ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТОВ

DOI 10.17223/20710410/10/6

УДК 519.714 : 681.32

ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. В. Поттосин, Е. А. Шестаков

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь

E-mail: pott@newman.bas-net.by

Рассматривается задача декомпозиции системы не полностью определенных булевых функций. Вводится понятие степени зависимости функции от некоторых её аргументов, и сложность функций, на которые разлагается заданная система, оценивается этим параметром. Предлагается метод параллельно-последовательной декомпозиции системы не полностью определенных булевых функций. Особенностью этого метода является то, что для него не нужно задавать подмножества аргументов компонент декомпозиции, требуемые в большинстве известных методов. Они определяются по ходу выполнения декомпозиции.

Ключевые слова: *система не полностью определенных булевых функций, декомпозиция.*

Введение

Задача декомпозиции булевых функций является одной из важных задач из области логического проектирования, что делает её объектом большого внимания со стороны многих исследователей. Как показывает обзор [1], на данную тему написано большое количество статей. В данной работе рассматривается задача декомпозиции системы булевых функций в следующей постановке: для заданной системы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x}))$ не полностью определённых булевых функций $f_1, \ldots, f_m$ от переменных в $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ найти системы, возможно, тоже не полностью определённых булевых функций $\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{z^1})$, $\boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{z^2})$ от переменных в $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2})$, такие, что суперпозиция $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{z^1}), \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{z^2}))$ совпадает с функцией $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на области её определения.

Обычно при решении подобной задачи отыскивается суперпозиция $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{z^1}), \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{z^2}))$, в которой число булевых аргументов (компонент векторных аргументов) в каждой из систем $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{g_1}$ и $\boldsymbol{g_2}$ должно быть меньше, чем в системе $\boldsymbol{f}$. В такой постановке задача декомпозиции не всегда имеет решение, что значительно усложняет применение методов декомпозиции при синтезе многоярусных комбинационных схем.

В настоящей работе предлагается оценивать сложность систем булевых функций $\boldsymbol{g_1}$ и $\boldsymbol{g_2}$ в искомой суперпозиции не числом их булевых аргументов, но степенью их зависимости от некоторых из этих аргументов. Это понятие будет определено ниже.

В этом случае поиск искомой суперпозиции осуществляется в три этапа. На первом этапе по исходной системе булевых функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ строится тривиальная суперпозиция $\boldsymbol{h'}(g_1(\boldsymbol{z^1}), g_2(\boldsymbol{z^2}))$, где g_1 и g_2 — псевдобулевы функции с натуральными значениями от векторных переменных $\boldsymbol{z^1}$ и $\boldsymbol{z^2}$, но на этом этапе $g_1(\boldsymbol{z^1}) = g_2(\boldsymbol{z^2})$ и $\boldsymbol{z^1} = \boldsymbol{z^2} = \boldsymbol{x}$.

На втором этапе выполняется ряд последовательных итераций, представляющий собой чередование преобразований функций $g_1(\boldsymbol{z^1})$ и $g_2(\boldsymbol{z^2})$ и соответственно функции $\boldsymbol{h'}(g_1, g_2)$ с сохранением заданного отображения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. При каждой такой итерации удаляется одна компонента из векторной переменной $\boldsymbol{z^i}$ $(i \in \{1, 2\})$. Если на какой-либо итерации окажется невозможным преобразование суперпозиции, полученной на предыдущей итерации, с учетом установленных ограничений, то второй этап завершается.

На третьем этапе выполняется кодирование значений натуральных переменных и находится требуемая суперпозиция $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{z^1}), \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{z^2}))$.

Особенностью предлагаемой декомпозиции является то, что для её выполнения не нужно предварительно искать в $\boldsymbol{x}$ наборы аргументов $\boldsymbol{z^1}$ и $\boldsymbol{z^2}$. Их выбор осуществляется в ходе выполнения декомпозиции. Число булевых аргументов в системе $\boldsymbol{h}$ построенной декомпозиции будет удовлетворять заданным ограничениям. Число булевых аргументов в системах $\boldsymbol{g_1} = \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{z^1})$, $\boldsymbol{g_2} = \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{z^2})$ в общем случае может не уменьшиться по сравнению с исходной системой $\boldsymbol{f}$, однако степень зависимости этих систем по некоторым подмножествам аргументов будет меньше, чем зависимость по этим аргументам исходной системы.

