

ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТОВ

DOI 10.17223/20710410/9/10

УДК 621.391.1:004.7

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ НАД АВТОМАТАМИ В ПРОЕКТИРОВАНИИ РЕАКТИВНЫХ СИСТЕМ

А. Н. Чеботарёв

*Институт кибернетики НАН Украины, г. Киев, Украина***E-mail:** ancheb@gmail.com

Рассмотрена задача решения неравенств над автоматами, возникающая при композиционном подходе к проектированию реактивных систем. Задача формулируется и решается на уровне спецификаций автоматов в логическом языке L . Показано, как получить максимальное решение неравенства относительно операции синхронной композиции автоматов.

Ключевые слова: *реактивная система, спецификация в языке L , Σ -автомат, синхронная композиция Σ -автоматов, неравенство над Σ -автоматами, минимальное решение.*

Введение

Проектирование современных систем обработки информации все больше усложняется в связи с усложнением этих систем. Одним из основных способов борьбы со сложностью проектирования является модульный подход, связанный с декомпозицией проектируемой системы на подсистемы, которые взаимодействуют между собой в соответствии с определенными правилами композиции [1–3]. Многие задачи, возникающие при таком подходе к проектированию, могут быть сформулированы следующим образом. Заданы спецификация системы, которая реализуется в виде композиции двух модулей, и спецификация одного из этих модулей. Требуется определить (специфицировать) другой модуль так, чтобы его композиция с заданным модулем удовлетворяла спецификации системы. Для уточнения этой задачи необходимо:

- 1) определить способ представления спецификаций отдельных модулей и всей системы в целом;
- 2) уточнить понятие композиции модулей;
- 3) уточнить отношение, соответствующее понятию «модуль удовлетворяет спецификации».

Указанные уточнения будут сделаны для реактивных систем [4], т. е. систем, постоянно взаимодействующих с окружающей средой. Для спецификации таких систем будет использоваться язык L [5], представляющий собой фрагмент логики предикатов первого порядка с одноместными предикатами, которые интерпретируются на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел. Рассматриваемая задача сводится к решению уравнений (неравенств) над автоматными моделями взаимодействующих модулей, представленных спецификациями в языке L . Поскольку автоматные модели определяют поведение

модуля, работающего потенциально бесконечно, рассматриваются автоматы над бесконечными входными последовательностями, что соответствует понятию циклического автомата.

1. Язык спецификации L

Спецификация в языке L имеет вид формулы $\forall t F(t)$, где $F(t)$ — формула, построенная с помощью логических связок из атомарных формул (атомов) вида $p(t + k)$, где p — одноместный предикатный символ, t — переменная, принимающая значения из множества целых чисел, рассматриваемого как множество моментов дискретного времени, а k — целочисленная константа, называемая *рангом атома*. Разность между максимальным и минимальным значениями рангов атомов, встречающихся в формуле, называется её *глубиной*. В дальнейшем формулы языка L вида $\forall t F(t)$ будем называть L -формулами.

При определении семантики языков спецификации реактивных систем такие языки рассматриваются как формализмы для задания множеств сверхслов (бесконечных слов) в алфавите двоичных векторов, длина которых равна количеству различных предикатных символов, встречающихся в спецификации. Определим необходимые понятия, касающиеся сверхслов.

Пусть Σ — конечный алфавит. Отображения $u : \mathbb{Z} \rightarrow \Sigma$ и $l : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$ называются соответственно двусторонним сверхсловом (обозначается $\dots u(-2)u(-1)u(0)u(1)u(2)\dots$) и сверхсловом (обозначается $l(1)l(2)\dots$) в алфавите Σ . Отрезок $u(\tau)u(\tau+1)\dots u(\tau+k)$ двустороннего сверхслова u обозначается $u(\tau, \tau+k)$. Бесконечный отрезок $u(k+1, \infty)$ будем называть k -суффиксом двустороннего сверхслова u . Множество всех двусторонних сверхслов в алфавите Σ будем обозначать $\Sigma^{\mathbb{Z}}$.

Перейдем теперь к описанию семантики языка L . Каждой L -формуле $F = \forall t F(t)$ ставится в соответствие множество моделей для этой формулы, т. е. множество таких интерпретаций, на которых F истинна. Пусть $\Omega = \{p_1, \dots, p_m\}$ — множество всех предикатных символов, встречающихся в формуле F (сигнатура формулы). Интерпретация формулы F — это упорядоченный набор определенных на $\mathbb{Z}$ одноместных предикатов $\pi_1, \dots, \pi_m$, соответствующих предикатным символам из Ω . Пусть Σ — множество всех двоичных векторов длины m , тогда интерпретацию $I = \langle \pi_1, \dots, \pi_m \rangle$ можно представить в виде двустороннего сверхслова в алфавите Σ , а множество всех моделей для F — в виде множества $M(F)$ двусторонних сверхслов в этом алфавите. В дальнейшем не будем различать интерпретации и соответствующие им двусторонние сверхслова, поэтому будем говорить об истинности формулы F на двустороннем сверхслове $u \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ и значении формулы $F(t)$ в некоторой позиции τ двустороннего сверхслова u , понимая под этим значение формулы $F(\tau)$ в интерпретации u .

