

О ВЛОЖЕНИИ ГРАФОВ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ В ГРАФЫ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ РЕКУРРЕНТНЫМИ НЕЙРОННЫМИ СЕТЯМИ

М. С. Тарков

Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН, г. Новосибирск, Россия

E-mail: tarkov@isp.nsc.ru

Сформулирована задача вложения графов параллельных программ в графы распределённых вычислительных систем рекуррентными нейронными сетями. Экспериментально получены значения параметров, обеспечивающие отсутствие некорректных решений. Благодаря введению в функцию Ляпунова коэффициента штрафа для рёбер графа программы, не совпадающих с рёбрами графа ВС, при вложении «линейки» в двумерный тор получены оптимальные решения. Для увеличения вероятности оптимальных вложений предложен метод расщепления вложения, суть которого заключается в приведении матрицы решения к блочно-диагональному виду. Для исключения некорректных решений при вложении линейки в трехмерный тор использована рекуррентная сеть Вана, обладающая более быстрой сходимостью, чем сеть Хопфилда.

Ключевые слова: вложение, графы параллельных программ, распределённые вычислительные системы, нейрон, сеть Хопфилда, рекуррентная сеть Вана.

Введение

Распределённая вычислительная система (ВС) [1–5] представляет собой множество элементарных машин (ЭМ), связанных сетью, программно управляемой из этих машин. Каждая элементарная машина (ЭМ) включает вычислительный модуль (ВМ) и системное устройство (СУ) (маршрутизатор сообщений). Системное устройство функционирует под управлением ВМ и имеет входные и выходные полюсы, связанные соответственно с выходными и входными полюсами соседних ЭМ. Структура ВС описывается графом $G_s(V_s, E_s)$, где V_s — множество ЭМ и E_s — множество связей между ЭМ. Для максимальной эффективности информационных взаимодействий современные высокопроизводительные ВС используют регулярные графы $G_s(V_s, E_s)$ межмашинных соединений («гиперкуб», «двумерный тор», «трёхмерный тор») [1–5].

Гиперкубическая структура описывается графом, известным как m -мерный булевский куб с числом вершин $n = 2^m$. Тороидальные структуры представляют собой m -мерные евклидовы решетки с замкнутыми границами. Группа автоморфизмов E_m такой структуры есть прямое произведение циклических подгрупп C_{N_k} : $E_m = \bigotimes_{k=1}^m C_{N_k}$, где N_k — порядок подгруппы C_{N_k} ; $\bigotimes$ — символ прямого произведения. При $m = 2$ получаем двумерный тор (2D-тор) (рис. 1), при $m = 3$ — 3D-тор.

Для распределённых ВС граф $G_p(V_p, E_p)$ параллельной программы обычно определяется как множество V_p ветвей программы (виртуальных элементарных машин), которые взаимодействуют друг с другом по принципу «точка — точка» посредством передачи сообщений по логическим (виртуальным) каналам (одно- и двунаправленным) множества $E_p \subseteq V_p \times V_p$. Для большинства параллельных прикладных программ харак-

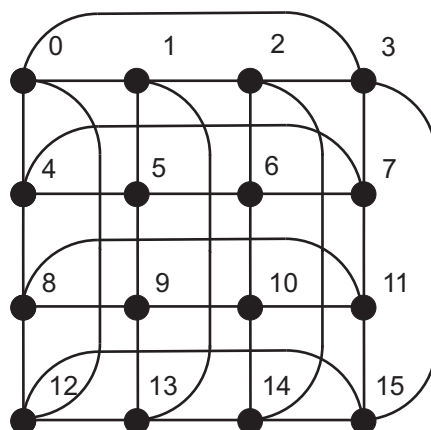


Рис. 1. Пример 2D-тора

терны упорядоченные во времени и регулярные в пространстве схемы взаимодействий между обрабатывающими модулями (линейка, кольцо, решётка и др.) (рис. 2) [1, 2].

