

РЕШЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ω -ЯЗЫКОВ¹

В. Г. Бушков, Н. В. Евтушенко

*Томский государственный университет, г. Томск, Россия***E-mail:** v.bushkov@gmail.com, ninayevtushenko@yahoo.com

Рассмотрена проблема решения параллельного уравнения для ω -языков. В частности, доказано, что, подобно уравнениям для регулярных языков, разрешимое уравнение всегда имеет наибольшее решение, формула которого имеет такой же вид, как и формула наибольшего решения для формальных языков. Показано также, что решение уравнения для ω -регулярных языков сводится к последовательности операций над полуавтоматами.

Ключевые слова: автоматные уравнения, параллельная композиция ω -языков, уравнения для ω -языков, условие Бюхи.

Введение

Ряд задач анализа и синтеза дискретных систем сводится к решению уравнений в алгебре регулярных языков. Как известно, любое разрешимое уравнение имеет наибольшее решение [1], которое может рассматриваться как резервуар, содержащий все возможные решения, интересные с теоретической или практической точек зрения. Для описания поведения реактивных систем используются так называемые ω -регулярные языки [2, 3], которые состоят из слов бесконечной длины и описываются полуавтоматами, использующими условие распознавания Бюхи (Büchi) [4]. Можно показать, что методы решения уравнений для регулярных языков не могут быть напрямую применены к уравнениям для ω -регулярных языков [5], и соответственно представляет интерес задача решения уравнений для таких языков. В данной работе введена операция параллельной (асинхронной) композиции для ω -языков и доказано, что, подобно уравнениям для регулярных языков, разрешимое параллельное уравнение всегда имеет наибольшее решение. Формула для наибольшего решения уравнения над ω -языками имеет такой же вид, как и формула наибольшего решения для формальных языков. Также установлено, что уравнение для ω -регулярных языков можно решать как уравнение для соответствующих полуавтоматов.

1. Основные понятия

Алфавитом Σ называется непустое конечное множество символов, которые будем называть также буквами. *Словом* u в алфавите Σ называется конечная последовательность символов из Σ ; количество букв в слове u называется длиной слова и обозначается $|u|$. Пустое слово, т. е. слово, не содержащее ни одного символа, будем обозначать ε . По определению считается, что длина слова ε равна 0. Как обычно, множество всех конечных слов над алфавитом Σ обозначается Σ^* .

Бесконечным словом или *ω -словом* над алфавитом Σ называется бесконечная последовательность символов из алфавита Σ . Бесконечное слово α может быть представлено как отображение $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ есть множество натуральных

¹Работа частично поддержана программой «У.М.Н.И.К.» Фонда содействия развитию МП НТС (госконтракт № 7450p/10262) и проектом ФЦП (госконтракт № 02.514.12.4002).

чисел. Пусть α есть бесконечное или конечное слово, тогда $\alpha(i)$, где $i \in \mathbb{N}$, обозначает символ на i -й позиции в слове α . Множество всех бесконечных слов над алфавитом Σ будем обозначать Σ^ω .

Символы алфавитов далее обозначаются первыми буквами латинского алфавита, а именно $a, b, \dots$; слова конечной длины обозначаются последними буквами латинского алфавита, а именно $u, v, \dots$; бесконечные слова обозначаются греческими буквами, а именно $\alpha, \beta, \dots$. Подмножество $U \subseteq \Sigma^*$ называется *формальным языком*, или просто *языком*; соответственно подмножество $L \subseteq \Sigma^\omega$ называется ω -*языком*, или *сверхязыком* [6]. Для любых $u \in \Sigma^*$ и $\alpha \in (\Sigma^* \cup \Sigma^\omega)$ *конкатенация* $u \cdot \alpha$ (или просто $u\alpha$) есть такое слово из $(\Sigma^* \cup \Sigma^\omega)$, что $(u\alpha)(i) = u(i)$ для всех $1 \leq i \leq |u|$ и $(u\alpha)(i) = \alpha(i - |u|)$ для всех $i > |u|$. *Конкатенация языков* $U \subseteq \Sigma^*$ и $L \subseteq (\Sigma^* \cup \Sigma^\omega)$ определяется следующим образом: $UL = \{u\alpha \in (\Sigma^* \cup \Sigma^\omega) : u \in U \wedge \alpha \in L\}$. Пусть $U \subseteq \Sigma^*$; тогда ω -*замыканием* множества U называется множество слов $U^\omega = \{\alpha \in \Sigma^\omega : \alpha = u_1 u_2 \dots u_i \dots, u_i \in U \setminus \{\varepsilon\}, i \in \mathbb{N}\}$ из Σ^ω , образованных конкатенацией бесконечного числа слов из $U \setminus \{\varepsilon\}$. По определению, если $U = \{\varepsilon\}$, то $U^\omega = \emptyset$.