При интерпретации формул вида $\forall t F(t)$ на множестве целых чисел для любого $k \in \mathbb{Z}$ справедлива эквивалентность $\forall t F(t) \Leftrightarrow \forall t F(t+k)$, где $F(t+k)$ обозначает формулу, полученную из $F(t)$ путем добавления k к рангам всех её атомов (сдвиг на k). Таким образом, можно ограничиться рассмотрением формул, у которых максимальный ранг атомов равен 0. Будем считать, что L -формула $F = \forall t F(t)$ задает множество 0-суффиксов всех двусторонних сверхслов из $M(F)$. Обозначим это множество сверхслов $W(F)$.

2. Автоматная семантика языка L

Определение 1. Конечный неинициальный X – Y -автомат A — это четверка $\langle X, Y, Q, \chi_A \rangle$, где X, Y, Q — конечные множества соответственно входных символов, выходных символов и состояний; $\chi_A : Q \times X \times Y \rightarrow 2^Q$ — функция переходов автомата.

X – Y -автомат A называется *квазидетерминированным*, если $|\chi_A(q, x, y)| \leq 1$ для любых $q \in Q, x \in X, y \in Y$. Квазидетерминированные X – Y -автоматы удобно рассматривать как детерминированные частичные автоматы без выхода, с входным алфавитом $\Sigma = X \times Y$. Такой автомат $A = \langle \Sigma, Q, \delta_A \rangle$, где $\delta_A : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ — частичная функция, будем называть Σ -автоматом.

Определение 2. Σ -автомат $A = \langle \Sigma, Q, \delta_A \rangle$ называется *циклическим*, если для каждого $q \in Q$ существуют такие $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ и $q_1, q_2 \in Q$, что $q_1 = \delta_A(q, \sigma_1)$ и $q = \delta_A(q_2, \sigma_2)$.

В дальнейшем под автоматом будем понимать циклический Σ -автомат. Такой автомат можно однозначно охарактеризовать в терминах допустимых сверхслов.

Определение 3. Сверхслово $l = \sigma_1 \sigma_2 \dots$ в алфавите Σ *допустимо в состоянии* q автомата A , если существует такое сверхслово состояний $q_0 q_1 q_2 \dots$, где $q_0 = q$, что $q_{i+1} = \delta_A(q_i, \sigma_{i+1})$ для любого $i = 0, 1, 2, \dots$. Сверхслово l *допустимо для автомата* A , если оно допустимо хотя бы в одном из его состояний. Множество всех сверхслов, допустимых для автомата A , обозначим $W(A)$.

Два Σ -автомата A_1 и A_2 будем называть *эквивалентными* (слабо эквивалентными), если $W(A_1) = W(A_2)$.

Предполагается, что символы алфавита Σ представляют собой двоичные векторы длины m , что соответствует кодированию абстрактных символов наборами значений двоичных переменных из $\Omega = \{x_1, \dots, x_m\}$. При использовании языка L для спецификации автоматов предикатные символы соответствуют этим переменным.

Автоматная семантика языка L определяется следующей теоремой.

Теорема 1 [5]. Для всякой непротиворечивой формулы F вида $\forall t F(t)$ существует в общем случае частичный неинициальный циклический автомат A , для которого множество всех допустимых сверхслов совпадает с множеством сверхслов, задаваемых формулой F .

Будем говорить, что автомат A удовлетворяет спецификации F , если $W(A) \subseteq W(F)$. Класс автоматов, специфицируемых в языке L , совпадает с автоматами с конечной памятью [6].

При определении множества сверхслов, задаваемого формулой $\forall t F(t)$, а следовательно, и множества сверхслов, допустимых для специфицируемого ею автомата, удобно использовать понятие пространства состояний для этой формулы [5]. Пусть Ω — сигнатура формулы $F(t)$, а r — её глубина. Обозначим $\Sigma(\Omega)$ множество всех двоичных векторов длины $|\Omega|$, где $|\Omega|$ — мощность множества Ω . Последовательность $s_0 s_1 \dots s_r$ векторов из $\Sigma(\Omega)$ назовем состоянием глубины r , а множество $Q(r, \Omega)$ всех таких последовательностей — пространством состояний глубины r для формулы $F(t)$. На множестве $Q(r, \Omega)$ определим отношение N непосредственного следования так, что за каждым состоянием $q = s_0 s_1 \dots s_r$ непосредственно следуют $2^{|\Omega|}$ состояний вида $s_1 \dots s_r s$, где $s \in \Sigma(\Omega)$. Множество всех состояний, непосредственно следующих за q , будем обозначать $N(q)$. Если компоненты вектора s_i в состоянии $q = s_0 s_1 \dots s_r$ рассматривать как истинностные значения соответствующих атомов ранга $i - r$ при некотором упорядочении множества Ω , то можно говорить о значении формулы $F(t)$ на состоянии q .

