

**ТОЧЕЧНЫЕ И СИЛЬНО ТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ
НА ПОЛУРЕШЁТКЕ¹**

Н. Г. Парватов

*Томский государственный университет, г. Томск, Россия***E-mail:** parvatov@mail.tsu.ru

Рассматриваются основные классы квазимонотонных функций на полурешётке, представляющие интерес в связи с проблемами синтеза асинхронных дискретных управляющих систем. Подробно рассматриваются классы точечных и сильно точечных функций на полурешётке.

Ключевые слова: *полурешётка, квазимонотонные функции, слабо существенные квазимонотонные функции, монотонные функции, точечные функции, минимальные точечные функции, сильно точечные функции.*

Введение

Квазимонотонные функции на верхней полурешётке введены Г. П. Агибаловым для описания динамического поведения дискретных управляющих систем, асинхронно изменяющиеся (в разной степени определённые) состояния которых приводят к состязаниям [1]. В его монографии [2] состояния таких систем, упорядоченные по степени неопределённости, рассматриваются как элементы верхней полурешётки. При этом функции состояний и выходов системы оказываются монотонными, поскольку при уточнении входного состояния внутренние и выходные состояния системы могут изменяться лишь в сторону уточнения. Среди монотонных функций выделяются те, которые не допускают дальнейшего монотонного уточнения. Их называют *минимальными точечными*. Также в отдельный класс выделяют функции, не обязательно монотонные, но допускающие монотонное уточнение. Их называют *квазимонотонными* и используют при формулировании задачи синтеза, а также на начальных этапах её решения. Подобная задача может состоять в необходимости создания управляющей системы, у которой функции состояний и выходов уточняют заранее заданные квазимонотонные функции. Поскольку квазимонотонная функция всегда уточняется некоторой минимальной точечной, задачи синтеза асинхронных дискретных управляющих систем сводятся к задачам реализации минимальных точечных функций в том или ином базисе, в зависимости от ситуации квазимонотонном, монотонном или минимальном точечном. В связи со сказанным заслуживают изучения квазимонотонные, монотонные и минимальные точечные функции на полурешётках. Для них актуальны проблемы полноты и выразимости, проблемы формульного представления, проблемы эффективного задания их классов и другие. Проблемы эффективного задания классов квазимонотонных и монотонных функций рассматривались автором в работе [3], проблемы полноты и выразимости — в [4, 5]. В данной работе наряду с квазимонотонными, монотонными и минимальными точечными функциями изучаются столь же важные своими приложениями к синтезу дискретных управляющих систем точечные и сильно

¹Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № П11010).

точечные функции, рассматриваются проблемы эффективного задания их классов, а также проблемы формульного представления функций в некоторых из классов.

1. Полурешётки и полурешёточные функции

Верхняя полурешётка. Пусть в конечном множестве L , упорядоченном отношением $\leq$, для любых элементов a и b имеется точная верхняя грань $a + b$, а точная нижняя грань $a \cdot b$ существует не для любых элементов a и b . Иными словами, множество L вместе с указанным упорядочением является верхней полурешёткой, но не решёткой [6]. В соответствии с [2] полурешётка называется *точечной*, если в ней каждый элемент является суммой некоторых минимальных элементов.

Наибольший элемент верхней полурешётки будем обозначать так: $\top$. Удобно верхнюю полурешётку L (это касается и любой другой верхней полурешётки) считать вложенной в решётку $L' = L \cup \{\perp\}$ с наименьшим элементом $\perp$. Это позволяет пользоваться произведениями ab для любых элементов a и b из решётки L' (в частности, для любых элементов a и b из полурешётки L). В этом случае отсутствие произведения в полурешётке L означает, что оно принимает наименьшее значение $\perp$ в решётке L' . Рассмотрим далее некоторые важные конструкции полурешёток, представляющие значительный интерес в связи с приложениями к синтезу дискретных управляющих систем с заданным динамическим поведением.

Полурешётки наборов и функций. Отношение порядка $\leq$, определённое в полурешётке L , переносится на наборы из множества L^n естественным образом — покомпонентно, так, что выполнение неравенства $a \leq b$ для наборов $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ означает выполнение всевозможных покомпонентных неравенств $a_i \leq b_i$ при $1 \leq i \leq n$. Таким образом множество L^n становится полурешёткой с покомпонентными сложением и умножением.

Полурешёточное упорядочение $\leq$ множества L переносится и на функции $f : L^n \rightarrow L$, множество которых при всевозможных натуральных n обозначается через P_L . При этом неравенство $f \leq g$ для функций f и g , зависящих от одинакового числа переменных, означает, что для любого набора a значений их переменных выполняется неравенство $f(a) \leq g(a)$. В этом случае функция f называется *минорантой* функции g , а функция g — *мажорантой* функции f . Множество функций из P_L , зависящих от n переменных, становится таким образом полурешёткой, в которой сумма $f + g$ функций f и g определена соотношением

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

а произведение $f \cdot g$ определено, если отличны от $\perp$ (то есть определены в L) все значения

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

где x — произвольный набор из множества L^n .

Полурешётка подмножеств. Для заданного конечного множества E полурешётка всех его непустых подмножеств, упорядоченных включением, обозначается через $\tilde{E}$. Точные верхние и нижние грани её элементов — подмножеств множества E суть объединения и пересечения этих подмножеств. Интересуясь данной полурешёткой с точностью до изоморфизма (то есть с точностью до обозначений), отождествим одноэлементные подмножества с их элементами, после чего будем использовать (из соображений единообразия обозначений) знаки $\leq, +, \cdot, \top$ вместо $\subseteq, \cup, \cap, E$ для обозначения её упорядочения, операций взятия точной верхней и нижней граней, наибольше-

го элемента. Таким образом, множество E оказывается вложенным в полурешётку $\tilde{E}$ в качестве множества её минимальных элементов. Важной является также

Полурешётка интервалов решётки. Пусть теперь конечное непустое множество E является решёткой с упорядочением $\preceq$, а также с операциями $\vee$ и $\wedge$ (называемыми дизъюнкцией и конъюнкцией) для взятия точных верхних и нижних граней. Для произвольных элементов a и b этой решётки, таких, что $a \preceq b$, подмножества

$$[a, b] = \{x : a \preceq x \preceq b\}$$

называются её *интервалами*. Их множество, обозначаемое далее $\text{in}(E, \preceq)$, упорядоченное включением, является верхней полурешёткой. Это — *полурешётка интервалов решётки* $(E, \preceq)$. Придерживаясь введённой традиции, для обозначения упорядочения в этой полурешётке будем использовать знак $\leq$ (вместо включения $\subseteq$), а операции взятия точных верхних и нижних граней будем обозначать соответственно суммой $+$ и произведением $\cdot$ (хотя произведения совпадают с пересечениями, когда определены). Одноэлементные интервалы будем отождествлять с их элементами (так, что для любого элемента a из E выполняется равенство $[a, a] = a$) и тогда множество E будем считать вложенным в полурешётку $(\text{in}(E, \preceq), \leq)$ интервалов решётки $(E, \preceq)$ в качестве множества минимальных элементов. Таким образом, в этой полурешётке для интервалов $[a, b]$ и $[c, d]$ неравенство $[a, b] \leq [c, d]$ означает совместное выполнение соотношений $c \preceq a$ и $b \preceq d$. Суммой $[a, b] + [c, d]$ является интервал $[a \wedge c, b \vee d]$, а произведение $[a, b] \cdot [c, d]$ определено лишь при выполнении неравенств $a \vee c \preceq b \wedge d$ и совпадает тогда с интервалом $[a \vee c, b \wedge d]$.