Подобно регулярным языкам, ω -регулярные языки можно описать с помощью полуавтоматов, использующих правило распознавания Бюхи.

Полуавтоматом называется пятерка $S = (S, A, s_0, T_S, F_S)$, где A — алфавит, S — конечное непустое множество состояний, s_0 — начальное состояние, $T_S \subseteq S \times A \times S$ — отношение переходов, $F_S \subseteq S$ — множество финальных состояний. Отношение переходов можно распространить на слова конечной длины: в полуавтомате S есть переход из состояния s в состояние s' под действием слова $u \in A^*$, если и только если существует последовательность состояний $s = s_1, s_2, \dots, s_{n+1} = s'$, такая, что $(s_i, u(i), s_{i+1}) \in T_S$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

В данной работе полуавтомат рассматривается как распознаватель бесконечных слов по правилу Бюхи [4]. Для слов конечной длины в полуавтомате справедливы все утверждения из классической теории автоматов.

Пусть $S = (S, A, s_0, T_S, F_S)$ есть полуавтомат и $\alpha \in A^\omega$ есть бесконечное слово. *Обходом полуавтомата* S под действием слова α (или просто α -*обходом*) называется бесконечное слово ρ_α в множестве состояний полуавтомата S , такое, что $\rho_\alpha(1) = s_0$ и для любого $i \in \mathbb{N}$ имеет место $(\rho_\alpha(i), \alpha(i), \rho_\alpha(i+1)) \in T_S$. Согласно определению, полуавтомат S распознает бесконечное слово α , если существует состояние из множества F_S , которое встречается бесконечное число раз в α -обходе полуавтомата S . Язык $L(S)$, распознаваемый полуавтоматом S , или язык полуавтомата S , есть множество всех бесконечных слов, распознаваемых полуавтоматом S . Далее язык $L(S)$ называется просто языком полуавтомата S . Полуавтоматы S и B называются *эквивалентными* ($S \equiv B$), если их языки совпадают. Полуавтомат S называется *редукцией* полуавтомата B ($S \leq B$), если язык полуавтомата S содержится в языке полуавтомата B .

Язык $L \subseteq \Sigma^\omega$ называется ω -*регулярным* [7], если его можно представить в виде объединения конечного числа языков UV^ω , где U и V суть регулярные языки над алфавитом Σ . Иными словами, язык L есть ω -регулярный язык, если существует такое натуральное число n , что $L = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} U_i V_i^\omega$, где U_i и V_i суть регулярные языки над алфавитом Σ , $i = 1, \dots, n$.

Теорема 1 [7]. Язык распознаваем некоторым полуавтоматом, если и только если язык является ω -регулярным.

В работе [7] при доказательстве теоремы 1 показано, что язык любого полуавтомата $S = (S, A, s_0, T_S, F_S)$ можно представить в виде $\bigcup_{s \in F_S} V_{s_0 s} V_{ss}^\omega$, где $V_{ss'} = \{u \in A^* : (s, u, s') \in T_S\}$ есть множество всех слов конечной длины, переводящих полуавтомат S из состояния $s \in S$ в состояние $s' \in S$.