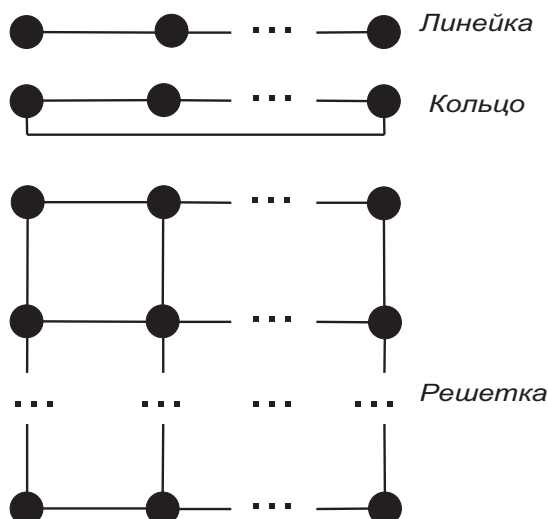


Рис. 2. Типовые графы параллельных программ

В работе рассматривается задача вложения графа параллельной программы $G_p(V_p, E_p)$ в граф распределённой вычислительной системы $G_s(V_s, E_s)$, $n = |V_p| = |V_s|$ — число ветвей параллельной программы (число ЭМ ВС). Цель вложения: взаимно однозначно отобразить вершины графа программы G_p в вершины графа системы G_s так, чтобы при этом ребра G_p совпали с ребрами G_s (установить изоморфизм графа программы с остовным подграфом графа ВС).

Массовый параллелизм обработки информации в нейронных сетях позволяет рассматривать их как перспективное высокопроизводительное и надёжное средство для решения сложных, в том числе и оптимизационных, задач. Наибольший интерес для решения задач дискретной оптимизации представляют рекуррентные нейронные сети [6–11]. Модель глобально сходящихся рекуррентных нейронных сетей Хопфилда хорошо согласуется с парадигмой самостабилизации Дейкстры [12]. Это означает, что реализуемые сетями Хопфилда вложения графов параллельных программ в графы распределённых вычислительных систем являются самостабилизирующимися. Важность использования самостабилизирующихся вложений обусловлена возможностью

нарушения регулярности графов ВС вследствие выхода из строя элементарных машин и межмашинных соединений.

1. Сеть Хопфилда для задачи вложения

Рассмотрим матрицу нейронов v размером $n \times n$, где каждая строка матрицы соответствует ветви параллельной программы, каждый столбец матрицы соответствует ЭМ. Каждая строка и каждый столбец матрицы содержат один и только один ненулевой элемент, равный единице, остальные элементы равны нулю. Энергия соответствующей нейронной сети Хопфилда описывается функцией Ляпунова

$$E = \frac{C}{2} \left[\sum_x \left(\sum_j v_{xj} - 1 \right)^2 + \sum_i \left(\sum_y v_{yi} - 1 \right)^2 \right] + \frac{D}{2} \sum_x \sum_i \sum_{y \in Nb_p(x)} \sum_{j \neq i} v_{xi} v_{yj} d_{ij}. \quad (1)$$

Здесь v_{xi} — состояние нейрона строки x и столбца i матрицы v ; C и D — параметры функции Ляпунова. В квадратных скобках минимум первого слагаемого соответствует наличию одного единичного элемента в каждой строке матрицы v , а минимум второго означает наличие одного единичного элемента в каждом столбце этой матрицы. Минимум суммы первых двух слагаемых обеспечивается в случае, когда каждая строка и каждый столбец матрицы содержат один и только один элемент, равный 1, остальные элементы — нули (корректное решение). Минимум третьего слагаемого обеспечивает минимум суммы расстояний между соседними ветвями параллельной программы при их размещении на графе системы. Здесь d_{ij} — расстояние между вершинами графа ВС, содержащими соседние ветви параллельной программы («растяжение» ребра графа программы на графе ВС); $Nb_p(x)$ — множество вершин, смежных с вершиной x на графе программы.