Отношение порядка $\preceq$, а также операции дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$ для взятия точных верхних и нижних граней, определённые в решётке $(E, \preceq)$, переносятся на её интервалы покомпонентно так, что для интервалов $[a, b]$ и $[c, d]$ из множества $\text{in}(E, \preceq)$ неравенство $[a, b] \preceq [c, d]$ означает выполнение соотношений $a \preceq c$ и $b \preceq d$, а конъюнкцией и дизъюнкцией тех же интервалов являются соответствующие интервалы $[a \wedge c, b \wedge d]$ и $[a \vee c, b \vee d]$. Таким путём множество $\text{in}(E, \preceq)$ интервалов решётки $(E, \preceq)$ становится ещё и решёткой с упорядочением $\preceq$, а также с дизъюнкцией $\vee$ и конъюнкцией $\wedge$ для взятия точных верхних и нижних граней. Это — *решётка интервалов решётки* $(E, \preceq)$. Очевидно, всякая решётка вложена в качестве подрешётки в свою решётку интервалов, а та вложена изоморфно во вторую декартову степень первой.

Итак, на множестве $\text{in}(E, \preceq)$ интервалов решётки $(E, \preceq)$ оказываются определёнными две алгебраические системы, которые следует тщательно различать друг от друга. Эти системы суть полурешётка интервалов с упорядочением $\leq$, сложением и умножением для взятия точных верхних и нижних граней, а также решётка интервалов с упорядочением $\preceq$, дизъюнкцией и конъюнкцией для взятия точных верхних и нижних граней.

В наиболее важном для приложений случае множество E совпадает с множеством E_k чисел $0, \dots, k-1$, упорядоченных отношением $\preceq$ линейно, так: $0 \preceq 1 \preceq \dots \preceq k-1$. Полурешётку интервалов (как и их множество) в этом случае договоримся обозначать через $\hat{E}_k$. Отметим также, что полурешётка интервалов линейно упорядоченного двухэлементного множества E совпадает с полурешёткой $\tilde{E}$ его непустых подмножеств. В частности, $\hat{E}_2 = \tilde{E}_2 = \{0, 1, \top\}$.

2. Монотонные, квазимонотонные и слабо существенные функции на полурешётке

Наиболее важными для приложений являются классы монотонных и квазимонотонных, а также слабо существенных квазимонотонных и монотонных функций.

Функции из P_L , сохраняющие определённое в верхней полурешётке L отношение порядка $\leq$, называются *монотонными*. Они составляют клон (замкнутый операциями суперпозиции из [7–9] класс, содержащий все селекторные функции, тождественно равные некоторому своему аргументу), обозначаемый через M_L . Функция из P_L , имеющая монотонную миноранту, называется *квазимонотонной*. Клон квазимонотонных функций на полурешётке L обозначается через Q_L . Функции из P_L , обладающие монотонными минорантами, существенно зависящими не более чем от одной переменной, называются *слабо существенными квазимонотонными* (на полурешётке L). Их клон обозначается через Φ_L . Проблемы эффективного описания клонов M_L, Q_L, Φ_L и $M_L \cap \Phi_L$ посредством предикатов изучались в работе [3], где для каждого из этих клонов найдено так называемое и-описание — множество предикатов, порождающее все инвариантные предикаты клона при помощи конъюнкции, проектирования и подстановок переменных. Одновременно с этим установлены условия, при которых частичная функция имеет продолжение в этих клонах. В том числе в [3] установлена конечная порождаемость этих клонов. Так, конечная порождаемость клонов M_L и Q_L объясняется с использованием результатов работы [10] наличием в них мажоритарной функции

$$m(x_1, \dots, x_{q(L)+1}) = \prod_{i=1}^{q(L)+1} (x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_{q(L)+1}),$$

зависящей от $(q(L)+1)$ переменных, где $q(L)$ — максимальная мощность подмножества полурешётки L , не ограниченного снизу и минимального по включению с этим свойством. (Пользуясь случаем, упомянем работу [11], ключевую о клонах с мажоритарной функцией.) Конечная порождаемость остальных клонов объясняется с использованием критериев из [12, 13]. В [4] решены проблемы полноты в классах квазимонотонных и монотонных функций на полурешётке $\tilde{E}_2$, а также проблема выразимости минимальных точечных функций в классе монотонных функций на той же полурешётке. В [5] решена проблема полноты в классе квазимонотонных функций на произвольной конечной полурешётке при суперпозиции со слабо существенными квазимонотонными функциями.

3. Точечные функции

Важный своими приложениями класс составляют рассматриваемые далее точечные функции на полурешётке.

Точечность. Для любой n -местной монотонной функции f из класса M_L и любого набора a из множества L^n выполняется соотношение

$$f(a) \geq \sum f(a'), \quad (1)$$

где суммирование ведётся по всем минимальным наборам a' полурешётки L^n , таким, что $a' \leq a$. Если для какого-то набора a записанное неравенство выполняется строго, то говорят о *состязании* функции f на этом наборе. В связи с проблемой синтеза дискретных управляющих систем с динамическим поведением представляют интерес функции без состязаний. Такие функции в работах Г.П. Агibalова названы *точечными*, и мы будем придерживаться этой терминологии. Представляют интерес также

точечные функции, сохраняющие множество $E = \min(L, \leq)$ минимальных элементов полурешётки L , то есть принимающие значения из множества E на наборах, составленных из элементов этого множества. Такие функции называются *минимальными точечными*. Они являются минимальными по отношению $\leq$ среди точечных функций, что согласуется с их названием, а также являются минимальными среди монотонных и среди квазимонотонных функций. Договоримся обозначать через T_L класс точечных функций и через $\min T_L$ — класс минимальных точечных функций на полурешётке L .

Точечная функция из T_L однозначно определяется своими значениями на минимальных наборах области определения, то есть на наборах из множества E^n , где n — число аргументов функции. При этом значения n -местной функции f из T_L можно найти, зная значения её ограничения $f' : E^n \rightarrow L$ (такого, что $f'(a) = f(a)$ для любого набора a из множества E^n). Это можно сделать, воспользовавшись методом точечного продолжения из [2], по формуле (1), заменив в ней неравенство равенством. В описанной ситуации функция f из T_L называется *точечным продолжением* функции f' . Эти две функции однозначно определяют друг друга, и для них принято использовать одинаковые обозначения (опуская штрих в записи f'). В частности, одними и теми же буквами обозначаются минимальные точечные функции из множества $\min T_L$ и их ограничения из множества P_E .

Точечные продолжения функций многозначной логики уже возникали в нашем рассмотрении при определении решётки интервалов, когда операции дизъюнкции и конъюнкции, сначала определённые в решётке $(E, \preceq)$, впоследствии были продолжены на полурешётку $\text{in}(E, \preceq)$, причём точечным образом, что легко проверяется. Эти операции, как и любые другие, определённые на множестве E , продолжают методом точечного расширения на любую полурешётку с множеством минимальных элементов E , например на полурешётку $\tilde{E}$, а не только на полурешётку интервалов. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Для любого натурального n множество n -местных точечных функций на полурешётке L замкнуто операцией сложения, то есть является верхней полурешёткой с упорядочением $\leq$. Эта полурешётка точечная, если полурешётка L точечная.