Формулу $F(t)$ будем рассматривать как представление множества $Q(F(t))$ состояний из $Q(r, \Omega)$, а именно тех состояний, на которых она истинна. Пусть $G(F)$ — граф ограничения отношения N на множество $Q(F(t))$. Граф $G = \langle V, E \rangle$, где V — множество вершин, а E — множество дуг графа, будем называть циклическим, если для каждой его вершины q существуют такие вершины q_1 и q_2 , что дуги (q_1, q) и (q, q_2) принадлежат E .

Несложно убедиться в справедливости следующей леммы, которую приведем без доказательства.

Лемма 1. Пусть $G^*(F)$ — максимальный циклический подграф графа $G(F)$. Тогда $\forall t F^*(t) \Leftrightarrow \forall t F(t)$, где $F^*(t)$ — формула, задающая множество вершин графа $G^*(F)$.

Если сверхслово l принадлежит $W(F)$, то ему соответствует бесконечный маршрут в графе $G^*(F)$, и наоборот, каждому бесконечному маршруту в $G^*(F)$ соответствует сверхслово, принадлежащее $W(F)$.

3. Синхронная композиция автоматов

Пусть $A_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1)$ и $A_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2)$ — циклические Σ -автоматы с одним и тем же входным алфавитом Σ . *Синхронной композицией* автоматов A_1 и A_2 (обозначается $A_1 \bullet A_2$) назовем максимальный циклический подавтомат автомата $C = \langle \Sigma, Q_C, \delta_C \rangle$, определяемого следующим образом: $Q_C = Q_1 \times Q_2$; значение $\delta_C(\langle q_1, q_2 \rangle, \sigma)$, где $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, $\sigma \in \Sigma$, определено тогда и только тогда, когда значения $\delta_1(q_1, \sigma)$ и $\delta_2(q_2, \sigma)$ определены, и равно $\langle \delta_1(q_1, \sigma), \delta_2(q_2, \sigma) \rangle$. Пусть F_A и F_B — спецификации в языке L соответственно автоматов A и B , тогда формула $F_A \& F_B$ специфицирует автомат $A \bullet B$. Заметим, что Σ -автоматы $A = (\Sigma_A, Q_A, \delta_A)$ и $B = (\Sigma_B, Q_B, \delta_B)$, где $\Sigma_A = \Sigma(\Omega_A)$, а $\Sigma_B = \Sigma(\Omega_B)$, можно рассматривать как Σ -автоматы над одним и тем же алфавитом $\Sigma = \Sigma(\Omega_A \cup \Omega_B)$. Это позволяет приведенное выше определение синхронной композиции автоматов естественным образом распространить на Σ -автоматы с различающимися алфавитами.

Вектор $\sigma \in \Sigma(\Omega)$ будем рассматривать как отображение $\sigma : \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$. Проекцией $\sigma \in \Sigma(\Omega)$ на $\Omega_1 \subseteq \Omega$ называется ограничение отображения σ на множество Ω_1 .

Определение 4. Ограничением автомата $A = \langle \Sigma(\Omega), Q, \delta \rangle$ на множество переменных (предикатных символов) $\Omega_1 \subseteq \Omega$ будем называть автомат $A_1 = \langle \Sigma_1, Q, \delta_1 \rangle$, где $\Sigma_1 = \Sigma(\Omega_1)$ и $q_1 \in \delta_1(q, \sigma_1)$ тогда и только тогда, когда существует такое $\sigma \in \Sigma(\Omega)$, что σ_1 есть проекция σ на Ω_1 и $\delta(q, \sigma) = q_1$.

Рассмотрим структуру, представленную на рис. 1. Здесь I_1, I_2, U и т. д. — множества двоичных переменных, причем пересечения $I_1 \cap I_2, U \cap O_1, V \cap O_2$ могут быть непустыми.

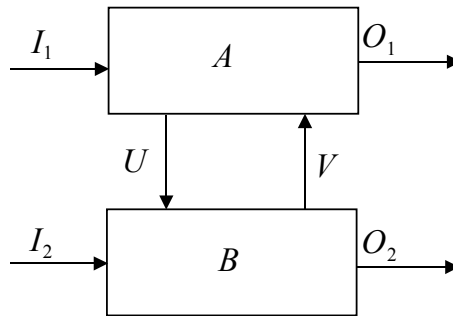


Рис. 1. Синхронная композиция автоматов

Пусть $A = \langle \Sigma(\Omega_A), Q_A, \delta_A \rangle$, где $\Omega_A = I_1 \cup O_1 \cup V \cup U$, а $B = \langle \Sigma(\Omega_B), Q_B, \delta_B \rangle$, где $\Omega_B = I_2 \cup O_2 \cup V \cup U$. Для такой структуры *внешней синхронной композиции* автоматов A и B (обозначается $A \circ B$) будем называть ограничение Σ -автомата $A \bullet B$ на множество переменных $\Omega_C = I_1 \cup I_2 \cup O_1 \cup O_2$.

4. Уравнения над автоматами

На множестве Σ -автоматов с одним и тем же входным алфавитом определим отношение $\leq$ следующим образом: $A \leq B$ тогда и только тогда, когда $W(A) \subseteq W(B)$.