Динамика сети Хопфилда с непрерывными состояниями и непрерывным временем [6], минимизирующей функцию (1), описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u_{xi}}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial v_{xi}}, \quad (2)$$

где u_{xi} — активация нейрона с индексами $x, i = 1, \dots, n$; $v_{xi} = (1 + \exp(-\beta u_{xi}))^{-1}$ — состояние (выходной сигнал) нейрона; β — параметр функции активации. Из (1) и (2) получаем

$$\frac{\partial u_{xi}}{\partial t} = -C \left(\sum_j v_{xj} + \sum_y v_{yi} - 2 \right) - D \sum_{y \in Nb_p(x)} \sum_{j \neq i} v_{yj} d_{ij}. \quad (3)$$

Разностный вариант дифференциального уравнения (3) имеет вид

$$u_{xi}^{t+1} = u_{xi}^t - \Delta t \left[C \left(\sum_j v_{xj} + \sum_y v_{yi} - 2 \right) + D \sum_{y \in Nb_p(x)} \sum_{j \neq i} v_{yj} d_{ij} \right], \quad (4)$$

где Δt — величина временного шага. Начальные значения u_{xi}^0 , $x, i = 1, \dots, n$, задаются случайным образом.

Выбор параметров β , Δt , C , D [6–11] определяет качество решения v системы уравнений (4). В [9] получена формула взаимосвязи между параметрами C и D , которая для задачи (1)–(4) приобретает вид

$$C \approx 100 \cdot D. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что изменения параметров Δt и D влияют на решение системы уравнений (4) одинаково. Поэтому положим $\Delta t = 1$ и получим уравнение

$$u_{xi}^{t+1} = u_{xi}^t - C \left(\sum_j v_{xj} + \sum_y v_{yi} - 2 \right) - D \sum_{y \in Nb_p(x)} \sum_{j \neq i} v_{yj} d_{ij}. \quad (6)$$

Положим $\beta = 0,1$ (это значение выбрано в работе [10]) и будем подбирать D таким образом, чтобы обеспечить отсутствие некорректных решений. Следует отметить, что в экспериментах зачастую некорректные решения получаются, если при достижении заданного максимального числа итераций, например $t_{\max} = 10000$, не достигнуто условие сходимости $\sum_{xi} |u_{xi}^t - u_{xi}^{t-1}| < \varepsilon$ при заданном $\varepsilon = 0,01$.

2. Вложение сетью Хопфилда

Качество вложения будем оценивать числом совпадений рёбер графа программы с ребрами графа ВС. Это число назовем рангом вложения. Ранг вложения является приближённой оценкой качества вложения, поскольку одному и тому же рангу могут соответствовать вложения с различными растяжениями рёбер графа программы на графе системы. Однако максимальное значение ранга, равное числу рёбер графа программы, соответствует оптимальному вложению и минимуму суммы $S_d = \sum_x \sum_i \sum_{y \in Nb_p(x)} \sum_{j \neq i} v_{xi} v_{yj} d_{ij}$ в (1). Цель исследования — определить значения параметров алгоритма вложения, при которых достигается максимум вероятности оптимального вложения. В качестве примера рассмотрим вложение графа программы типа «линейка» в 2D-тор. Максимальное значение ранга вложения для линейки с n вершинами равно $n - 1$.

Для экспериментального исследования качества вложения использованы гистограммы распределения частоты ранга вложения при заданном числе экспериментов, равном 100. Выполнены эксперименты по вложению графа программы типа «линейка» в граф системы типа «двумерный тор» при числе вершин $n = l^2$, $l \in \{3, 4\}$, где l — порядок циклической подгруппы.

При $D \geq 8$ получены корректные решения для $n = 9$ (рис. 3,а) и 16 (рис. 3,б). Но, как видно из рис. 3, для $D = 8$ количество решений с оптимальным вложением, соответствующим максимуму ранга вложения, мало.