Пусть $S = (S, A, s_0, T_S, F_S)$ есть полуавтомат с ε -переходами [8] и $\alpha \in A^\omega$ есть бесконечное слово. Полуавтомат S с ε -переходами распознает бесконечное слово α , если существует некоторое состояние $s \in F_S$, которое встречается бесконечное число раз при α -обходе полуавтомата S . Язык $L(S)$, распознаваемый полуавтоматом S с ε -переходами, есть множество всех бесконечных слов, распознаваемых полуавтоматом S .

Введем понятие ε -замыкания $\varepsilon\text{-closure}(S)$ полуавтомата S с ε -переходами. Определим отношение $\varepsilon\text{-closure}(T_S)$, положив $(s, a, s') \in \varepsilon\text{-closure}(T_S)$ для $s, s' \in S$ и $a \in A$ тогда и только тогда, когда в полуавтомате S из состояния s в состояние s' можно перейти по последовательности $\varepsilon \dots \varepsilon a \varepsilon \dots \varepsilon$. Полуавтомат $(S, A, s_0, \varepsilon\text{-closure}(T_S), F_S)$ называется ε -замыканием полуавтомата S .

Утверждение 1. Полуавтоматы $\varepsilon\text{-closure}(S)$ и S эквивалентны.

2. Операции над ω -языками

2.1. Операции распространения и ограничения

Для ω -языков операция распространения вводится так же, как для формальных языков. Пусть A и B — непересекающиеся алфавиты и ω -язык L определен над алфавитом A . Рассмотрим отображение $\psi : A^\omega \rightarrow 2^{(A \cup B)^\omega}$, где для $\alpha = a_1 a_2 \dots \in A^\omega$ имеет место $\psi(\alpha) = \{u_1 a_1 u_2 a_2 \dots : u_i \in B^*, i \in \mathbb{N}\}$. Тогда язык $L_{\uparrow B} = \bigcup_{\alpha \in L} \psi(\alpha)$ есть *распространение* ω -языка L на алфавит B , или *B -распространение* ω -языка L , т. е. при B -распространении L перед любым символом любого сверхслова в L можно вставить любое конечное слово в алфавите B .

Пусть L — ω -язык, заданный над алфавитом $(A \cup B)$. Введем понятие *ограничения* $L_{\downarrow A}$ на алфавит A , называемого также *A -ограничением* ω -языка L . Если $L \subseteq (A \cup B)^* B^\omega$, то $L_{\downarrow A} = \emptyset$. Если $L \not\subseteq (A \cup B)^* B^\omega$, то $L_{\downarrow A} = \{h(a_1)h(a_2) \dots : a_1 a_2 \dots \in L \setminus (A \cup B)^* B^\omega\}$, где отображение $h : (A \cup B) \rightarrow A$ определяется как $h(a) = a$ для всех $a \in A$ и $h(a) = \varepsilon$ для всех $a \notin A$. Здесь условие $a_1 a_2 \dots \in L \setminus (A \cup B)^* B^\omega$ гарантирует получение ω -языка в качестве результата операции.

Утверждение 2. Пусть L есть ω -язык над алфавитом $(A \cup B)$. Тогда

$$L_{\downarrow A} = \emptyset \Leftrightarrow L \subseteq (A \cup B)^* B^\omega.$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость. Предположим, что $L \not\subseteq (A \cup B)^* B^\omega$. Тогда существует $\alpha \in L$, которое можно представить в виде $\alpha = u_1 a_1 u_2 a_2 \dots u_i a_i \dots$, где $u_i \in B^*, a_i \in A, i \in \mathbb{N}$. Из определения операции ограничения следует, что $h(u_1)h(a_1)h(u_2)h(a_2) \dots h(u_i)h(a_i) \dots = a_1 a_2 \dots a_i \dots \in L_{\downarrow A}$ и $L_{\downarrow A} \neq \emptyset$. ■

Операция ограничения обратна операции распространения, поэтому верно

Утверждение 3. Пусть A и B — непересекающиеся алфавиты и $L \subseteq A^\omega$. Тогда $(L_{\uparrow B})_{\downarrow A} = L$.