Пусть в приведенной выше структуре заданы Σ -автоматы $A = \langle \Sigma(\Omega_A), Q_A, \delta_A \rangle$, где $\Omega_A = I_1 \cup O_1 \cup V \cup U$, и $C = \langle \Sigma(\Omega_C), Q_C, \delta_C \rangle$, где $\Omega_C = I_1 \cup I_2 \cup O_1 \cup O_2$. Рассмотрим неравенство $A \circ X \leq C$. Здесь X — неизвестное, принимающее значения из множества циклических Σ -автоматов с входным алфавитом $\Sigma = \Sigma(I_2 \cup U \cup O_2 \cup V)$. Таким образом, Σ -автомат B есть решение рассматриваемого неравенства, если $W(A \circ B) \subseteq W(C)$. Задача состоит в нахождении максимального решения неравенства $A \circ X \leq C$ или решения уравнения $A \circ X = C$. Поскольку задача рассматривается на уровне спецификаций автоматов в языке L , решение ищется в классе автоматов с конечной памятью. В этом случае максимальным решением будем называть такое решение B , что не существует никакого другого неэквивалентного ему автомата B_1 , также являющегося решением и такого, что $B \leq B_1$. Чтобы сформулировать эту задачу на уровне спецификаций, определим понятие *минимальной формы спецификации* $F = \forall t F(t)$.

Пусть $F = \forall t F(t)$ — непротиворечивая формула глубины r с сигнатурой $\Omega = \{p_1, \dots, p_q\}$. Формулу $F(t)$ будем рассматривать как пропозициональную формулу с пропозициональными переменными $p_1(t), \dots, p_q(t), p_1(t-1), \dots, p_q(t-1), \dots, p_1(t-r), \dots, p_q(t-r)$.

Пусть $F_1(t)$ и $F_2(t)$ — такие, возможно логически неэквивалентные, формулы, что $\forall t F_1(t)$ и $\forall t F_2(t)$ задают одно и то же множество сверхслов. Тогда формула $\forall t F_1(t) \& F_2(t)$ задает это же множество. Будем рассматривать некоторое каноническое представление формулы $F(t)$, скажем, совершенную дизъюнктивную нормальную форму. Пусть $S^r(F) = \{F_i = \forall t F_i(t) : i = 1, \dots, N\}$ — множество всех спецификаций глубины r , представленных в канонической форме и задающих то же множество сверхслов, что и $F = \forall t F(t)$. Спецификацию $\min^r(F) = F_1 \& \dots \& F_N$ назовем *канонической минимальной формой* порядка r спецификации F . Из определения канонической минимальной формы спецификации следует её единственность.

Пусть $\forall t F_{\min}(t)$ — каноническая минимальная форма спецификации порядка r . Тогда всякую спецификацию $\forall t F(t)$ глубины r , где $F(t) \Leftrightarrow F_{\min}(t)$, назовем *минимальной формой порядка r* этой спецификации. Если $\forall t F_{\min}(t)$ — минимальная форма спецификации $\forall t F(t)$, то $F_{\min}(t) \rightarrow F(t)$. Построение минимальной формы формулы $\forall t F(t)$ состоит в преобразовании формулы $F(t)$, описанном в [7]. Результат такого преобразования будем обозначать $\min^r(F(t))$. Имеется тесная связь между минимальной формой представления формулы $F = \forall t F(t)$ и графом $G(F)$, ассоциируемым с формулой $F(t)$, представленной в пространстве состояний глубины r , а именно $\min^r(F(t))$ задает множество состояний, соответствующее вершинам циклического графа $G^*(F)$.

Теперь определим отношение на спецификациях, соответствующее отношению $A \leq B$ на циклических Σ -автоматах. Пусть $F_A = \forall t F_A(t)$ и $F_B = \forall t F_B(t)$ — формулы, специфицирующие соответственно автоматы A и B . Несложно показать, что $A \leq B$ тогда и только тогда, когда $\min(F_A(t)) \rightarrow F_B(t)$, или, что то же самое, $\min(F_A(t)) \rightarrow \min(F_B(t))$. Если глубина r формулы $F_B(t)$ превышает глубину формулы $F_A(t)$, то для $F_A(t)$ следует рассматривать минимальную форму порядка r .

Пусть $F_A = \forall t F_A(t)$ и $F_C = \forall t F_C(t)$ — спецификации соответственно автоматов $A = \langle \Sigma(\Omega_A), Q_A, \delta_A \rangle$ и $C = \langle \Sigma(\Omega), Q, \delta \rangle$, где $\Omega \subseteq \Omega_A$. Ограничение автомата A на Ω обозначим $[A]_\Omega$. Можно показать, что условию $[A]_\Omega \leq C$ соответствует условие $\min^r(F_A(t)) \rightarrow F_C(t)$, где r — наибольшая из глубин формул $F_A(t)$ и $F_C(t)$.

Теперь рассматриваемую задачу можно переформулировать следующим образом: найти максимальное решение $F_X(t)$ сигнатуры $\Omega_B = I_2 \cup U \cup O_2 \cup V$, удовлетворяющее формуле $\min(F_A(t) \& F_X(t)) \rightarrow F_C(t)$. Здесь, как и раньше, максимальным решением называется такое решение $F_B(t)$, что не существует никакой другой неэквивалентной ему формулы $F(t)$, также являющейся решением, и такой, что $F_B(t) \rightarrow F(t)$. Искомую формулу $F_B(t)$ будем строить следующим образом. Сначала получим максимальное решение $F'_B(t)$ с сигнатурой $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$, а затем построим максимальную формулу $F_B(t)$ сигнатуры Ω_B , имплицитующую $F'_B(t)$. Решение этой задачи осложняется неоднозначностью представления автомата спецификацией в языке L .