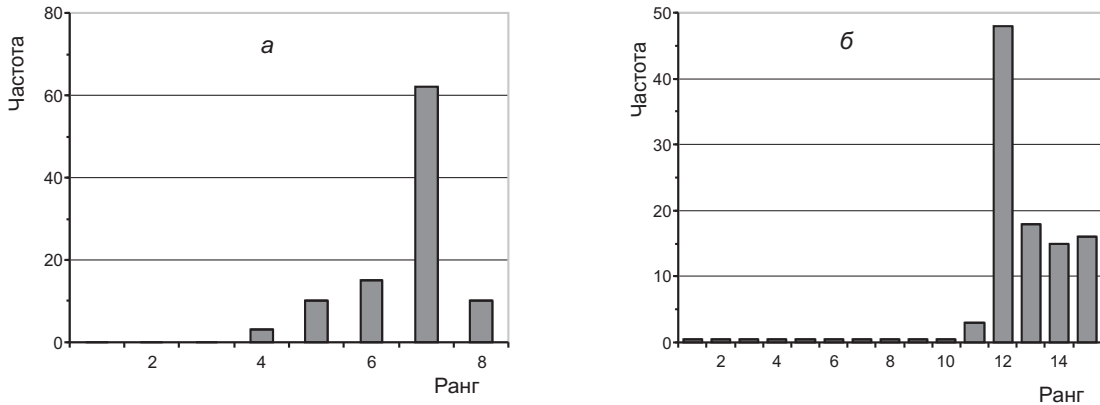


Рис. 3. Гистограммы вложений для нейронной сети (6)

Для повышения частоты оптимальных решений в уравнении (6) величины расстояний d_{ij} заменим величинами

$$c_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, & d_{ij} = 1, \\ p \cdot d_{ij}, & d_{ij} > 1, \end{cases} \quad (7)$$

где p — коэффициент штрафа за превышение расстоянием d_{ij} величины 1, то есть за несовпадение ребра графа программы с ребром графа системы. Получаем уравнение

$$u_{xi}^{t+1} = u_{xi}^t - C \left(\sum_j v_{xj} + \sum_y v_{yi} - 2 \right) - D \sum_{y \in Nb_p(x)} \sum_{j \neq i} v_{yj} c_{ij}. \quad (8)$$

При $p = n$ для вышеописанных вложений получены гистограммы для $n = 9$ (рис. 4,а) и 16 (рис. 4,б), свидетельствующие о заметном улучшении качества вложения, но для $n = 16$ максимум частоты приходится на субоптимальные решения с рангом 13.

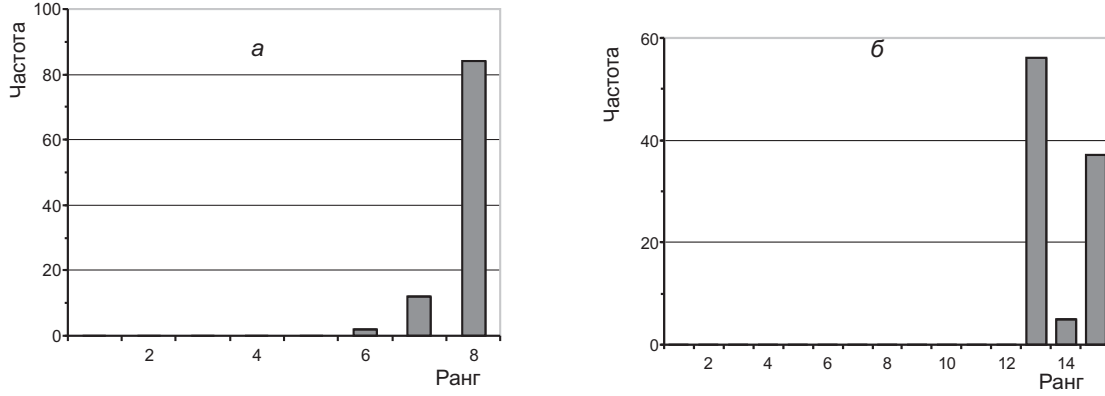


Рис. 4. Гистограммы вложений для нейронной сети (8)

3. Метод расщепления

С целью уменьшения числа локальных экстремумов функции (1) произведём разбиение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ значений индексов x и i переменных v_{xi} на $1 < K < n$ подмножеств I_k , $k = 1, 2, \dots, K$, таких, что множества вершин с индексами из одного и того же I_k образуют связные подграфы как на графе G_p параллельной программы, так и на графе G_s вычислительной системы. В рассматриваемой здесь задаче возьмем $I_k = \{(k-1)q + 1, \dots, k \cdot q\}$, $q = n/K$, и индексы $x \in I_k$ будем отображать только в множество индексов I_k , то есть приведём матрицу решений v к блочно-диагональному виду. Тогда с учетом (7) функция Ляпунова (1) приобретает следующий вид:

$$E = \frac{C}{2} \sum_{k=1}^K \left[\sum_{x \in I_k} \left(\sum_{j \in I_k} v_{xj} - 1 \right)^2 + \sum_{i \in I_k} \left(\sum_{y \in I_k} v_{yi} - 1 \right)^2 \right] + \frac{D}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{x \in I_k} \sum_{i \in I_k} \sum_{y \in Nb_p(x)} \sum_{j \neq i} v_{xi} v_{yj} c_{ij},$$