1. Постановка задачи

Пусть система частичных булевых функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задается парой матриц $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ размерности $l \times n$ и $l \times m$ соответственно. Матрица $\boldsymbol{U}$ является булевой. Её столбцы соответствуют переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а её элементы принимают значения из множества $\{0, 1\}$. Каждая строка с номером i, $1 \leqslant i \leqslant l$, матрицы $\boldsymbol{U}$ задает булев вектор [3], который является значением переменной $\boldsymbol{x}$. Множество векторов, представленное матрицей $\boldsymbol{U}$, задает область определения D_f системы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Матрица $\boldsymbol{V}$ — троичная, её элементы принимают значения из множества $\{0, 1, -\}$. Строки матрицы $\boldsymbol{V}$ находятся во взаимно однозначном соответствии со строками матрицы $\boldsymbol{U}$. Столбцы матрицы $\boldsymbol{V}$ соответствуют функциям $f_1, f_2, \ldots, f_m$ заданной системы (переменным $y_1, y_2, \ldots, y_m$), а i-я строка матрицы $\boldsymbol{V}$ представляет значения этих функций при значении векторной переменной, представляемом i-й строкой матрицы $\boldsymbol{U}$.

Пусть троичные векторы $\boldsymbol{y}^*$ и $\boldsymbol{y'}^*$ состоят из одинакового числа компонент. Будем писать $\boldsymbol{y}^* \geqslant \boldsymbol{y'}^*$, если значения всех компонент вектора $\boldsymbol{y}^*$, отличные от значения «$-$», совпадают с соответствующими компонентами вектора $\boldsymbol{y'}^*$.

Поскольку упомянутые выше векторные переменные $\boldsymbol{z^1}$ и $\boldsymbol{z^2}$ составлены из компонент векторной переменной $\boldsymbol{x}$, то компоненты их значений $\boldsymbol{z^{1*}}$ и $\boldsymbol{z^{2*}}$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $\boldsymbol{x}^*$. В дальнейшем будем считать, что если задано значение $\boldsymbol{x}^*$ векторной переменной $\boldsymbol{x}$, то также заданы значения $\boldsymbol{z^{1*}}$ и $\boldsymbol{z^{2*}}$ векторных переменных $\boldsymbol{z^1}$ и $\boldsymbol{z^2}$ соответственно.

Говорим также, что суперпозиция систем частичных булевых функций $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{z^1}), \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{z^2}))$ *реализует* систему частичных булевых функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, и пишем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geqslant \boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{z^1}), \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{z^2}))$, если для любого значения $\boldsymbol{x}^* \in D_f$ выполняется $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \geqslant \boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{z^{1*}}), \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{z^{2*}}))$.

Говорят, что система $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ не зависит от булевой переменной x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x'}^*)$ для любой пары значений $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x'}^*$ из множества D_f, отличающихся друг от друга только по i-й компоненте (значением переменной x_i). В противном случае, т. е. когда существует хотя бы одна такая пара значений $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x'}^*$ из множества D_f, отличающихся друг от друга только по i-й компоненте, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x'}^*)$, говорят, что система $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ зависит от x_i. В этом случае нетрудно найти все такие различные пары, для которых выполняется это неравенство. Число этих пар обозначим через $d(\boldsymbol{f}, x_i)$ и назовем это число *степенью зависимости* системы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ от переменной x_i. Очевидно, $d(\boldsymbol{f}, x_i) = 0$, если система $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ не зависит от переменной x_i.

Пусть у систем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ совпадают области определения, т. е. $D_f = D_{f'}$, и каждая из этих систем зависит от переменной x_i. Будем говорить, что система $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ в меньшей степени зависит от переменной x_i, чем система $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$, если $d(\boldsymbol{f}, x_i) < d(\boldsymbol{f}', x_i)$.

Определим и степень зависимости $d(\boldsymbol{f}, X')$ системы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ от подмножества X' множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ булевых переменных ($X' \subset X$) как $d(\boldsymbol{f}, X') = \sum\limits_{x \in X'} d(\boldsymbol{f}, x)$. Ясно, что если система $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ не зависит от булевых переменных, входящих в подмножество X', то $d(\boldsymbol{f}, X') = 0$.

В настоящей работе рассматривается следующая задача декомпозиции.

Для заданной системы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ необходимо найти суперпозицию $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2})$, $\boldsymbol{g_1} = \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{z^1})$, $\boldsymbol{g_2} = \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{z^2})$, такую, что выполняются следующие условия:

1) $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{z^1}), \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{z^2})) \leqslant \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$;
2) для заданных целых положительных чисел h_1 и h_2 при $n > h_1 + h_2 > m$ число булевых компонент в векторных переменных $\boldsymbol{g_1}$ и $\boldsymbol{g_2}$ не превышает соответственно h_1 и h_2;
3) $d(\boldsymbol{g_1}, Z_1) < d(\boldsymbol{f}, Z_1)$, $d(\boldsymbol{g_2}, Z_2) < d(\boldsymbol{f}, Z_2)$, где $Z_1 \subseteq X$ и $Z_2 \subseteq X$ — множества переменных, представляющих компоненты векторных переменных $\boldsymbol{z^1}$ и $\boldsymbol{z^2}$ соответственно ($Z_1 \neq \varnothing$, $Z_2 \neq \varnothing$).

2. Метод декомпозиции

Поиск декомпозиции системы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ осуществляется в три этапа.