Доказательство. Обозначим через h сумму n -местных точечных функций f и g . Тогда для любого набора a из множества L^n выполняются равенства

$$h(a) = f(a) + g(a) = \sum f(x) + \sum g(x) = \sum (f(x) + g(x)) = \sum h(x),$$

в которых каждое суммирование ведётся по всем наборам x из E^n , таким, что $x \leq a$. При этом первое и последнее равенства имеют место в силу определения функции h , второе — в силу точечности функций f и g , третье — в силу коммутативности сложения в полурешётке. Таким образом, n -местные точечные функции действительно составляют верхнюю полурешётку. Докажем, что эта полурешётка точечная, предположив, что точечной является полурешётка L . Иными словами, следует доказать, что для любой n -местной функции f из рассматриваемой полурешётки имеет место равенство

$$f = \sum g,$$

где суммирование ведётся по всем n -местным минимальным точечным функциям g , таким, что $g \leq f$. Записанное равенство равносильно системе равенств $f(a) = \sum g(a)$ с теми же функциями g , выполняющихся для всех наборов a из множества L^n . В силу точечности функции f и функции $\sum g$ достаточно проверить выполнение этих равенств лишь на наборах a из множества E^n . Но такие равенства действительно имеют

место, поскольку полурешётка L точечная и для любого набора a из множества E^n среди значений $g(a)$ присутствуют всевозможные элементы из множества E , такие, что $g(a) \leq f(a)$. ■

Тесты точечности. Установим теперь тесты точечности, чтобы в дальнейшем с их использованием получить быстрый алгоритм (схему из функциональных элементов) распознавания точечности заданной векторно функции и построить пример замкнутого класса точечных функций.

Отметим, что класс точечных функций инвариантен — замкнут операциями подстановки констант, введения и удаления фиктивных переменных. Несложная проверка этого будет выполнена позднее — при доказательстве леммы 1. Именно это свойство (в несколько усиленном виде) позволяет получить далее тест точечности. Понадобятся следующие обозначения. Для n -местной функции f , натурального числа m , такого, что $1 \leq m \leq n$, и набора $a = (a_1, \dots, a_m)$ из множества L^m обозначим через f_a и f^a соответствующие функции

$$f(a_1, \dots, a_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \text{ и } f(x_1, \dots, x_{n-m}, a_1, \dots, a_m),$$

полученные, как видно, последовательной подстановкой констант $a_1, \dots, a_m$ на места первых и соответственно последних m переменных функции f . Имеет место

Лемма 1. Пусть f — n -местная функция из P_L и $1 \leq m < n$. Функция f тогда и только тогда точечная, когда точечными являются функции f_x и f^b для всех наборов x из E^m и b из L^{n-m} .

В этой лемме по-прежнему $E = \min(L)$ — множество минимальных элементов полурешётки L .

Доказательство. Необходимость следует из нижеприведённых соотношений, имеющих место для точечной функции f и для любых наборов x из множества L^m (в частности, из множества E^m) и наборов b из множества L^{n-m} :

$$f_x(b) = f(xb) = \sum_{x'b'} f(x'b') = \sum_{b'} \sum_{x'} f(x'b') = \sum_{b'} f(xb') = \sum_{b'} f_x(y),$$

$$f^b(x) = f(xb) = \sum_{x'b'} f(x'b') = \sum_{x'} \sum_{b'} f(x'b') = \sum_{x'} f(x'b) = \sum_{x'} f^b(x),$$

где суммы вычисляются по наборам x' из E^m и b' из E^{n-m} , таким, что $x' \leq x$ и $b' \leq b$ (и тогда по наборам $x'b'$ из E^n , таким, что $x'b' \leq xb$).

Достаточность следует из следующего соотношения, имеющего место при любых a из L^m и b из L^{n-m} :

$$f(ab) = f^b(a) = \sum_x f^b(x) = \sum_x f_x(b) = \sum_x \sum_y f_x(y) = \sum_x \sum_y f(xy) = \sum_{xy} f(xy),$$

где суммы вычисляются по наборам x из E^m и y из E^{n-m} , таким, что $x \leq a$ и $y \leq b$ (и тогда по наборам xy из E^n , таким, что $xy \leq ab$). При этом первое, третье, пятое и шестое равенства очевидны, а второе и четвёртое выполняются для точечных функций f^b и f_x . Этого достаточно для завершения доказательства. ■

Взяв в лемме $m = n - 1$, получаем следующий тест точечности.

Теорема 2. Функция f из P_L , зависящая от $n > 1$ переменных, тогда и только тогда точечная, когда точечными являются функции f_x и f^b для всевозможных наборов x из множества E^{n-1} и элементов b из полурешётки L .

Отсюда индукцией по n получается

Следствие 1. Функция из P_L тогда и только тогда точечная, когда точечными являются все одноместные функции, полученные из неё подстановками констант на места переменных.

Отметим также

Следствие 2. Замкнутый подстановками констант из множества L класс функций из P_L тогда и только тогда включён в множество T_L , когда все одноместные функции этого класса включены в множество T_L .

Распознавание точечности. Лемма 1 позволяет построить схему из функциональных элементов [14] (иначе — быстрый алгоритм, см. [15]) для распознавания точечности заданной векторно n -местной функции из P_L , такую, что сложность $L(n)$ этой схемы (то есть число её элементов) и её глубина $J(n)$ (максимальная длина пути от входа к выходу) при растущем параметре n ограничены сверху соответствующими величинами $O(|L|^n)$ и $O(n^2)$. При этом предполагается, что, во-первых, схема строится из функциональных элементов некоторого полного базиса (безразлично какого, поскольку сложность и глубина вычисляется с точностью до мультипликативной константы), во-вторых, наборы в множестве L^n линейно упорядочены некоторым образом, в-третьих, функция задаётся вектором своих значений, вычисленных на наборах из L^n в соответствии с их упорядочением, и, наконец, в-четвёртых, её значения из L представляются двоичными векторами фиксированной длины, например, равной $\lceil \log |L| \rceil$.

Действительно, на основании теоремы 2 схема распознавания точечности произвольной функции f из P_L , зависящей от $n > 1$ переменных, при помощи многократной конъюнкции строится из $|E|^{n-1}$ схем распознавания точечности одноместных функций f_x для наборов x из множества E^{n-1} и $|L|$ схем распознавания точечности всевозможных функций f^b для элементов b из множества L , каждая из которых зависит от $n - 1$ переменных. Причём число конъюнкций не превосходит суммы $|E|^{n-1} + |L|$. Это приводит при $n \geq 1$ к рекуррентному неравенству

$$L(n) \leq L(1)|E|^{n-1} + L(n-1)|L| + c_0(|E|^{n-1} + |L|) \leq c_1|E|^{n-1} + L(n-1)|L|$$

для её сложности, где c_0 — константа, определяемая сложностью вычисления конъюнкции в используемом базисе, и c_1 — произвольная константа, удовлетворяющая при любом $n \geq 1$ неравенству

$$c_1 \geq L(1) + c_0(1 + |L|/(|E|^{n-1})),$$

например, равная $L(1) + c_0(1 + |L|)$. Из рекуррентного неравенства получаем

$$\begin{aligned} L(n) &\leq c_1(|E|^{n-1} + |E|^{n-2}|L| + \dots + |E||L|^{n-2} + |L|^{n-1}) = c_1|L|^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (|E|/|L|)^i = \\ &= c_1|L|^{n-1}(1 - (|E|/|L|)^n)/(1 - |E|/|L|) \leq c_1|L|^{n-1}/(1 - |E|/|L|) = \\ &= c_1|L|^n/(|L| - |E|) = c_2|L|^n = O(|L|^n), \end{aligned}$$

где $c_2 = c_1/(|L| - |E|)$. Ясно, что глубина схемы, вычисляющей конъюнкцию $|E|^{n-1} + |L|$ аргументов, ограничена сверху величиной c_3n , где c_3 — некоторая константа, зависящая от базиса и от значений $|E|$ и $|L|$. Следовательно, для глубины $J(n)$ всей схемы получаем при $n > 1$ следующее рекуррентное неравенство:

$$J(n) \leq c_3n + J(n-1).$$

Всегда можно выбрать константу $c_3 \geq J(1)$. Тогда записанное неравенство выполняется и при $n = 1$, а глубина схемы ограничена сверху арифметической прогрессией:

$$J(n) \leq c_3(n + (n - 1) + \dots + 1) = c_3 n(n + 1)/2 \leq c_3 n^2 = O(n^2).$$

Таким образом, верна

Теорема 3. В любом полном базисе существует последовательность схем распознавания точечности заданной векторно n -местной функции из P_L , сложность и глубина которых при растущем параметре n ограничены сверху соответствующими величинами $O(|L|^n)$ и $O(n^2)$.

