$P_3(4) = 4^{\{1^{\{0^{\{2,3\}}, 5^{\{6,7\}}\}}, 3^{\{0^{\{1,2\}}, 7^{\{2,5\}}\}}, 6^{\{2^{\{0,7\}}, 5^{\{1,7\}}\}}\}}.$$

²В этом несложно убедиться: подстановка в систему проекций ребра, соединяющего вершины 3 и 6, определяет последнее неизвестное ребро, инцидентное вершинам 4 и 7.

Рис. 3. Регулярный граф с $n = 8$, $s = 3$, $g = 4$

Подытожим и обобщим процесс синтеза примером графа (рис. 4) порядка $n = 16$, степени $s = 3$ и обхвата $g = 5$, полученного аналогичным образом³.

Рис. 4. Граф $n = 16$, $s = 3$, $g = 5$

1. Из (2) получим минимально возможное число уровней проекций $P_k(v_j)$, включающих в себя все вершины синтезируемого графа $G(V, E)$, обуславливающее минимальное значение его диаметра $d(G)$.

В данном случае ($k = e(v_j) = d(G) = 3$) для всех $v_j \in V$. Обхват графа $g(G)$ при этом не превышает значения $2d(G) - 1$. Это значение $g(G) = 5$ принято здесь в качестве одного из условий синтеза.

2. Построим k -уровневую проекцию синтезируемого графа, выбрав в качестве ракурсной любую из произвольным образом пронумерованных вершин. Число k уровней получено на предыдущем шаге. Число $C_i(s)$ вершин на i -м уровне ($i < k$) проекции определяется выражением (1). Множество вершин k -го уровня состоит из вершин, дополняющих до V множество вершин, включенных во все предшествующие уровни, и нескольких потенциальных подмножеств вершин, число которых дополняет до $C_k(s)$ количество включенных в этот уровень известных вершин. В состав каждого подмножества включим вершины, окружения которых на текущий момент не определены полностью. Дополнительным условием включения вершины в состав подмножества является то, что сумма номера уровня, которому принадлежит подмножество, и минимального номера уровня, на котором эта вершина встречается в явном виде (не в составе потенциального подмножества), не превышает заданного обхвата.

³Заметим, что все полученные здесь графы являются гамильтоновыми непреднамеренно, и соответствующее этому требование в условия генерации в явном виде нами не закладывалось.

В нашем случае последний (3-й) уровень проекции состоит из шести известных вершин, дополняющих число вершин, включенных в предшествующие уровни, до $n = 13$, и шести потенциальных подмножеств, дополняющих число элементов этого уровня до $C_3(3) = 12$. В качестве ракурсной здесь взята вершина 0. Выявлено, что при общем числе ребер в графе $|E| = ns/2 = 24$ остовная проекция определяет лишь 15 из них, остальные 9 ребер предстоит определить в процессе синтеза.

3. Сформируем первоначальный список окружений вершин в графе, в состав которых входят как известные смежные вершины, так и потенциальные подмножества.

4. Используя полученный в п. 3 список окружений и учитывая принятое значение обхвата графа, выстраиваем остальные проекции системы, проводя при этом уточнение потенциальных подмножеств в каждой вновь построенной проекции и внося соответствующие изменения в список окружений графа и в построенные ранее проекции.

5. Задача синтеза графа будет решена, если список окружений его вершин не содержит потенциальных подмножеств. Если же после построения (уточнения) последней из n проекций хотя бы в одно из окружений входит потенциальное подмножество, что соответствует наличию в графе неизвестных ребер, то в одном из потенциальных подмножеств следует произвести подстановку, скорректировав затем в соответствии с п. 4 все остальные проекции и список окружений вершин графа. Заметим при этом, что подстановки, не совместные с определенными заданием условиями, делают и систему проекций несовместной. Это выражается, в частности, в том, что мощности некоторых потенциальных подмножеств в отдельных проекциях системы становятся меньше числа вершин, необходимых для определения соответствующих окружений. В этом случае следует произвести возврат к предшествующей подстановке и выбрать альтернативный в данном потенциальном подмножестве вариант.

В рассматриваемом примере в качестве первоначальной подстановки, не противоречащей заданным условиям синтеза графа, в систему проекций введено ребро, инцидентное вершинам 4 и 15. В последующем пришлось произвести еще две таких подстановки, соединив ребрами вершины 6, 10 и 5, 13.

Таким образом, в процессе синтеза данного регулярного графа потребовалось произвести три не противоречащие заданным свойствам подстановки, обусловившие размещение шести остающихся при этом неизвестными ребер.

Заключение

Формальной основой предложенного в работе подхода служит введенная автором скобочная форма представления графов в виде его проекций. Описаны принципы построения таких проекций и их основные используемые свойства. Даны оценки минимально возможного эксцентриситета ракурсной вершины и минимального числа уровней в проекции регулярного графа заданных степени и порядка, определены аналитические соотношения, связывающие эти параметры с диаметром графа и предельным значением его обхвата.

Задача синтеза регулярного графа с заданными значениями порядка, степени и обхвата сведена к абстрагированному, не требующему геометрического представления графа построению системы проекций, обладающих соответствующими заданным параметрам свойствами. Базовая остовная проекция объединяет в себе все вершины синтезируемого графа, часть которых представлена в явном (безальтернативном) виде, а часть в виде так называемых потенциальных подмножеств, дающих возможность альтернативного выбора из обладающих неполными окружениями вершин. Включение вершин в эти подмножества, их изъятие или выбор (подстановки) регламентирова-

ны определенными в работе свойствами, согласованными с параметрами графа. Дано доказательство свойства, устанавливающего критерии исключения вершины из потенциального подмножества, связанные с размещением этого подмножества в проекции (номером уровня) и с заданным обхватом графа.

Суть излагаемого подхода проиллюстрирована синтезом двух графов одного порядка и степени, но с разными обхватами. При этом аргументированы подстановки, произведенные в процессе решения системы проекций графа. Обобщенное изложение последовательности действий в процессе синтеза дано на примере синтеза графа той же степени, что и ранее рассмотренные, но большего порядка.

Таким образом, в работе впервые предложен подход к детерминированному синтезу регулярных графов с заданными свойствами, которые не ограничиваются рассмотренными здесь и иллюстрирующими подход случаями генерации регулярных графов с минимальным диаметром. В качестве приоритетных могут рассматриваться и другие коммуникационные свойства: наличие гамильтонового цикла или цепи, ограничения на длины альтернативных непересекающихся маршрутов и т. д. Использование данного подхода в решении задач масштабирования систем, в том числе и нерегулярных, тоже выглядит достаточно прозрачным и перспективным. Не вызывает сомнений также и то, что разработка и внедрение аналитических методов решения перечисленных задач в теорию и практику построения отказоустойчивых систем повысит оптимальность, реактивность и предсказуемость последних.

ЛИТЕРАТУРА

1. Valente A. X. C. N., Sarkar A., Stone H. A. 2-Peak and 3-Peak Optimal Complex Networks // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. No. 11.
2. Мелентьев В. А. Формальные основы скобочных образов в теории графов // Труды Второй Междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО'2004. М.: Ин-т проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова, 2004. С. 694–706.
3. Мелентьев В. А. Формальный подход к исследованию структур вычислительных систем // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 167–172.
4. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.