ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/9/9

УДК 519.17

СЕМЕЙСТВО ТОЧНЫХ 2-РАСШИРЕНИЙ ТУРНИРОВ

А. А. Долгов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов

E-mail: dolgov.a.a@gmail.com

В работе рассматривается семейство турниров, имеющих точное 1- и 2-расширение, но не имеющих точного 3-расширения. Это единственное известное семейство графов с таким свойством и четвертое среди семейств графов, имеющих точное k-расширение при $k > 1$.

Ключевые слова: *граф, точное k-расширение, циркулянт.*

Введение

Ориентированным графом (*орграфом*) называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, называемое *множеством вершин*, а α — отношение на множестве вершин V, называемое *отношением смежности*.

Граф с симметричным и антирефлексивным отношением смежности называется *неориентированным графом*. Граф с антисимметричным отношением смежности называется *направленным графом*, или *диграфом*. Полный диграф без петель называется *турниром* [1].

Граф H называется *точным* (*вершинным*) *k-расширением* графа G, если граф G изоморфен каждому подграфу H, получающемуся путем удаления любых его k вершин и всех связанных с ними дуг (ребер).

Два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие $f : V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности: $(u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$ для любых $u, v \in V_1$. Изоморфизм графа на самого себя называется *автоморфизмом*. Множество автоморфизмов графа G образует группу, обозначаемую $\mathrm{Aut}(G)$.

Две вершины u и v графа G называются *подобными*, если существует автоморфизм графа G, при котором образом вершины u является вершина v. Граф, все вершины которого подобны, называется *вершинно-симметрическим*.

Циркулянтом называется n-вершинный граф G, такой, что, если его вершинам приписаны метки от 0 до $n-1$, то из вершины i в вершину j проходит дуга тогда и только тогда, когда $(i-j) \bmod n \in S$, где S — некоторое подмножество множества $\mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$. Известно, что группа автоморфизмов циркулянта $G = (V, \alpha)$ транзитивна, то есть для всех $v, u \in V$ существует $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, такой, что $\varphi(v) = u$.

Группа Γ, действующая на множестве X, называется *дважды транзитивной*, если для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$, таких, что $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$, в группе Γ найдется такое отображение φ, что $\varphi(x_1) = y_1$ и $\varphi(x_2) = y_2$.

Среди неориентированных графов существует всего два семейства графов, имеющих точное k-расширение при $k > 1$, — это полные и вполне несвязные графы [2]. Среди ориентированных графов точное k-расширение при $k > 1$ могут иметь только графы, симметризация которых является полным графом [3]. Таким образом, в классе направленных графов точное k-расширение при $k > 1$ могут иметь только турниры. Для турниров на данный момент известно только одно семейство точных k-расширений при $k > 1$ — это турниры с транзитивным отношением смежности (транзитивные турниры) [3]. Кроме того, в работе [4] приводится пара турниров, обладающих интересным свойством. Эти турниры имеют точное 1- и 2-расширение, но не имеют точного k-расширения при $k > 2$. На рис. 1 приведен один из этих турниров и его точные 1- и 2-расширения.

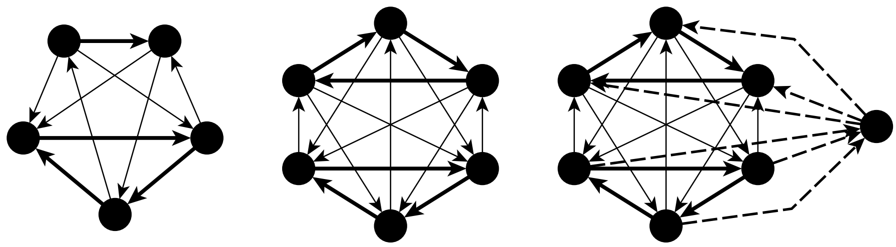

Рис. 1. Турнир и его точные 1- и 2-расширения

Данная работа посвящается описанию семейства точных 2-расширений турниров, к которому принадлежит и упомянутая пара.

Семейство турниров T_n

Рассмотрим p-вершинный граф $G = (V, \alpha)$, где p — простое и $p > 2$. Пусть $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ — множество вершин G. Из вершины v_i в вершину v_j есть дуга только в том случае, когда $(j - i)$ — квадратичный вычет по модулю p, то есть по теореме Эйлера $(j-i)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$. Обозначим полученный граф через T_p.

Рассмотрим общий вид матрицы смежности этого графа:

$$\begin{pmatrix} (1-1)^{(p-1)/2} \bmod p & (2-1)^{(p-1)/2} \bmod p & \ldots & (p-1)^{(p-1)/2} \bmod p \\ (1-2)^{(p-1)/2} \bmod p & (2-2)^{(p-1)/2} \bmod p & \ldots & (p-2)^{(p-1)/2} \bmod p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (1-p)^{(p-1)/2} \bmod p & (2-p)^{(p-1)/2} \bmod p & \ldots & (p-p)^{(p-1)/2} \bmod p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение на множестве вершин графа T_p, при котором v_i переходит в $v_{(i+1) \bmod p}$. Пусть в исходном графе была дуга из v_i в v_j, значит, $(j-i)^{(p-1)/2} \equiv 1 \bmod p$. После отображения получаем $v_j \Rightarrow v_{(j+1) \bmod p}$, $v_i \Rightarrow v_{(i+1) \bmod p}$. В полученном графе существует дуга из $v_{(i+1) \bmod p}$ в $v_{(j+1) \bmod p}$, если выполняется соотношение

$$(j+1-(i+1))^{(p-1)/2} = (j-i)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p.$$

Значит, отображение $v_i \Rightarrow v_{(i+1) \bmod p}$ является автоморфизмом данного графа. Применив нужное количество раз данный автоморфизм, мы сможем отобразить любую вершину графа в любую другую. Получается, что группа автоморфизмов графа T_p транзитивна. Известно, что граф с транзитивной группой автоморфизмов является точным 1-расширением [1]. Кроме того, то, что циклическая перестановка является автоморфизмом, означает, что T_p является циркулянтом [6].