Таким образом, распознавание точечности заданной векторно функции осуществляется схемой линейной от числа её входов сложности.

Замкнутые классы точечных функций. При изучении точечных и минимальных точечных функций приходится считаться с незамкнутостью их классов относительно суперпозиции. Точнее, эти классы замкнуты операциями бесповторной суперпозиции и перестановки переменных, но не замкнуты операциями отождествления переменных. Например, одноместная функция $f(x) = x \vee \neg x$ на полурешётке $\tilde{E}_2 = \{0, 1, \top\}$ не является точечной в силу соотношений

$$f(\top) = \top \neq 1 = 1 + 1 = f(0) + f(1),$$

хотя получена отождествлением переменных из двухместной минимальной точечной функции $x \vee \neg y$. Вместе с тем для синтеза дискретных управляющих систем с динамическим поведением представляют интерес замкнутые классы точечных и минимальных точечных функций. Этот интерес вызван тем, что задачи схемного и формульного представления функций в таких классах сводятся к аналогичным задачам для ограничений этих функций на множества минимальных элементов их областей определения и решаются после такого сведения известными методами синтеза функций k -значной логики, возможно незначительно модифицированными. Наряду с этим, задачи синтеза точечных функций в незамкнутых классах сталкиваются со значительными трудностями и требуют разработки новых методов.

Рассмотрим далее одну конструкцию замкнутых классов точечных функций. Для её изложения понадобится следующее определение. Будем говорить, что функция f из P_L , зависящая от n переменных, *сохраняет пару* (A, B) множеств A и B функций из P_L , зависящих от m переменных, если для любых функций $s_1(x), \dots, s_n(x)$ из множества B функция $f(s_1(x), \dots, s_n(x))$ принадлежит множеству A , при этом через x обозначен набор переменных $x_1, \dots, x_m$. Несложно понять, что множество всех функций из P_L , сохраняющих пару множеств (A, B) , составляет наследственный класс (замкнутый операциями подстановки переменных под знак его функций). Этот класс замкнут суперпозицией, если выполняется включение $A \subseteq B$. Сформулированные свойства проверяются непосредственно. В силу следствия 2 имеет место

Лемма 2. Пусть A и B — множества точечных функций из T_L , зависящих от $m \geq 1$ переменных, причём множество A включено в T_L , а множество B содержит селекторную функцию, тождественно равную некоторой переменной, и содержит все константы из множества L , рассматриваемые как m -местные функции с фиктивными переменными. Тогда функции из P_L , сохраняющие пару множеств (A, B) , составляют наследственный класс, включённый в T_L . Этот класс замкнут суперпозицией, если выполняется включение $A \subseteq B$.

Лемма 2 позволяет получить ряд примеров замкнутых классов точечных функций.

Обозначим через $\mathcal{M}_{T_L}$ систему всех максимальных по включению замкнутых классов точечных функций на полурешётке L . Имеет место

Теорема 4. Система $\mathcal{M}_{T_L}$ конечна, и каждый замкнутый класс точечных функций из T_L включён в некоторый её класс.

Доказательство. Рассмотрим произвольный класс N точечных функций из T_L . Расширим его сначала до замкнутого класса $N_1 = [N \cup L]$. Подобное расширение состоит в пополнении класса N константами из L , а также подфункциями его функций, получаемыми подстановками констант на места переменных. В силу следствия 2 класс N_1 содержит только точечные функции из T_L . Далее расширением класса N_1 является класс N_2 функций из P_L , сохраняющих пару (A, B) , где A — множество всех одноместных функций класса N_2 и B — то же множество, но пополненное тождественной функцией. Осталось обратить внимание на то, что классов типа N_2 конечное число (поскольку они однозначно определяются своими одноместными функциями), и максимальные по включению из них составляют систему $\mathcal{M}_{T_L}$. ■

Обозначив через $\mathcal{M}_{\min T_L}$ систему максимальных по включению замкнутых классов минимальных точечных функций на полурешётке L , тотчас получаем

Следствие 3. Система $\mathcal{M}_{\min T_L}$ конечна и каждый замкнутый класс минимальных точечных функций из $\min T_L$ включён в некоторый её класс.

Доказательство. Несложно понять, что система $\mathcal{M}_{\min T_L}$ состоит из максимальных по включению классов $K \cap \text{pol}_L(E)$ для всевозможных классов K из $\mathcal{M}_{T_L}$. ■

Из доказательства теоремы 4 и её следствия 3 видно, что максимальные замкнутые классы точечных и минимальных точечных функций из систем $\mathcal{M}_{T_L}$ и $\mathcal{M}_{\min T_L}$ допускают эффективное задание. Представляется важной задача явного описания таких классов, в настоящее время не решённая. В заключение раздела рассмотрим

Пример замкнутого класса точечных функций. Пусть L совпадает с множеством $\text{in}(E, \preceq)$ интервалов решётки $(E, \preceq)$. В соответствии со сделанными ранее определениями рассматриваем множество L как полурешётку с упорядочением $\leq$ и, одновременно, как решётку с упорядочением $\preceq$. Покажем, что *клон* $\text{pol}_L(\leq, \preceq)$ функций из P_L , сохраняющих упорядочения $\leq$ и $\preceq$ множества L (первое — полурешёточное, второе — решёточное), состоит только из точечных функций. В силу следствия 2 достаточно проверить, что точечной является любая одноместная функция s из этого клона. Для этого рассмотрим интервал $[a, b]$ из множества L , где a и b — какие-то элементы решётки E , для которых выполняется неравенство $a \preceq b$. Заметим, что $a \leq [a, b], b \leq [a, b], a \preceq [a, b] \preceq b$, откуда

$$s(a) \leq s([a, b]), s(b) \leq s([a, b]), s(a) \preceq s([a, b]) \preceq s(b).$$

Первое и третье из записанных неравенств влекут совпадение левых границ интервалов $s(a)$ и $s([a, b])$. Аналогично в силу второго и четвёртого неравенств совпадают правые границы интервалов $s(b)$ и $s([a, b])$. Тогда в силу третьего и четвёртого неравенств выполняется равенство $s([a, b]) = s(a) + s(b)$, означающее, что функция s точечная.

Можно показать, что в двоичном случае, когда решётка E состоит из чисел 0 и 1, таких, что $0 \preceq 1$, и имеет три интервала 0, 1, $\top$, упорядоченных отношениями $\leq$ и $\preceq$ так, что

$$0 \leq \top, 1 \leq \top \text{ и } 0 \preceq \top \preceq 1,$$

функции клона $\text{pol}_L(\leq, \preceq)$ суть суммы его минимальных точечных функций, а последние являются полурешётчными продолжениями монотонных булевых функций. Нечто аналогичное выполняется и в общем случае. Доказывать это не будем.

4. Сильно точечные функции

В связи с задачей выделения замкнутых классов точечных функций введём в рассмотрение сильно точечные функции.

Сильная точечность. Точечную функцию назовём *сильно точечной*, если точечными являются все функции, получаемые из неё отождествлением переменных. Очевидно, что всякий замкнутый класс точечных функций состоит только из сильно точечных функций.