Утверждение 4. Пусть $L_1 \subseteq (A \cup B)^\omega$ и $L_2 \subseteq (A \cup B)^\omega$ суть ω -языки, причем $(L_{2\downarrow A})_{\uparrow B} = L_2$. Тогда имеет место $(L_1 \cap L_2)_{\downarrow A} = L_{1\downarrow A} \cap L_{2\downarrow A}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\alpha \in (L_1 \cap L_2)_{\downarrow A}$, т. е. существует такое $\gamma \in (L_1 \cap L_2)$, что $h(\gamma) = \alpha$. Тогда $\alpha = h(\gamma) \in L_{1\downarrow A}$ и $\alpha = h(\gamma) \in L_{2\downarrow A}$. Следовательно, $\alpha \in L_{1\downarrow A} \cap L_{2\downarrow A}$.

Достаточность. Пусть $\alpha = a_1 a_2 \dots a_i \dots \in L_{1\downarrow A} \cap L_{2\downarrow A}$, т. е. $\alpha \in L_{1\downarrow A}$ и $\alpha \in L_{2\downarrow A}$. Поскольку $\alpha \in L_{1\downarrow A}$, существует слово $\gamma = u_1 a_1 u_2 a_2 \dots u_i a_i \dots \in L_1$, в котором $u_i \in B^*$, $i \in \mathbb{N}$, такое, что $h(\gamma) = \alpha$. По определению распространения множество $\psi(\alpha)$ содержит слово γ . Из $\alpha \in L_{2\downarrow A}$ следует $\psi(\alpha) \subseteq (L_{2\downarrow A})_{\uparrow B} = L_2$, поэтому $\gamma \in L_2$. Поскольку $\gamma \in L_1$ и $\gamma \in L_2$, верно $\gamma \in (L_1 \cap L_2)$. Следовательно, $\alpha = h(\gamma) \in (L_1 \cap L_2)_{\downarrow A}$. ■

2.2. Параллельная композиция

Рассмотрим попарно непересекающиеся множества I, V, U и O и ω -языки $L_1 \subseteq (I \cup V \cup U)^\omega$ и $L_2 \subseteq (O \cup V \cup U)^\omega$. Положим $E = (I \cup V \cup O)$; тогда *параллельной композицией* ω -языков L_1 и L_2 называется ω -язык $L_1 \diamond_E L_2 = (L_{1\uparrow O} \cap L_{2\uparrow I})_{\downarrow E}$.

Параллельная композиция подразумевает, что компоненты взаимодействуют посредством общих действий $(U \cup V)$, т. е. действие из $(U \cup V)$ выполняется тогда и только тогда, когда обе компоненты готовы выполнить это действие, в то время как действия из $(I \cup O)$ выполняются независимо от другой компоненты. Параллельная композиция отвечает асинхронному взаимодействию систем, т. е. взаимодействию, допускающему произвольные задержки по времени.

Из определения параллельной композиции непосредственно следует

Утверждение 5. Если $L'_2 \subseteq L_2$, то $L_1 \diamond_E L'_2 \subseteq L_1 \diamond_E L_2$.

3. Уравнения для ω -языков

Пусть I, U, V, O — непересекающиеся алфавиты, $C \subseteq (I \cup V \cup U)^\omega$ и $S \subseteq (I \cup O \cup V)^\omega$ — ω -языки, $E = I \cup O \cup V$ и $H = U \cup O \cup V$. Выражение вида $C \diamond_E X = S$, в котором неизвестная компонента X есть ω -язык в алфавите H , называется *уравнением*.

Как обычно, ω -язык $B \subseteq H^\omega$ называется *решением* уравнения $C \diamond_E X = S$, если справедливо $C \diamond_E B = S$. Это решение *наибольшее*, если в нём содержится любое решение данного уравнения. Уравнение $C \diamond_E X = S$ называется разрешимым, если для него существует решение.

Теорема 2. Разрешимое уравнение $C \diamond_E X = S$ для ω -языков имеет наибольшее решение, и это решение есть ω -язык $\overline{C \diamond_H \bar{S}}$, где $\bar{S}$ есть дополнение языка S .

Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $\alpha \in H^\omega$ и покажем, что $C \diamond_E \{\alpha\} \subseteq S \Leftrightarrow \alpha \in \overline{C \diamond_H \bar{S}}$. Имеем

$$\begin{aligned} C \diamond_E \{\alpha\} \subseteq S &\Leftrightarrow \\ (C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I})_{\downarrow E} \cap \bar{S} &= \emptyset \Leftrightarrow \text{ввиду } \bar{S} = (\bar{S}_{\uparrow U})_{\downarrow E} \text{ по утверждению 3/} \\ (C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I})_{\downarrow E} \cap (\bar{S}_{\uparrow U})_{\downarrow E} &= \emptyset \Leftrightarrow \text{по утверждению 4 ввиду } ((\bar{S}_{\uparrow U})_{\downarrow E})_{\uparrow U} = \bar{S}_{\uparrow U}/ \\ (C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \bar{S}_{\uparrow U})_{\downarrow E} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Согласно утверждению 2, последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \bar{S}_{\uparrow U} \subseteq (O \cup V \cup U \cup I)^* U^\omega$. Если допустить, что $\emptyset \neq C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \bar{S}_{\uparrow U} \subseteq (O \cup V \cup U \cup I)^* U^\omega$, то в $\bar{S}_{\uparrow U}$ найдётся слово из $(O \cup V \cup U \cup I)^* U^\omega$, что возможно лишь тогда, когда в $\bar{S}$ есть слово из $(O \cup V \cup U \cup I)^* U^\omega$, а это не так. Следовательно, $(C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \bar{S}_{\uparrow U})_{\downarrow E} = \emptyset \Leftrightarrow C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \bar{S}_{\uparrow U} = \emptyset$.

Если для $H = U \cup V \cup O$ допустить, что $(C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \bar{S}_{\uparrow U})_{\downarrow H} = \emptyset$ и $C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \bar{S}_{\uparrow U} \neq \emptyset$, то ввиду утверждения 2 $\emptyset \neq C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \bar{S}_{\uparrow U} \subseteq (O \cup V \cup U \cup I)^* I^\omega$

и в $\{\alpha\}_{\uparrow I}$ найдётся слово из $(O \cup V \cup U \cup I)^* I^\omega$, что невозможно. Таким образом, $C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \overline{S}_{\uparrow U} = \emptyset \Leftrightarrow (C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \overline{S}_{\uparrow U})_{\downarrow H} = \emptyset$. Кроме того,

$$\begin{aligned} (C_{\uparrow O} \cap \{\alpha\}_{\uparrow I} \cap \overline{S}_{\uparrow U})_{\downarrow H} = \emptyset &\Leftrightarrow \text{/по утверждению 4 ввиду } ((\{\alpha\}_{\uparrow I})_{\downarrow H})_{\uparrow I} = \{\alpha\}_{\uparrow I}/ \\ (\{\alpha\}_{\uparrow I})_{\downarrow H} \cap (C_{\uparrow O} \cap \overline{S}_{\uparrow U})_{\downarrow H} = \emptyset &\Leftrightarrow \text{/ввиду } \{\alpha\} = (\{\alpha\}_{\uparrow I})_{\downarrow H} \text{ по утверждению 3/} \\ \{\alpha\} \cap (C_{\uparrow O} \cap \overline{S}_{\uparrow U})_{\downarrow H} = \emptyset &\Leftrightarrow \alpha \in \overline{(C_{\uparrow O} \cap \overline{S}_{\uparrow U})_{\downarrow H}} \Leftrightarrow \alpha \in \overline{C \diamond_H \overline{S}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $C \diamond_E \{\alpha\} \subseteq S \Leftrightarrow \alpha \in \overline{C \diamond_H \overline{S}}$.