Всякая формула $F(t)$ глубины r задает множество состояний в соответствующем пространстве состояний. *Максимальной формой* формулы $F(t)$ назовем такую формулу, что добавление любого состояния пространства состояний к задаваемому ею множеству состояний приводит к спецификации, не эквивалентной формуле $\forall t F(t)$. Существует одно (с точностью до эквивалентности) минимальное представление спецификации определенной глубины и много различных максимальных представлений. Множество всех максимальных представлений для $F(t)$ обозначим $\text{MAX}(F(t))$.

Теперь покажем, что формула $F'_B(t) = \neg(\min(F_A(t))) \vee \max(\min(F_A(t) \& F_C(t)))$, где $\max(F(t))$ — любое максимальное представление соответствующей формулы, есть решение, т. е. что формула $\min(F_A(t) \& F'_B(t)) \rightarrow F_C(t)$ тождественно истинна. Предварительно приведем некоторые используемые при этом соотношения:

$$\min(\min(F(t))) = \min(F(t)); \quad (1)$$

$$\min(\max(F(t))) = \min(F(t)); \quad (2)$$

$$\min(\min(F_1(t)) \& F_2(t)) = \min(F_1(t) \& F_2(t)); \quad (3)$$

$$\min(F_1(t) \& F_2(t)) \rightarrow (\min(F_1(t)) \& \min(F_2(t))). \quad (4)$$

Несложно показать, что формула $\min(F_A(t) \& F'_B(t)) \rightarrow F_C(t)$ равносильна формуле $\min(F_A(t) \& F'_B(t)) \rightarrow \min(F_A(t) \& F_C(t))$. Поэтому покажем, что приведенное выше значение для $F'_B(t)$ удовлетворяет последней. Согласно (3),

$$\min(F_A(t) \& F'_B(t)) = \min(\min(F_A(t)) \& F'_B(t)).$$

Подставив формулу $F'_B(t)$ в правую часть этой эквивалентности, получим

$$\min(\min(F_A(t)) \& \max(\min(F_A(t) \& F_C(t)))).$$

В силу (4) имеем

$$\begin{aligned} \min(\min(F_A(t)) \& \max(\min(F_A(t) \& F_C(t)))) &\rightarrow \\ &\rightarrow \min(\min(F_A(t))) \& \min(\max(\min(F_A(t) \& F_C(t)))). \end{aligned}$$

В силу (1) и (2) правая часть этой импликации равна $\min(F_A(t)) \& \min(F_A(t) \& F_C(t))$. Очевидно, что $\min(F_A(t)) \& \min(F_A(t) \& F_C(t)) \rightarrow \min(F_A(t) \& F_C(t))$. Таким образом, $\min(F_A(t) \& F'_B(t)) \rightarrow \min(F_A(t) \& F_C(t))$, что и требовалось показать.

Теперь покажем, что для любого решения $F_B(t)$ сигнатуры Ω существует такая максимальная форма формулы $\min(F_A(t) \& F_C(t))$, что

$$F_B(t) \rightarrow (\neg(\min(F_A(t))) \vee \max(\min(F_A(t) \& F_C(t)))),$$

т. е. максимальное решение содержится среди $\neg(\min(F_A(t))) \vee \text{MAX}(\min(F_A(t) \& F_C(t)))$. Пусть $F_B(t)$ — произвольное решение. Представим его в виде

$$F_B(t) = \min(F_A(t)) \& F_B(t) \vee \neg(\min(F_A(t))) \& F_B(t).$$

Достаточно показать, что $\min(F_A(t)) \& F_B(t) \rightarrow \max(\min(F_A(t) \& F_C(t)))$. Будем рассматривать только такие решения $F_B(t)$, для которых

$$\min(F_A(t) \& F_B(t)) = \min(F_A(t) \& F_C(t)),$$

т. е. $\max(\min(F_A(t) \& F_C(t))) = \max(\min(F_A(t) \& F_B(t)))$ для любой максимальной формы. Очевидно, что такие значения для $F_B(t)$ существуют — достаточно в качестве $F_B(t)$ взять формулу $F_C(t)$, рассматриваемую как формулу над $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$. Всякое такое значение $F_B(t)$ дает максимальное значение для $\min(F_A(t) \& F_B(t))$, удовлетворяющее соответствующей импликации. Неформально это соответствует реализации максимальной части автомата C . Ясно, что всякое максимальное значение $F'_B(t)$ находится среди таких значений.