Теорема 5. Множество сильно точечных функций на полурешётке L , зависящих от n переменных, замкнуто сложением, то есть является верхней полурешёткой с упорядочением $\leq$.

Доказательство. Пусть функция h является суммой функций f и g . Если функция h не является сильно точечной, то отождествлением переменных из неё можно получить неточечную функцию h' . Аналогичное отождествление переменных в функциях f и g приводит к соотношению $h' = f' + g'$, в котором в силу теоремы 1 по крайней мере одна из функций f' или g' неточечная. Но тогда сильно точечной не является по крайней мере одна из функций f или g . Этого достаточно для доказательства. ■

Тесты сильной точечности. В силу сделанного определения *класс сильно точечных функций наследственный*, то есть замкнут операциями подстановки переменных под знак его функций и, более того, *является наибольшим по включению среди наследственных классов точечных функций*. Несколько менее очевидно, что он *инвариантен*, в частности, замкнут подстановками констант на места переменных. Это следует из возможности менять порядок выполнения операций отождествления переменных и подстановки констант без изменения результата этих операций. В соответствии с этим, если в результате подстановки констант в сильно точечную функцию получается функция, не являющаяся сильно точечной, то отождествлением переменных из последней можно получить неточечную функцию. Изменив порядок операций, эту неточечную функцию можно получить из исходной (по предположению сильно точечной) функции, сначала отождествив переменные, а затем подставив константы. Но в силу теста точечности неточечная функция получается уже после выполнения операций отождествления переменных, до подстановки констант. Для сильно точечной исходной функции это невозможно. Полученное противоречие доказывает тезис об инвариантности класса сильно точечных функций на полурешётке.

В действительности, можно сформулировать следующий тест сильной точечности.

Теорема 6. Функция из P_L тогда и только тогда сильно точечная, когда точечными являются все одноместные функции, получаемые из неё при помощи операций отождествления переменных и подстановки констант из множества L на места переменных.

Доказательство. Необходимость уже доказана выше. Достаточность следует из определения сильно точечной функции и теста точечности, в силу которых из функции, не являющейся сильно точечной, отождествлением переменных получается некоторая неточечная функция, из которой подстановками констант получается одноместная неточечная функция. ■

Сформулируем ещё один тест сильной точечности. Понадобится следующее обозначение. Для n -местной функции f и непустого подмножества $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ через ${}^A f$ обозначим функцию от $n - |A| + 1$ переменных, получаемую из функции $f(x_1, \dots, x_n)$ отождествлением всех переменных x_i с номерами i из множества A с некоторой одной из этих переменных (всё равно какой именно, например, первой из них). Функции f и ${}^A f$ совпадают при одноэлементном множестве A . Имеет место

Следствие 4. Функция f из P_L , зависящая от n переменных, тогда и только тогда сильно точечная, когда точечными являются функции ${}^A f$ для всевозможных непустых подмножеств $A \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Необходимость очевидна из определения сильно точечной функции. Достаточность. В соответствии с тестом сильной точечности функция f является сильно точечной, если точечными являются все одноместные функции, полученные из функций ${}^A f$ подстановками констант на места переменных x_i , где $i \notin A$. Но точечность этих одноместных функций следует из точечности функций ${}^A f$. ■

Распознавание сильной точечности. В силу следствия 4 схема для распознавания сильной точечности произвольной n -местной функции f при помощи многократной (но не более чем 2^n -кратной) конъюнкции строится из схем для распознавания точечности функций ${}^A f$ для всевозможных непустых подмножеств $A \subseteq \{1, \dots, n\}$. В свою очередь для m -элементного множества A проверка точечности функции ${}^A f$, зависящей от $n - m + 1$ переменной, осуществляется схемой из предыдущего раздела, сложность и глубина которой ограничены сверху соответствующими величинами $c_2 |L|^{n-m+1}$ и $c_3(n - m + 1)^2$. Суммарная сложность этих схем ограничена сверху величиной

$$\sum_{m=1}^n \binom{n}{m} c_2 |L|^{n-m+1} = c_2 |L| ((1 + |L|)^n - |L|^n) = O((1 + |L|)^n),$$

а максимальная глубина — величиной $c_3 n^2$. Поскольку многократная конъюнкция заведомо реализуется схемой сложности $O((1 + |L|)^n)$ и линейной от n глубины, верна

Теорема 7. В любом полном базисе существует последовательность схем распознавания сильной точечности заданной векторно n -местной функции из P_L , имеющих при растущем параметре n сложность $O((1 + |L|)^n)$ и глубину $O(n^2)$.

Итак, распознавание сильной точечности функции, заданной вектором значений, осуществляется схемой полиномиальной сложности с «почти линейным» полиномом степени $\log_{|L|}(1 + |L|)$.

5. Дизъюнктивные нормальные формы трёхзначных полурешёточных функций

В разделе рассматриваются функции на полурешётке $\tilde{E}_2 = \{0, 1, \top\}$, вычисляемые формулами в базисе $\{0, 1, \vee, \wedge, \neg\}$. Явно описывается класс

$$[0, 1, \vee, \wedge, \neg]$$

всех таких функций.

Поскольку базисные функции являются монотонными продолжениями булевых функций (сохраняют порядок $\leq$ и множество $E_2 = \{0, 1\}$), имеет место включение

$$[0, 1, \vee, \wedge, \neg] \subseteq \text{pol}_{\tilde{E}_2}(\leq, E_2).$$

Будет показано далее, что здесь выполняется равенство.

Днф. Начнём с некоторых замечаний. Заметим, во-первых, что полурешётка $\tilde{E}_2$ совпадает с полурешёткой $\text{in}(E_2, \preceq)$ интервалов решётки E_2 . Упорядочение $\preceq$ в последней продолжается на множество $\tilde{E}_2$ так: $0 \preceq \top \preceq 1$, которое становится дистрибутивной решёткой (в соответствии с введённой терминологией — решёткой интервалов решётки $\tilde{E}_2$) с наименьшим элементом 0, наибольшим элементом 1, с дизъюнкцией $\vee$ и конъюнкцией $\wedge$ для взятия точных верхней и нижней граней. Отрицание $\neg$ является инверсным автоморфизмом этой решетки. В связи с этим, как и одноимённые булевы функции, дизъюнкция $\vee$ и конъюнкция $\wedge$ ассоциативны, коммутативны, идемпотентны, дистрибутивны одна по другой, для них выполняются законы поглощения, а с операцией $\neg$ они удовлетворяют законам де Моргана. Вместо закона исключённого третьего, однако, выполняются лишь неравенства

$$x \vee \neg x \geq 1 \text{ и } x \wedge \neg x \geq 0,$$

являющиеся строгими при $x = \top$.

Сделанные замечания позволяют любую формулу в базисе $\{0, 1, \vee, \wedge, \neg\}$ эквивалентными преобразованиями, не изменяющими вычисляемой формулой функции, привести либо к константам 0 или 1, либо к виду днф $k_1 \vee \dots \vee k_r$, где k_i — конъюнкции, в которые переменные могут входить единожды — под знаком отрицания либо без него, или дважды — с отрицанием и без него.

Отметим, что в отличие от двоичного случая из-за невыполнения закона исключённого третьего не всегда эквивалентные преобразования позволяют избавиться от повторного появления переменных в конъюнкциях. В связи с этим имеет смысл предварительно рассмотреть днф без повторяющихся переменных в конъюнкциях, затем с повторяющимися переменными в каждой конъюнкции и, наконец, с конъюнкциями обоих типов — допускающими либо не допускающими повторы.