Рассмотрим решение B разрешимого уравнения $C \diamond_E X = S$ и слово $\alpha \in B$. Поскольку $C \diamond_E B = S$, то $C \diamond_E \{\alpha\} \subseteq S$ (утверждение 5) и, следовательно, $\alpha \in \overline{C \diamond_H \overline{S}}$. Таким образом, $B \subseteq \overline{C \diamond_H \overline{S}}$, т.е. любое решение уравнения $C \diamond_E X = S$ содержится в $\overline{C \diamond_H \overline{S}}$. Поскольку $B \subseteq \overline{C \diamond_H \overline{S}}$ и $C \diamond_E B = S$, то $S = C \diamond_E B \subseteq C \diamond_E \overline{C \diamond_H \overline{S}}$ (утверждение 5). С другой стороны, для любого слова $\alpha \in \overline{C \diamond_H \overline{S}}$ имеет место $C \diamond_E \{\alpha\} \subseteq S$, т.е. $C \diamond_E \overline{C \diamond_H \overline{S}} \subseteq S$. Следовательно, $S \subseteq C \diamond_E \overline{C \diamond_H \overline{S}} \subseteq S$ и $\overline{C \diamond_H \overline{S}}$ есть решение и, значит, наибольшее решение уравнения $C \diamond_E X = S$. ■

Как и в случае формальных языков, любое решение уравнения $C \diamond_E X = S$ содержится в языке $\overline{C \diamond_H \overline{S}}$, однако не каждый язык, содержащийся в $\overline{C \diamond_H \overline{S}}$, является решением уравнения. Далее покажем, каким образом решение уравнения для ω -регулярных языков можно свести к соответствующим операциям над полуавтоматами.

4. Операции над полуавтоматами, распознающими ω -регулярные языки

4.1. Операция ограничения

Пусть $S = (S, A \cup B, s_0, T_S, F_S)$ — полуавтомат. Ограничением полуавтомата S на алфавит A называется полуавтомат $S_{\downarrow A}$, который может быть получен из S заменой для каждого состояния $s \in S$ и каждого символа $b \in B \setminus A$ всех переходов вида (s, b, s') на переходы (s, ε, s') и взятием ε -замыкания полученного полуавтомата с ε -переходами, которое эквивалентно полученному полуавтомату с ε -переходами (согласно утверждению 1).

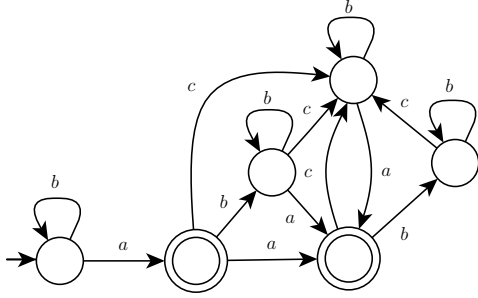
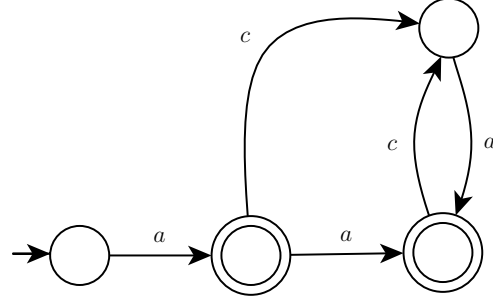
Утверждение 6. Ограничение полуавтомата $S = (S, A \cup B, s_0, T_S, F_S)$ на алфавит A распознает язык $\bigcup_{s \in F_S} V_{s_0 s \downarrow A} (V_{ss \downarrow A})^\omega$, который является A -ограничением языка $L(S)$.

Доказательство. Согласно [7], $L(S) = \bigcup_{s \in F_S} V_{s_0 s} V_{ss}^\omega$, поэтому ввиду утверждения 1 $L(S_{\downarrow A}) = \varepsilon\text{-closure } L(S)_{\downarrow A} = L(S)_{\downarrow A} = \bigcup_{s \in F_S} V_{s_0 s \downarrow A} (V_{ss \downarrow A})^\omega$. ■

4.2. Операция распространения

Пусть $S = (S, A, s_0, T_S, F_S)$ — полуавтомат и A и B — непересекающиеся алфавиты. Тогда распространением полуавтомата S на алфавит B будет полуавтомат $S_{\uparrow B}$, который может быть получен из S посредством следующей процедуры. Для каждого состояния $s \in S \setminus F_S$ и каждого символа $b \in B$ добавляется петля (s, b, s) ; для каждого состояния $s \in F_S$ добавляются нефинальное состояние s' , переход (s, b, s') и петля (s', b, s') для каждого символа $b \in B$, а также для всех $s'' \in S$ и $a \in A$, таких, что $(s, a, s'') \in T_S$ для некоторого $s \in S$, добавляется по переходу (s', a, s'') .