Следует отметить, что для любой формулы $F(t)$ существует такая максимальная форма формулы $\min(F(t))$, что $F(t) \rightarrow \max(\min(F(t)))$. Таким образом, для $\min(F_A(t)) \& F'_B(t)$ существует такая максимальная форма $\max(\min(\min(F_A(t)) \& F'_B(t)))$, что $\min(F_A(t)) \& F'_B(t) \rightarrow \max(\min(\min(F_A(t)) \& F'_B(t))) = \max(\min(F_A(t) \& F'_B(t)))$, а следовательно, $\min(F_A(t)) \& F'_B(t) \rightarrow \max(\min(F_A(t) \& F_C(t)))$. Другими словами, существует такая максимальная форма формулы $\min(F_A(t) \& F_C(t))$, что формула $\neg(\min(F_A(t))) \vee \max(\min(F_A(t) \& F_C(t)))$ будет максимальным решением. Вычисление всех максимальных форм формулы весьма сложно, поэтому будем строить решение, которое не требует вычисления максимальной формы и не сильно отличается от максимального решения. В качестве такого решения можно взять формулу $\neg(\min(F_A(t))) \vee F_C(t)$.

Теперь для получения решения $F_B(t)$ сигнатуры Ω_B необходимо взять $\forall$ -проекцию формулы $F'_B(t)$ на её переменные, определяемые сигнатурой Ω_B .

Пусть $F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ — пропозициональная формула от переменных $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$. $\forall$ -проекцией формулы $F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ на множество переменных $\{x_1, \dots, x_m\}$ называется формула $\forall y_1 \dots \forall y_n F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = F(x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0) \& F(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0, 1) \& \dots \& F(x_1, \dots, x_m, 1, \dots, 1, 1)$.

Если $\Omega_B = \{p_1, \dots, p_k\}$, то для формулы $F'_B(t)$ глубины r строится её проекция на множество переменных $\{p_1(t), \dots, p_k(t), p_1(t-1), \dots, p_k(t-1), \dots, p_1(t-r), \dots, p_k(t-r)\}$. Для вычисления проекции формулы на подмножество аргументов её удобно представлять в так называемой *нормальной форме* [8]. Нормальная форма имеет вид

$\bigvee_{i=1}^n F_i(t-1) \& f_i(t)$, где $f_i(t)$ — формула, построенная из атомов нулевого ранга, а $F_i(t-1)$ — из атомов, ранг которых не превышает -1 . Кроме того, $F_i(t-1) \& F_j(t-1) \equiv 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ (условие ортогональности). Нормальная форма вида $\bigvee_{i=1}^n F_i(t-1) \& f_i(t)$ называется *полной*, если $\bigvee_{i=1}^n F_i(t-1) \equiv 1$. Отрицание формулы $F(t)$,

представленной в полной нормальной форме, имеет вид $\bigvee_{i=1}^n F_i(t-1) \& \neg f_i(t)$, что также является нормальной формой. Нормальная форма формулы $\neg(\min(F_A(t))) \vee F_C(t)$ строится из нормальных форм формул $\neg(\min(F_A(t)))$ и $F_C(t)$ при помощи операции дизъюнктивного произведения [8].

Утверждение 1. Чтобы получить ДНФ формулы $\forall y_1 \dots \forall y_n F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, необходимо в ДНФ формулы $F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ последовательно осуществить склеивания по переменным $y_1, \dots, y_n$ и после всех возможных склеиваний по y_i удалить все конъюнкции, содержащие y_i или $\neg y_i$.

Основная идея использования нормальной формы для построения $\forall$ -проекции формулы состоит в том, чтобы задачу большой размерности свести к ряду задач существенно меньшей размерности.

Пусть $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$ — сигнатура формулы $F(t)$, и необходимо построить проекцию этой формулы (рассматриваемой как пропозициональная формула) на множество переменных, соответствующих символам $x_1, \dots, x_m$. Обозначим множество этих переменных $\Omega(t)$. Чтобы упростить рассмотрение, будем считать, что $F(t)$ имеет глубину 1. Таким образом, $\Omega(t) = \{x_1(t-1), \dots, x_m(t-1), x_1(t), \dots, x_m(t)\}$. Проекцию на $\Omega(t)$ будем строить в два этапа: сначала построим проекцию на множество $\Omega'(t) = \{x_1(t-1), \dots, x_m(t-1), y_1(t-1), \dots, y_n(t-1), x_1(t), \dots, x_m(t)\}$, а затем — проекцию результата на $\Omega(t)$. В нормальной форме формулы $F(t)$ вида $\bigvee_{i=1}^n F_i(t-1) \& f_i(t)$ только формулы $f_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) зависят от переменных ранга 0. Поскольку $F_i(t-1) \& F_j(t-1) \equiv 0$ для любых $i \neq j$, то для получения проекции на множество переменных $\Omega'(t)$ склеивания по переменным $y_1(t), \dots, y_n(t)$ можно осуществлять независимо в каждой формуле $f_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$). Таким образом, построение проекции формулы $F(t)$ на множество переменных $\Omega'(t)$ сводится к построению проекций n существенно более простых формул $f_1(t), \dots, f_n(t)$ на это множество переменных.