Введём некоторые обозначения. Для набора $x = (x_1, \dots, x_n)$ переменных и набора $a = (a_1, \dots, a_n)$ элементов из множества $\{0, 1, \perp, \top\}$ положим

$$x^a = x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n},$$

понимая под $x_i^{a_i}$ выражения $\neg x_i, x_i, 1$ или $(x_i \wedge \neg x_i)$ при соответствующем значении элемента a_i , равном 0, 1, $\top$ или $\perp$. Для всякого множества A наборов $a^1, \dots, a^m$ из множества $\{0, 1, \perp, \top\}^n \setminus \{\perp\}^n$ через x^A будем обозначать формулу

$$x^{a^1} \vee \dots \vee x^{a^m},$$

которую и будем называть днф. (Порядок, в котором пронумерованы наборы a^i из множества A , всякий раз предполагается произвольным. Он не важен, поскольку от него не зависит вычисляемая формулой x^A функция.)

В полурешётке $\tilde{E}_2^n$ наборы a и b , не имеющие общей нижней грани, назовём *ортгоналичными* и будем писать $a \perp b$ в этом случае. Для подмножества $K \subseteq \tilde{E}_2^n$ через $\perp K$ обозначим множество всех наборов в $\tilde{E}_2^n$, ортогональных всем наборам из K . Заметим, что имеет место включение $\perp \{a\} \supseteq \perp \{b\}$, если для наборов a и b из множества $\tilde{E}_2^n$ выполняется неравенство $a \leq b$. В связи с этим

$$\perp K = \perp \min(K, \leq).$$

Днф «без повторений». Рассмотрим сначала днф, в которых конъюнкции не содержат повторяющихся переменных, то есть днф x^A , где $A \subseteq \tilde{E}_2^n \setminus \{\top\}^n$. Охаракте-

ризуем класс функций, вычисляемых такими днф. С этой целью заметим, что в соответствии со сделанными определениями для любых наборов x из $\tilde{E}_2^n$ и a из $\tilde{E}_2^n \setminus \{\top\}^n$

$$x^a = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq a; \\ 0, & \text{если } x \perp a; \\ \top & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это свойство удобно сначала проверить для $n = 1$, а затем для произвольного целого положительного n . Тогда для любого подмножества $A \subseteq \tilde{E}_2^n \setminus \{\top\}^n$

$$x^A = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq a \text{ для некоторого } a \text{ из } A \text{ (равносильно из } \max(A, \leq)); \\ 0, & \text{если } x \perp a \text{ для любого } a \text{ из } A; \\ \top & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда следует

Теорема 8. Для непустого множества $A \subseteq \tilde{E}_2^n \setminus \{\top\}^n$ и набора переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ формула x^A тогда и только тогда вычисляет функцию $f(x)$ из множества $\text{pol}_{\tilde{E}_2}(\leq, E_2)$, когда выполняются условия

- 1) $f^{-1}(0) = \perp A$;
- 2) $\max(f^{-1}(1)) \subseteq A \subseteq f^{-1}(1)$.

Следствие 5. Функция из множества $\text{pol}_{\tilde{E}_2}(\leq, E_2)$, зависящая от n переменных, тогда и только тогда вычисляется формулой вида x^A для набора переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ и некоторого непустого множества $A \subseteq \tilde{E}_2^n \setminus \{\top\}^n$, когда выполняется условие $f^{-1}(0) = \perp f^{-1}(1)$.

Из теоремы 8 следует, что отличная от констант 0 и 1 минимальная точечная функция f вычисляется сокращённой днф

$$x^K, \text{ где } K = \max(f^{-1}(1), \leq),$$

причём это единственная тупиковая форма, минимальная как по числу конъюнкций, так и по суммарному числу букв в них. В частности, все минимальные точечные функции на полурешётке $\tilde{E}_2$ вычисляются формулами в базисе $\{0, 1, \vee, \wedge, \neg\}$.

Днф «с повторениями». Теперь рассмотрим днф «с повторениями», в которых любая конъюнкция содержит повторяющиеся переменные. Точнее, рассмотрим частный случай (достаточный для достижения заявленной цели) таких днф, в которых любая конъюнкция содержит все переменные, причём хотя бы одну дважды — с отрицанием и без него. То есть рассмотрим днф x^A , где $A \subseteq \{0, 1, \perp\}^n \setminus \{0, 1\}^n$.

В соответствии со сделанными определениями для любых наборов x из множества $\tilde{E}_2^n$ и b из множества $\{0, 1, \perp\}^n \setminus \{0, 1\}^n$

$$x^b = \begin{cases} \top, & \text{если } x \geq b^*; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где набор b^* получен из b заменой знаков $\perp$ на $\top$. (Для доказательства нужно заметить, что равенство $x^b = 1$ невозможно в силу существования $b_i = \perp$, а равенство $x^b = \top$ равносильно тому, что всякое выражение $x_i^{b_i}$ принимает значение в множестве $\{1, \top\}$, если $b_i \in \{0, 1\}$, и принимает значение $\top$, если $b_i = \perp$; каждый из случаев реализуется лишь при $x_i \geq b_i^*$.) Тогда для любого подмножества $B \subseteq \{0, 1, \perp\}^n \setminus \{0, 1\}^n$

$$x^B = \begin{cases} \top, & \text{если } x \geq b \text{ для некоторого } b \text{ из } B^* \text{ (равносильно из } \min(B^*, \leq)); \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $B^* = \{b^* : b \in B\}$. Из сказанного следует

Теорема 9. Для непустого множества $B \subseteq \{0, 1, \perp\}^n \setminus \{0, 1\}^n$ и набора переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ формула x^B тогда и только тогда вычисляет функцию $f : \tilde{E}_2^n \rightarrow \{0, \top\}$ из множества $\text{pol}_{\tilde{E}_2}(\leq, E_2)$, когда выполняется равенство $\min(B^*) = \min(f^{-1}(\top), \leq)$.

Следствие 6. Всякая сюръективная функция $f : \tilde{E}_2^n \rightarrow \{0, \top\}$ из класса $\text{pol}_{\tilde{E}_2}(\leq, E_2)$ вычисляется формулой вида x^B для некоторого непустого множества $B \subseteq \{0, 1, \perp\}^n \setminus \{0, 1\}^n$ и набора переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Днф с конъюнкциями двух типов. Совместно используя теоремы 8 и 9, получаем следующую теорему.

Теорема 10. Для непустых подмножеств $A \subseteq \tilde{E}_2^n \setminus \{\top\}^n$ и $B \subseteq \{0, 1, \perp\}^n \setminus \{0, 1\}^n$ с объединением $C = A \cup B$ и набора переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ формула x^C тогда и только тогда вычисляет функцию $f(x)$ из множества $\text{pol}_{\tilde{E}_2}(\leq, E_2)$, когда выполняются условия

- 1) $\max(f^{-1}(1)) \subseteq A \subseteq f^{-1}(1)$;
- 2) $\min(\perp A \cap f^{-1}(\top), \leq) \subseteq B^*$.