На рис. 1 показано распространение на алфавит $B = \{b\}$ полуавтомата S , заданного над алфавитом $A = \{a, c\}$, представленного на рис. 2.

Рис. 1. Полуавтомат $S_{\uparrow B}$ Рис. 2. Полуавтомат S

Добавление петель в финальные состояния привело бы к появлению в языке $L(S_{\uparrow B})$ бесконечных слов из $(A \cup B)^* B^\omega$, что означает возможность функционирования полуавтомата $S_{\uparrow B}$ в композиции с другим без участия второго, что недопустимо в реактивных системах.

Утверждение 7. Распространение полуавтомата $S = (S, A, s_0, T_S, F_S)$ на алфавит B распознает язык $\bigcup_{s \in F_S} V_{s_0 s \uparrow B}((V_{ss} \setminus \{\varepsilon\})_{\uparrow B})^\omega$, который является B -распространением языка $L(S)$.

Доказательство. Согласно [7], $L(S) = \bigcup_{s \in F_S} V_{s_0 s} V_{ss}^\omega$, поэтому $L(S_{\uparrow B}) = L(S)_{\uparrow B} = \bigcup_{s \in F_S} V_{s_0 s \uparrow B} (V_{ss \uparrow B})^\omega$. ■

4.3. Операция параллельной композиции

Ω -Пересечение $S_1 \cap S_2$ полуавтоматов $S_1 = (S_1, A, s_{0,1}, T_{S_1}, F_{S_1})$ и $S_2 = (S_2, A, s_{0,2}, T_{S_2}, F_{S_2})$ есть полуавтомат $S = (S, A, s_0, T_S, F_S)$ [7], в котором $S = S_1 \times S_2 \times \{1, 2\}$, $s_0 = (s_{0,1}, s_{0,2}, 1)$, $F_S = S_1 \times F_{S_2} \times \{2\}$, и отношение переходов определяется по следующим правилам:

$$\begin{aligned} ((s_1, s_2, 1), a, (s'_1, s'_2, 1)) &\in T_S, \text{ если } (s_1, a, s'_1) \in T_{S_1}, (s_2, a, s'_2) \in T_{S_2}, \text{ и } s_1 \notin F_{S_1}; \\ ((s_1, s_2, 1), a, (s'_1, s'_2, 2)) &\in T_S, \text{ если } (s_1, a, s'_1) \in T_{S_1}, (s_2, a, s'_2) \in T_{S_2}, \text{ и } s_1 \in F_{S_1}; \\ ((s_1, s_2, 2), a, (s'_1, s'_2, 2)) &\in T_S, \text{ если } (s_1, a, s'_1) \in T_{S_1}, (s_2, a, s'_2) \in T_{S_2}, \text{ и } s_2 \notin F_{S_2}; \\ ((s_1, s_2, 2), a, (s'_1, s'_2, 1)) &\in T_S, \text{ если } (s_1, a, s'_1) \in T_{S_1}, (s_2, a, s'_2) \in T_{S_2}, \text{ и } s_2 \in F_{S_2}. \end{aligned}$$

Согласно [7], пересечение $S_1 \cap S_2$ полуавтоматов S_1 и S_2 распознает пересечение ω -языков полуавтоматов S_1 и S_2 .

Параллельной композицией полуавтоматов $S_1 = (S_1, I \cup V \cup U, s_{0,1}, T_{S_1}, F_{S_1})$ и $S_2 = (S_2, O \cup V \cup U, s_{0,2}, T_{S_2}, F_{S_2})$ называется полуавтомат $S_1 \diamond_E S_2 \equiv (S_{1 \uparrow O} \cap S_{2 \uparrow I})_{\downarrow E}$, где $E = (I \cup V \cup O)$.

Утверждение 8. Параллельная композиция полуавтоматов распознает параллельную композицию их ω -регулярных языков.