После получения проекции $F(t)$ на $\Omega'(t)$ следует построить проекцию этой формулы на множество переменных $\Omega(t)$. Для этого её нужно преобразовать в такую формулу вида $\bigvee_{i=1}^n F_i(t-1) \& f_i(t)$, чтобы для любых $i \neq j$ выполнялось $f_i(t) \& f_j(t) \equiv 0$. Поскольку функции $F_i(t-1)$ ($i = 1, \dots, n$) зависят только от переменных $x_1(t-1), \dots, x_m(t-1), y_1(t-1), \dots, y_n(t-1)$, построение $\forall$ -проекции всей формулы сводится к построению $\forall$ -проекций формул $F_i(t-1)$ в конъюнкциях $F_i(t-1) \& f_i(t)$ на множество $\{x_1(t-1), \dots, x_m(t-1)\}$.

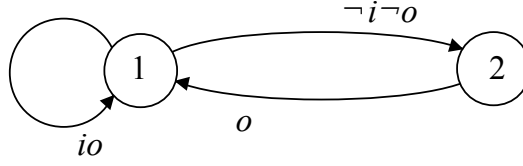
Пример. Пусть в структуре, изображенной на рис. 1, $I_1 = \{i\}$, $O_1 = \{o\}$, $U = \{u\}$, $V = \{v\}$ и $I_2 = O_2 = \emptyset$. Таким образом, $\Omega_C = \{i, o\}$, $\Omega_A = \{i, u, v, o\}$, $\Omega_B = \{u, v\}$.

Для упрощения записи спецификаций автоматов примем следующие соглашения: атом нулевого ранга вида $p(t)$ записывается как p , для атома ранга -1 вида $p(t-1)$ будем использовать запись $[p]$, знаки конъюнкции и квантора всеобщности в формулах опускаются. Обозначение $[p]$ распространим на формулы, построенные из атомов ранга -1 , например, формулу $p_1(t-1) \vee p_2(t-1) \& p_3(t-1)$ будем записывать как $[p_1 \vee p_2 p_3]$. В таких обозначениях спецификации автоматов A и C , представленные в нормальной форме, имеют вид

$$F_A(t) = [o]u(io \vee \neg i \neg o) \vee [\neg v \neg o](\neg v \neg uo \vee vu \neg o) \vee [v \neg o] \neg u(vo \vee \neg v \neg o),$$

$$F_C(t) = [o](io \vee \neg i \neg o) \vee [\neg o]o.$$

Автомат C , специфицируемый формулой $\forall t F_C(t)$, изображен на рис. 2.

Рис. 2. Автомат C

Спецификацию автомата B сигнатуры $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ будем строить в виде $F'_B(t) = \neg(\min(F_A(t))) \vee F_C(t)$.

Минимальная форма формулы $F_A(t)$ имеет вид

$$\min(F_A(t)) = [o(i \vee \neg u)]u(io \vee \neg i \neg o) \vee [\neg v \neg o(\neg i \vee \neg u)](\neg v \neg uo \vee vu \neg o) \vee [vu \neg o] \neg u(vo \vee \neg v \neg o).$$

Для получения полной нормальной формы следует добавить конъюнкцию $[v \neg u \neg o \vee \neg iuo \vee i \neg vu \neg o](0)$. Теперь отрицание формулы $\min(F_A(t))$ получается путём инвертирования всех подформулы вида $f_i(t)$:

$$\neg(\min(F_A(t))) = [o(i \vee \neg u)](\neg u \vee i \neg o \vee \neg io) \vee [\neg v \neg o(\neg i \vee \neg u)](v \neg u \vee uo \vee \neg v \neg o) \vee [vu \neg o](v \neg o \vee \neg vo \vee u) \vee [v \neg u \neg o \vee \neg iuo \vee i \neg vu \neg o](1).$$

Дизъюнктивное произведение формул $\neg(\min(F_A(t)))$ и $F_C(t)$ даёт

$$\begin{aligned} F'_B(t) &= [o(i \vee \neg u)](1) \vee [\neg v \neg o(\neg i \vee \neg u)](\neg u \vee o \vee \neg v) \vee [vu \neg o](u \vee o \vee v) \vee \\ &\vee [v \neg u \neg o \vee \neg iuo \vee i \neg vu \neg o](1) = [o \vee v \neg u \vee i \neg vu](1) \vee \\ &\vee [\neg i \neg v \neg o \vee \neg v \neg u \neg o](\neg u \vee o \vee \neg v) \vee [vu \neg o](u \vee o \vee v). \end{aligned}$$

Построим теперь $\forall$ -проекцию формулы $F'_B(t)$ на $\{[v], [u], v, u\}$.

На первом этапе получим

$$[o \vee v \neg u \vee i \neg vu](1) \vee [\neg i \neg v \neg o \vee \neg v \neg u \neg o](\neg v \vee \neg u) \vee [vu \neg o](v \vee u).$$

Ортогонализация формул $f_i(t)$ даёт $[o \vee \neg v \vee \neg u](\neg v \neg u) \vee [1](\neg vu \vee v \neg u) \vee [o \vee v \vee iu](vu)$.

На втором этапе получим $F_B(t) = [\neg v \vee \neg u](\neg v \neg u) \vee [1](\neg vu \vee v \neg u) \vee [v](vu)$.