и динамика сети Хопфилда описывается уравнением

$$u_{xi}^{t+1} = u_{xi}^t - C \left(\sum_{j \in I_k} v_{xj} + \sum_{y \in I_k} v_{yi} - 2 \right) - D \sum_{y \in Nb_p(x)} \sum_{j \neq i} v_{yj} c_{ij}, \quad (9)$$

$$v_{xi} = (1 + \exp(-\beta u_{xi}))^{-1}, \quad x, i \in I_k, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

При этом $v_{xi} = 0$ для $x \in I_k, i \notin I_k, k = 1, 2, \dots, n$. При использовании этого подхода, который мы назовем методом расщепления, для линейки с числом вершин $n = 16$ при $K = 2$ получена гистограмма вложения в 2D-тор (рис. 5). Сравнивая рис. 4,б и рис. 5, убеждаемся в том, что использование метода расщепления позволило существенно повысить частоту оптимальных вложений. Увеличение параметра D до значения $D = 32$ приводит к дополнительному росту частоты оптимальных вложений (рис. 6).

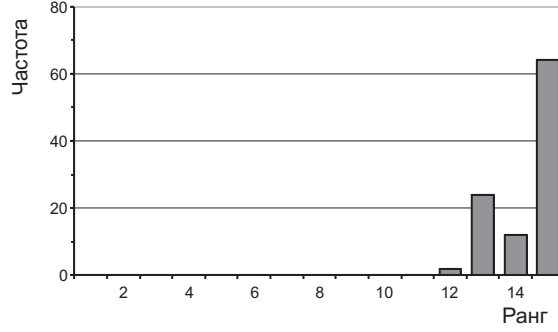


Рис. 5. Гистограмма вложений для нейронной сети (9):
 $n = 16, K = 2, D = 8$

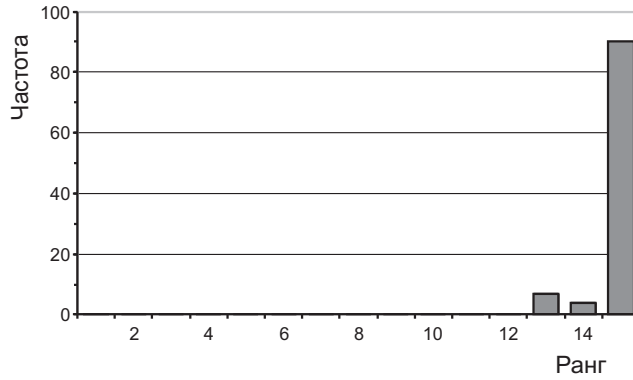


Рис. 6. Гистограмма вложений для нейронной сети (9):
 $n = 16, K = 2, D = 32$

4. Вложение сетью Вана

В рекуррентной сети Вана [11] сумма $S_d = \sum_x \sum_i \sum_{y \in Nb_p(x)} \sum_{j \neq i} v_{xi} v_{yj} d_{ij}$ в (1) умножается на величину $\exp(-t/\tau)$, где τ — параметр. Для сети Вана уравнение (9) приобретает следующий вид:

$$u_{xi}^{t+1} = u_{xi}^t - C \left(\sum_{j \in I_k} v_{xj} + \sum_{y \in I_k} v_{yi} - 2 \right) - D \sum_{y \in Nb_p(x)} \sum_{j \neq i} v_{yj} c_{ij} \exp(-t/\tau), \quad (10)$$

$$v_{xi} = (1 + \exp(-\beta u_{xi}))^{-1}, \quad x, i \in I_k, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Введение множителя $\exp(-t/\tau)$ ускоряет сходимость рекуррентной сети, и количество некорректных решений сокращается. Так, для трехмерного тора с $n = 3^3 = 27$ вершинами при $p = n, K = 3, D = 256, \beta = 0,1$ для 100 решений получены такие результаты:

- 1) на сети Хопфилда получено 32 некорректных решения и 36 оптимальных решений (ранг 26);
- 2) на сети Вана при тех же значениях вышеуказанных параметров и $\tau = 500$ все 100 полученных решений корректны, причем 72 решения оптимальны. Оптимальные решения, как правило, достигались за несколько десятков шагов.