Доказательство. Первое условие означает, что множество $f^{-1}(1)$ единиц функции f совпадает с множеством единиц функции, вычисляемой формулой x^A , а тогда и функции, вычисляемой формулой x^C . В частности, первое условие необходимо. Заметим далее, что функция, вычисляемая формулой x^A , имеет наибольшее по включению множество нулей среди n -местных квазимонотонных функций с тем же множеством единиц. Это следует из теста квазимонотонности, в силу которого наборы из множества нулей квазимонотонной функции ортогональны наборам из её множества единиц. В силу сказанного из первого условия следует, что множество нулей функции f включено в множество нулей функции, вычисляемой формулой x^A . Следовательно, при выполнении первого условия для совпадения множества нулей функции f с множеством нулей функции x^C необходимо и достаточно, чтобы функция, вычисляемая формулой x^B , принимала значение $\top$ на тех наборах, на которых функция f принимает значение $\top$ и функция, вычисляемая формулой x^A , принимает значение 0 . При выполнении первого условия множество таких наборов совпадает в силу теоремы 8 с множеством $\perp A \cap f^{-1}(\top)$, а второе условие означает в силу теоремы 9, что функция x^B принимает на наборах из этого множества значение $\top$. Из сделанных замечаний легко следует как необходимость, так и достаточность доказываемых условий. ■

Следствие 7. Имеет место равенство классов

$$[0, 1, \vee, \wedge, \neg] = [\min T_{\tilde{E}_2}] = \text{pol}_{\tilde{E}_2}(\leq, E_2).$$

Заметим, что выше были рассмотрены далеко не все днф и даже не все днф с повторами в каждой конъюнкции. Однако рассмотренных случаев достаточно для достижения заявленной цели описания класса функций, вычисляемых в базисе $\{0, 1, \vee, \wedge, \neg\}$.

Разложение Шеннона для минимальной точечной функции f от n аргументов на полурешётке $\tilde{E}_2$ выглядит следующим образом:

$$f(xy) = \neg x f_0(y) \vee x f_1(y) \vee f_0(y) f_1(y),$$

где конъюнкция опущена. Это соотношение выполняется для произвольных значений x из множества $\tilde{E}_2$ и y из множества $\tilde{E}_2^{n-1}$, для проверки нужно рассмотреть

различные возможности для x . Последним произведением $f_0(y)f_1(y)$ здесь нельзя пренебречь, в отличие от двоичного случая. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть трёхместную функцию $\neg x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Она задана сокращённой днф, а потому минимальная точечная. То же выражение для неё даёт разложение Шеннона. При удалении последнего произведения x_2x_3 днф перестаёт быть сокращённой, а задаваемая ею функция перестаёт быть минимальной точечной.

С использованием разложения Шеннона в записанной выше форме известным методом из [14] можно получить верхнюю оценку $O(2^n/n)$ сложности минимальной точечной функции от n аргументов при реализации её схемами из функциональных элементов в базисе $0, 1, \vee, \wedge, \neg$. Эта оценка только мультипликативной константой отличается от нижней. Хуже обстоит дело с нижними и верхними оценками формульной сложности, различающимися в настоящее время экспоненциальным множителем.

Таким образом, на основании сказанного можно сформулировать важную задачу определения сложности минимальных точечных функций в различных базисах и в различных вычислительных моделях (формулы, схемы из функциональных элементов, переключательные схемы и др.), а также связанную с ней задачу разработки асимптотически наилучших методов синтеза для минимальных точечных функций в различных вычислительных моделях. Сформулированные задачи, актуальные уже в простейшем случае полурешётки $\tilde{E}_2$, сохраняют свою значимость и для других полурешёток.

6. Обобщённые днф

Опишем метод формульного представления для квазимоноотонных функций в базисах, содержащих некоторые специальные двухместные функции и все слабо существенные квазимоноотонные функции, а также для минимальных точечных функций в базисах, содержащих некоторые специальные двухместные функции и все одноместные минимальные точечные функции. Эти результаты будут получены для функций на произвольной конечной дистрибутивной точечной полурешётке.

Дистрибутивная точечная полурешётка. Полурешётка L называется *дистрибутивной*, если таковой является решётка L' , то есть если в последней для любых её элементов a, b и c выполняется соотношение $a(b + c) = ab + ac$ (а с ним и двойственное $a + bc = (a + b)(a + c)$), позволяющее при вычислении в ней раскрывать скобки и выносить общие множители. Основным примером является дистрибутивная полурешётка $\tilde{E}$ непустых подмножеств конечного множества E .

Будем считать заданными дистрибутивную точечную полурешётку L и некоторое её подмножество C , включающее все её минимальные элементы из множества $E = \min(L)$ и называемое далее *специальным*. Имеет место

Лемма 3. Всякий элемент b дистрибутивной точечной полурешётки L со специальным подмножеством C , таким, что $E \subseteq C$, является наибольшим решением системы уравнений $xc = \perp$ для всевозможных элементов c из C , таких, что $bc = \perp$.

Доказательство. В силу дистрибутивности $xc = yc = \perp$ влечёт $(x + y)c = \perp$, откуда сумма любых решений рассматриваемой системы снова является её решением, и система имеет наибольшее решение в решётке L' , равное сумме всех решений. Вместе с тем сам элемент b является решением системы. Следовательно, для наибольшего решения B выполняется неравенство $b \leq B$. В силу точечности полурешётки L элемент B является суммой некоторых её точек. Значит, если записанное неравенство строгое, то для некоторой точки c выполняется неравенство $c \leq B$ и не выполняется неравенство $c \leq b$. Но этого не может быть, так как тогда $bc = \perp$ (из-за невыполнения

второго неравенства $c \leq b$) и в системе присутствует уравнение $xc = \perp$, которому не удовлетворяет элемент B (в силу первого неравенства $c \leq B$). Таким образом, $b = B$ и лемма доказана. ■

Следствие 8. Пусть полурешётка L дистрибутивная и точечная со специальным множеством C , таким, что $E \subseteq C$. Тогда всякая n -местная функция f из P_L однозначно определяется указанием множеств

$$J(c, f) = \{d : d \in L^n \wedge f(d)c = \perp\}$$

для всех элементов c из C .

Доказательство. Для любого набора d из L^n значение $f(d)$ можно найти как наибольшее решение системы уравнений $xc = \perp$ для всевозможных c из C , таких, что $d \in J(c, f)$. ■

Отметим необходимые свойства множеств $J(c, f)$.

Лемма 4. Пусть C — специальное множество дистрибутивной точечной полурешётки L , такое, что $E \subseteq C$. Тогда квазимонотонная функция f слабо существенная, если для всех элементов c из C выполняется неравенство $|J(c, f)| \leq 1$.

Доказательство. Пусть f — n -местная квазимонотонная функция и для всех элементов c из E выполняется неравенство $|J(c, f)| \leq 1$. Рассмотрим произвольное подмножество $U \subseteq L^n$. Заметим, что отсутствие нижней грани у подмножества $f(U) = \{f(d) : d \in U\}$ в полурешётке L означает непустоту всех пересечений $U \cap J(c, f)$ для элементов c из E . В силу неравенств эти пересечения одноэлементные. Это означает, что может существовать не более одного минимального по включению подмножества $U \subseteq L^n$ с неограниченным снизу множеством $f(U)$. По тесту квазимонотонности наборы в таком минимальном множестве U имеют общую компоненту, пусть i -ю, без нижней грани в L . В силу единственности такого минимального множества указанное свойство i -й компоненты выполняется не только для его наборов, но и для наборов всякого такого подмножества $U \subseteq L^n$ с неограниченным снизу множеством $f(U)$. Тогда по тесту слабой существенности из [3] функция f слабо существенная. ■

Специальные функции.

Лемма 5. Для любого элемента c дистрибутивной точечной полурешётки L найдётся двухместная квазимонотонная функция $*_c$ в Q_L , такая, что

- 1) $x *_c x = x$ для всех x из L ;
- 2) $x *_c (x + c) = (x + c) *_c x = x$ для всех x из L , таких, что $xc = \perp$.

Более того, функцию $*_c$, обладающую указанными свойствами, можно выбрать минимальной точечной в классе $\min T_L$.