Покажем, что полученная формула специфицирует автомат, являющийся решением уравнения $A \circ X = C$. Для этого построим спецификацию композиции автоматов A и B , т. е. $F_A(t) \& F_B(t)$. Перемножив соответствующие формулы, получим

$$[\neg v \neg o](\neg v \neg uo) \vee [v \neg u \neg o](\neg v \neg u \neg o) \vee [o] \neg vu(io \vee \neg i \neg o) \vee [v \neg o](v \neg uo) \vee [vo]vu(io \vee \neg i \neg o). \quad (5)$$

Эта формула специфицирует автомат, изображенный на рис. 3.

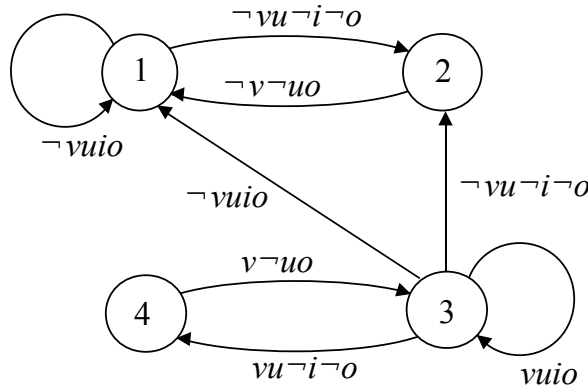


Рис. 3. Автомат, специфицируемый формулой (5)

Нетрудно видеть, что ограничение этого автомата на множество переменных $\{i, o\}$ эквивалентно автомату C .

Заключение

Рассмотрена задача решения неравенств над Σ -автоматами, возникающая при композиционном подходе к проектированию реактивных систем. Такие неравенства характеризуются операцией композиции автоматов и бинарным отношением $\leq$, определенном на множестве автоматов. Задача формулируется и решается на уровне спецификаций автоматов в логическом языке L , для чего соответствующие понятия определяются для спецификаций. При решении неравенств такого рода обычно интерес представляют наибольшие в смысле указанного отношения решения, однако в нашем случае отношение $\leq$ является частичным порядком, для которого наибольшего решения может не существовать. В связи с этим рассматривается задача отыскания максимального решения. Выбор для спецификации достаточно простого языка позволил свести решение этой задачи к преобразованию пропозициональных формул.

В приложениях, ориентированных на схемную реализацию проектируемой системы, используются другие виды композиции, обеспечивающие невозможность образования порочного цикла при изменении входных и выходных сигналов взаимодействующих модулей. Как показано в [9], многие из таких видов композиции могут быть сведены к рассмотренной в настоящей статье синхронной композиции циклических Σ -автоматов путём простого преобразования одной или обеих спецификаций, участвующих в композиции.

Основная идея предложенного подхода состоит в том, чтобы сначала построить решение для синхронной композиции, т. е. в виде формулы, сигнатура которой состоит из всех предикатных символов, встречающихся в спецификациях, а затем получить решение для внешней композиции, взяв $\forall$ -проекцию полученной формулы на соответствующее множество переменных. Предложен подход к построению такой проекции путём сведения задачи большой размерности к ряду задач существенно меньшей размерности.

Следует заметить, что задача решается для неинициальных спецификаций, хотя на практике, как правило, рассматриваются инициальные системы. Обычно инициализация спецификаций в языке L осуществляется путём задания начального условия в виде формулы $F(t)$ этого же языка, используемой для выделения начального состояния после перехода к процедурному представлению автомата. Нормальная форма представления спецификаций дает возможность сразу учитывать их инициальность, что в ряде случаев сокращает объём вычислений, необходимых для решения задачи.

Автор благодарен Н. В. Евтушенко за полезное обсуждение рассматриваемых в статье вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yevtushenko N., Villa T., Brayton R., Petrenko A., et. al. Solution of synchronous language equations for logic synthesis // Вестник Томского госуниверситета. 2002. № 1. С. 132–138.
2. Buffalov S., El-Fakih K., Yevtushenko N., Bochmann G. Progressive solutions to a parallel automata equation // LNCS. 2003. V. 2767. P. 367–383.
3. Yevtushenko N., Zharikova S., Vetrova M. Multi component digital circuit optimization by solving FSM equations // Euromicro Symposium on Digital System Design, IEEE Computer society, 2003. P. 62–68.

4. *Harel D., Pnueli A.* On the development of reactive systems // NATO ASI Series. Logic and Models of Concurrent Systems. Berlin: Springer, 1985. F13. P. 477–498.
5. *Чеботарев А. Н.* Об одном подходе к функциональной спецификации автоматных систем. I // Кибернетика и системный анализ. 1993. № 3. С. 31–42.
6. *Брауэр В.* Введение в теорию конечных автоматов. М.: Радио и связь, 1987. 392 с.
7. *Чеботарев А. Н., Куривчак О. И.* Аппроксимация множеств сверхслов формулами языка L // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 6. С. 18–26.
8. *Капитонова Ю. В., Чеботарев А. Н.* Индуктивный синтез автомата по спецификации в логическом языке L // Там же. 2000. № 6. С. 3–13.
9. *Чеботарев А. Н.* Взаимодействие автоматов // Там же. 1991. № 6. С. 17–29.