Доказательство. Согласно утверждению 7, полуавтоматы $S_{1 \uparrow O}$ и $S_{2 \uparrow I}$ распознают языки $L(S_1)_{\uparrow O}$ и $L(S_2)_{\uparrow I}$ соответственно. Их Ω -пересечение $S_{1 \uparrow O} \cap S_{2 \uparrow I}$ распознает язык $L(S_1)_{\uparrow O} \cap L(S_2)_{\uparrow I}$ [7]. По утверждению 6 ограничение $(S_{1 \uparrow O} \cap S_{2 \uparrow I})_{\downarrow E}$ распознает язык $(L(S_1)_{\uparrow O} \cap L(S_2)_{\uparrow I})_{\downarrow E}$, который является параллельной композицией соответствующих ω -регулярных языков. ■

Далее через $\bar{S}$ обозначается полуавтомат, который распознает дополнение ω -языка полуавтомата S . Известно, что в случае ω -регулярных языков полуавтомат $\bar{S}$ строится значительно сложнее, чем в случае формальных языков [7].

Пусть I, U, V, O — непересекающиеся алфавиты, $C \subseteq (IUVUU)^\omega$ и $S \subseteq (IUOUV)^\omega$ — ω -языки, $E = I \cup O \cup V$, $H = U \cup O \cup V$, C и S суть полуавтоматы, распознающие ω -языки.

Теорема 3. Наибольшее решение разрешимого уравнения $C \diamond_E X = S$ для ω -регулярных языков есть ω -регулярный язык, распознаваемый полуавтоматом $\overline{C \diamond_H \bar{S}}$.

Доказательство. Полуавтомат $\bar{S}$ распознает ω -регулярный язык $\overline{L(S)} = \bar{S}$ [7]. По утверждению 8 полуавтомат $\overline{C \diamond_H \bar{S}}$ распознает параллельную композицию $C \diamond_H \bar{S}$. Полуавтомат $\overline{C \diamond_H \bar{S}}$ распознает ω -регулярный язык $\overline{C \diamond_H \bar{S}}$, который является наибольшим решением уравнения $C \diamond_E X = S$ для ω -регулярных языков. ■

Заметим, что так же, как для регулярных языков, на основании теоремы 3 могут быть разработаны алгоритмы решения соответствующего уравнения для ω -регулярных языков; однако необходимо иметь в виду, что операция построения полуавтомата, распознающего дополнение ω -регулярного языка, реализуется достаточно сложным алгоритмом.

Заключение

В данной работе введена операция параллельной композиции ω -языков и рассмотрена проблема решения параллельных уравнений. Доказано, что разрешимое уравнение всегда имеет наибольшее решение и вид формулы наибольшего решения для ω -языков совпадает с видом такой формулы при решении уравнений для формальных языков. Показано также, что в случае ω -регулярных языков такое решение может быть выражено аналогичной формулой, где вместо языков стоят полуавтоматы, их распознающие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yevtushenko N. V., Villa T., Brayton R. K., et al. Solution of Parallel Language Equations for Logic Synthesis // Proceedings of ICCAD 2001, San Jose. 2001. P. 103–110.
2. Wang G., Mishchenko A., Brayton R. K., et al. Sequential synthesis with co-Buchi specifications // ERL Technical Report, EECS Dept., UC Berkeley, April 2006. 6 p.
3. Thistle J. G., Wonham W. M. Supervision of infinite behavior of discrete-event systems // SIAM, Control and Optimization. 1994. V. 32. No. 4. P. 1098–1113.
4. Buchi J. R. On a decision method in restricted second order arithmetic // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1960. P. 66–92.
5. Бушков В. Г., Евтушенко Н. В. Решение параллельных уравнений для ω -регулярных языков // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2009. № 1. С. 6–7.
6. Трахтенброт Б. А., Барздин Я. М. Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970. 400 с.
7. Mukund M. Finite-state automata on infinite inputs // Tutorial talk, NSTCS 6, Banasthali, Rajasthan, India, August 1996. 32 p.
8. Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М.: Вильямс, 2008. 528 с.