Доказательство. Указанные условия определяют частичную двухместную функцию из P_L^* , принимающую неопределённое значение на всех наборах, не оговоренных в этих условиях. Можно увидеть, пользуясь дистрибутивностью, что эта частичная функция сохраняет наличие нижних граней у её аргументов (точнее, сохраняет предикаты ε_n из [3]), откуда по тесту квазимонотонности она имеет квазимонотонное продолжение в клоне Q_L . Осталось заметить, что условия 1 и 2 выполняются не только для функции $*_c$, но и для любой её монотонной миноранты. Первое условие — в силу точечности полурешётки L и свойства минорирования, второе — в силу монотонности и минорирования. ■

Квазимонотонную функцию $*_c$ в условиях леммы будем называть *c-специальной*.

Лемма 6. Пусть L — дистрибутивная точечная полурешётка, c — некоторый её элемент и $*_c$ — некоторая c -специальная функция из Q_L . Пусть также для квазимонотонной функции f из Q_L , зависящей от n переменных, множество $J(c, f)$ содержит более одного элемента. Тогда найдутся квазимонотонные функции g и h в Q_L , зависящие от n переменных, такие, что для любого набора d из множества L^n выполняется равенство $f(d) = g(d) *_c h(d)$ и для любого элемента a из полурешётки L выполняются включения

$$J(a, g) \subseteq J(a, f), \quad J(a, h) \subseteq J(a, f),$$

строгие при $a = c$.

Доказательство. Разобьём множество $J(c, f)$ на два класса A и B . Рассмотрим функции g и h из P_L от n переменных, такие, что

$$g(d) = f(d) + c \text{ и } h(d) = f(d) + c \text{ при } d \text{ из } A \text{ и из } B \text{ соответственно,}$$

и принимающие те же значения, что и функция f , в остальных случаях, то есть значения

$$g(d) = f(d) \text{ и } h(d) = f(d) \text{ при } d \text{ из } L^n \setminus A \text{ и из } L^n \setminus B \text{ соответственно.}$$

Функции g и h квазимонотонны вслед за их минорантой f . Остальные условия проверяются непосредственно. ■

Метод разложения. Леммы 4 и 6 позволяют сформулировать метод формульного представления квазимонотонных функций на дистрибутивной точечной полурешётке L со специальным подмножеством $C \subseteq L$ (включающим множество $E = \min(L)$) в базисе, содержащем все слабо существенные функции из Φ_L и некоторый набор c -специальных функций $*_c$ для всех c из множества C . Этот метод для представления функции f формулой в указанном базисе требует:

- 1) найти в множестве C элемент c , такой, что $|J(c, f)| > 1$, и разложить f по функции $*_c$ в соответствии с леммой 6, либо
- 2) (в отсутствие такого c) закончить разложение, при этом в соответствии с леммой 4 функция f слабо существенная;
- 3) выполнять подобные действия рекурсивно для компонент разложения, компонент компонент и т. д., пока возможно.

Если c -специальные функции выбрать минимальными точечными (в соответствии с леммой 5 это возможно) и в формуле, полученной для минимальной точечной функции f по описанным выше правилам, заменить последние полученные слабо существенные компоненты их одноместными минимальными точечными минорантами из класса $\min T_L$ (существующими по определению слабо существенной функции), то в результате получим формулу для функции f в базисе из одноместных минимальных точечных функций и двухместных минимальных c -специальных функций. Тем самым доказана

Теорема 11. Имеют место соотношения

$$Q_L = [\Phi_L \cup (\min T_L)^{(2)}], \quad \min T_L \subseteq [(\min T_L)^{(2)}].$$

Замечание о полурешётке подмножеств. Частным случаем c -специальных функций являются дизъюнкция и конъюнкция на трёхэлементной полурешётке $\tilde{E}_2$, первая является 0-специальной, вторая — 1-специальной. Таким образом, полученный

метод в том числе позволяет строить формулы для минимальных точечных функций на полурешётке $\tilde{E}_2$ в базисе $0, 1, \neg, \vee, \wedge$. В более общей ситуации, когда полурешётка L совпадает с полурешёткой $\tilde{E}_k$ подмножеств множества $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, под дизъюнкцией и конъюнкцией обычно понимают минимальные точечные функции, определённые на E_k следующим образом:

$$x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2), \quad x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2)$$

для любых x_1 и x_2 из E_k , а затем точно продолженные на полурешётку $L = \tilde{E}_k$. Как видно, эти функции s -специальные, дизъюнкция — для любого s из $\{0, 0+1, \dots, E_k\}$, а конъюнкция — для любого s из $\{k-1, (k-1) + (k-2), \dots, E_k\}$. Несложно найти и s -специальную функцию для произвольного s из $\tilde{E}_k$. Таковой является, например, функция $\vee_s$, определяемая как

$$x_1 \vee_s x_2 = s(s^{-1}(x_1) \vee s^{-1}(x_2)),$$

где s — минимальная точечная подстановка на $\tilde{E}_k$, отображающая на элемент s элемент вида $0 + \dots + (l-1)$ для некоторого $l, 1 \leq l \leq k$, так, что $s(0 + \dots + (l-1)) = s$. В частности, если s — минимальный элемент полурешётки L , не равный 0, то есть принадлежащий множеству $E_k \setminus \{0\}$, то в качестве такой подстановки s можно выбрать точечное продолжение транспозиции $(0, s)$. Также несложно получить специальные функции композицией конъюнкции с подстановками. Из сказанного следует

Теорема 12. Для полурешётки $L = \tilde{E}$ имеют место соотношения

$$Q_L = [\Phi_L \cup \{\vee\}], \quad \min T_L \subseteq [(\min T_L)^{(1)} \cup \{\vee\}].$$

Более подробный анализ, проведённый в [16], позволяет утверждать, что в условиях этой теоремы все функции в каждом из классов Q_L, M_L, T_L или $\min T_L$ выражаются формулами с использованием одноместных функций класса и дизъюнкции (равно конъюнкции).

ЛИТЕРАТУРА

1. Агibalов Г. П., Оранов А. М. Лекции по теории автоматов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. 185 с.
2. Агibalов Г. П. Дискретные автоматы на полурешётках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. 227 с.
3. Парватов Н. Г. Об инвариантах некоторых классов квазимонотонных функций на полурешётке // Прикладная дискретная математика. 2009. №4. С. 21–28.
4. Парватов Н. Г. Функциональная полнота в замкнутых классах квазимонотонных и монотонных трёхзначных функций на полурешётке // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10. №1. С. 61–78.
5. Парватов Н. Г. Теорема о функциональной полноте в классе квазимонотонных функций на конечной полурешётке // Там же. Сер. 1. 2006. Т. 13. №3. С. 62–82.
6. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. СПб.: Лань, 2005.
7. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
8. Мальцев А. И. Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1976.
9. Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. №2. С. 5–24.

10. *Марченко С. С.* К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Там же. 1984. Т. 23. № 1. С. 88–99.
11. *Baker K. A., Pixly A. F.* Polynomial interpolation and Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Zeiteschr. 1975. Bd. 143. N. 2. S. 165–174.
12. *Парватов Н. Г.* Замечания о конечной порождаемости замкнутых классов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11. № 3. С. 32–47.
13. *Парватов Н. Г.* Клоны с мажоритарной функцией и их обобщения // Там же. Сер. 1. 2010. Т. 17. № 3. С. 46–60.
14. *Wegener I.* The complexity of Boolean functions. Wiley-Teubner, 1987. 458 p.
15. *Алексеев В. Б.* От метода Карацубы для быстрого умножения чисел к быстрым алгоритмам для дискретных функций // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 218. 1997. С. 20–27.
16. *Парватов Н. Г.* К синтезу формул, реализующих и представляющих квазимонотонные и монотонные функции на полурешётках подмножеств конечного множества // Вестник Томского государственного университета. 2000. Т. 2711. С. 111–115.