Заключение

Сформулирована задача вложения графов параллельных программ в графы распределённых вычислительных систем рекуррентными нейронными сетями. Экспериментально получены значения параметров, обеспечивающие отсутствие некорректных решений. Для вложения графа параллельной программы типа «линейка» в граф ВС типа 2D-тор показано, что благодаря введению в функцию Ляпунова параметра штрафа для рёбер графа программы, не совпадающих с рёбрами графа ВС, удаётся получить оптимальные решения при вложении линейки в двумерный тор для числа вершин $n \in \{9, 16\}$. Для увеличения вероятности (частоты) оптимальных вложений:

- 1) предложен метод расщепления, суть которого заключается в приведении матрицы решения к блочно-диагональному виду;
- 2) выполнен переход от сети Хопфилда к сети Вана, что ускорило сходимость.

В результате получены высокие частоты оптимальных решений (при числе экспериментов, равном 100):

- 1) порядка 80–90 % для двумерных торов ($n = 3^2 = 9$ и $n = 4^2 = 16$);
- 2) порядка 70 % для трехмерного тора ($n = 3^3 = 27$).

Дальнейшие исследования следует проводить в направлении увеличения вероятности получения оптимальных решений при росте числа вершин графа программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнеев В. В. Архитектура вычислительных систем с программируемой структурой. Новосибирск: Наука, 1985. 166 с.
2. Тарков М. С. Вложение структур параллельных программ в структуры живучих распределённых вычислительных систем // Автоматизация. 2003. Т. 39. № 3. С. 84–96.
3. Cray T3E: <http://www.cray.com/products/systems/crayt3e/1200e.html>
4. Yu H., Chung I.-H., Moreira J. Topology Mapping for Blue Gene/L Supercomputer // Proc. of the ACM/IEEE SC2006 Conf. on High Performance Networking and Computing, November 11–17, 2006, Tampa, FL, USA. ACM Press, 2006. P. 52–64.
5. Абрамов С. М., Заднепровский В. Ф., Шмелев А. Б., Московский А. А. СуперЭВМ ряда 4 семейства «СКИФ»: Штурм вершины суперкомпьютерных технологий // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 5. С. 200–210.
6. Меламед И. И. Нейронные сети и комбинаторная оптимизация // Автоматика и телемеханика. 1994. № 11. С. 3–40.
7. Kate A. S. Neural Networks for Combinatorial Optimization: A Review of More Than a Decade of Research // INFORMS J. Computing. 1999. V. 11. No. 1. P. 15–34.
8. Tarkov M. S., Lapukhov S. A. Mapping a parallel program structure onto distributed computer system structure by the Hopfield neural network with fuzzy scheduling parameters // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center, Comp. Science. 2003. No. 19. P. 83–88.
9. Feng G., Douligieris C. The Convergence and Parameter Relationship for Discrete-Time Continuous-State Hopfield Networks // Proc. of Intern. Joint Conference on Neural Networks. 2001. P. 376–381.

10. Тарков М. С. Построение гамильтоновых циклов рекуррентной нейронной сетью в тороидальных графах с дефектами ребер // Труды XII Всерос. науч.-технич. конф. «НЕЙРОИНФОРМАТИКА-2010». Ч. 2. М., 2010. С. 26–34.
11. Wang J. Analysis and Design of a Recurrent Neural Network for Linear Programming // IEEE Trans. On Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications. 1993. V. 40. No. 9. P. 613–618.
12. Dijkstra E. W. Self-stabilizing systems in spite of distributed control // Commun. ACM. 1974. V. 17. No. 11. P. 643–644.