В работе [5] указано, что при $p = 4n + 3$ граф такого вида является турниром. Рассмотрим пример при $p = 7$. Квадратичными вычетами по модулю 7 являются числа

$1^2 \bmod 7 = 1$, $2^2 \bmod 7 = 4$ и $3^2 \bmod 7 = 2$. Значит, матрица смежности графа T_7 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что граф T_7 изоморфен точному 2-расширению турнира, изображенного на рис 1.

Найдем все автоморфизмы для графа T_p. Для этого воспользуемся алгоритмом, предложенным Морисом в [6] и основывающимся на следующей теореме:

Теорема (Бернсайд, 1901). Пусть Γ — транзитивная группа, действующая на множестве из p элементов, p — простое. Тогда либо Γ — дважды транзитивная группа, либо $\Gamma = \{F_{a,b} : a \in H \subset \mathbb{Z}_p^*, b \in \mathbb{Z}_p\}$, где $F_{a,b}(v_i) = v_{(ai+b) \bmod p}$.

Данная теорема задает вид всех автоморфизмов указанного графа T_p. Алгоритм их получения заключается в нахождении таких $a \in \mathbb{Z}_p^*$, для которых отображение $F_{a,b}(v_i) = v_{(ai+b) \bmod p}$ является автоморфизмом. В результате получим множество H, включающее найденные a. Если множество H совпадает с $\mathbb{Z}_p^*$, то группа Γ — дважды транзитивная группа.

Рассмотрим отображение множества вершин графа T_p, при котором вершина с номером i переходит в $ia \bmod p$. Пусть в исходном графе есть дуга из v_i в v_j. После отображения получим: $v_i \Rightarrow v_{ia \bmod p}$, $v_j \Rightarrow v_{ja \bmod p}$. В полученном графе существует дуга из v_{ia} в v_{ja}, если выполняется соотношение

$$(ja - ia)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p.$$

Перепишем полученное соотношение:

$$a^{(p-1)/2}(j-i)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p.$$

Очевидно, что $(j-i)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$, так как в исходном графе есть дуга из v_i в v_j. Следовательно, $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$.

Таким образом, отображение $F_{a,b}(v_i)$ является автоморфизмом T_p только в случае, когда $a \in \mathbb{Z}_p^*$ есть квадратичный вычет. Примечательно, что если a — квадратичный невычет, то отображение $F_{a,b}(v_i)$ является антиавтоморфизмом для данного графа (то есть такой перестановкой вершин, при которой все дуги графа заменяются на обратные).

Так как в $\mathbb{Z}_p^*$ всего $(p-1)/2$ квадратичных вычетов, то общее число автоморфизмов для T_p получается равным $p(p-1)/2$. Заметим, что количество автоморфизмов совпадает с количеством всевозможных пар вершин без учета порядка. Если удастся показать, что для любой пары вершин v_i и v_j, $i \neq j$, среди всех автоморфизмов графа T_p можно найти точно один автоморфизм, которому соответствует перестановка вида $v_i, v_j, \ldots$ или $v_j, v_i, \ldots$, то получится, что при удалении любой пары вершин мы получим изоморфные графы, а значит, T_p является точным 2-расширением.

То, что у T_p не может быть пары различных автоморфизмов, первые две вершины в которых совпадают, но идут в другом порядке, очевидно, поскольку, поменяв местами две первые вершины у любого турнира, мы изменим направление дуги, которая связывает эти две вершины, а перестановка остальных вершин на эту дугу никак не влияет.

Остается вопрос, может ли у T_p существовать пара различных автоморфизмов, не меняющих две начальные вершины графа. Мы уже описали вид всех автоморфизмов T_p; очевидно, интересующий нас вопрос можно сформулировать так: существуют ли $x, y, b \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq y$, и $a \in \mathbb{Z}_p^*$, такие, что

$$\begin{aligned} x &\equiv ax + b \pmod p; \\ y &\equiv ay + b \pmod p. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $a = 1$ и $b = 0$, то есть таким свойством обладает только тождественный автоморфизм.

Из всего описанного следует, что граф T_p является точным 1-расширением, а если p — простое число вида $4n + 3$, то T_p является точным 1- и 2-расширением для подходящих турниров.

Таким образом, турниры, которые являются точными 2-расширениями, существуют при числе вершин $7, 11, 19, 23, 31, \ldots$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
2. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения дополнений графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов: СГУ, 2001. №4. С. 11–19.
3. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения транзитивных турниров // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2006. №17. С. 187–190.
4. *Абросимов М. Б., Долгов А. А.* Семейства точных расширений турниров // Прикладная дискретная математика. 2008. №1. С. 101–107.
5. *Eplett W. J. R.* Self-converse tournaments // Canadian Mathematical Bulletin. 1979. No. 22. P. 23–27.
6. *Morris J.* Automorphism groups of circulant graphs — a survey // Graph Theory, Trends in Math. 2006. P. 311–325.