Этап 1. *Формирование тривиальной декомпозиции.* По исходной системе булевых функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ строится тривиальная суперпозиция $\boldsymbol{h}'(g_1, g_2)$, где $g_1 = g_1(\boldsymbol{z^1})$, $g_2 = g_2(\boldsymbol{z^2})$ — псевдобулевы функции, $g_1(\boldsymbol{z^1}) = g_2(\boldsymbol{z^2})$ и $\boldsymbol{z^1} = \boldsymbol{z^2} = \boldsymbol{x}$.

Пусть исходная система булевых функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задается матрицами $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ с номерами строк 1, 2, …, l. Общая область определения функций $g_1(\boldsymbol{z^1})$ и $g_2(\boldsymbol{z^2})$ совпадает с областью определения исходной системы D_f, а их областью значений является множество $\{1, 2, \ldots, l\}$. Пусть перечень значений векторной переменной $\boldsymbol{z^1}$ представлен матрицей $\boldsymbol{U_1}$, а то же самое для $\boldsymbol{z^2}$ – матрицей $\boldsymbol{U_2}$. Значением функции $g_i(\boldsymbol{z^i})$ при некотором значении $\boldsymbol{z^i}$ является номер строки матрицы $\boldsymbol{U_i}$ ($i \in \{1, 2\}$). Так что функция $g_i(\boldsymbol{z^i})$ вполне задается матрицей $\boldsymbol{U_i}$. На данном этапе $\boldsymbol{U_1} = \boldsymbol{U_2} = \boldsymbol{U}$.

Область определения функции $\boldsymbol{h}'$ состоит из пар значений её аргументов $(1, 1)$, $(2, 2)$, …, (l, l). На паре значений своих аргументов (j, j) функция $\boldsymbol{h}'$ принимает значение $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{h}'(j, j)$, которое задаётся j-й строкой матрицы $\boldsymbol{V}$.

Функция $\boldsymbol{h}'(g_1, g_2)$ задается квадратной матрицей размерности $l \times l$. Строкам этой матрицы приписаны значения $1, 2, \ldots, l$ переменной g_1, а столбцам — значения $1, 2, \ldots, l$ переменной g_2. Все элементы этой матрицы, расположенные не на её главной диагонали, являются неопределёнными, т. е. имеют значение «$-$». Элемент матрицы, расположенный на пересечении строки и столбца с одним и тем же номером j ($j = 1, 2, \ldots, l$), равен j-й строке матрицы $\boldsymbol{V}$.

Пример 1. Пусть исходная система булевых функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})) = (y_1, y_2)$, задана матрицами:

$$\boldsymbol{U} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13 \end{array}, \quad \boldsymbol{V} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0&0\\ 0&0\\ 1&0\\ 0&1\\ 1&1\\ 0&0\\ 0&1\\ 1&1\\ 0&0\\ 1&0\\ 1&1\\ 1&1\\ 0&0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13 \end{array}.$$

На наборах значений переменных, не представленных в матрице $\boldsymbol{U}$, значения функций не определены. Справа от матриц $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ указаны номера их строк. Построим по этой функции тривиальную суперпозицию $\boldsymbol{h'}(g_1, g_2)$, где $g_1 = g_1(\boldsymbol{z^1})$, $g_2 = g_2(\boldsymbol{z^2})$ и $\boldsymbol{z^1} = \boldsymbol{z^2} = \boldsymbol{x}$. Функции $g_1(\boldsymbol{z^1})$ и $g_2(\boldsymbol{z^2})$ в ней задаются соответственно матрицами $\boldsymbol{U_1}$ и $\boldsymbol{U_2}$, которые в данном случае совпадают с $\boldsymbol{U}$, а функция $\boldsymbol{h'}(g_1, g_2)$ — матрицей $\boldsymbol{W}$:

$$\boldsymbol{U_1} = \boldsymbol{U_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13 \end{array}, \quad \boldsymbol{W} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccccc} 00&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-\\ -&00&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-\\ -&-&10&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-\\ -&-&-&01&-&-&-&-&-&-&-&-&-\\ -&-&-&-&11&-&-&-&-&-&-&-&-\\ -&-&-&-&-&00&-&-&-&-&-&-&-\\ -&-&-&-&-&-&01&-&-&-&-&-&-\\ -&-&-&-&-&-&-&11&-&-&-&-&-\\ -&-&-&-&-&-&-&-&00&-&-&-&-\\ -&-&-&-&-&-&-&-&-&10&-&-&-\\ -&-&-&-&-&-&-&-&-&-&11&-&-\\ -&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-&11&-\\ -&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-&-&00 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13 \end{array}.$$

Э т а п 2. *Последовательность преобразований суперпозиции* $\boldsymbol{h'}(g_1, g_2)$. На этом этапе выполняется ряд итераций. В процессе каждой итерации осуществляется преобразование матрицы $\boldsymbol{U_i}$, представляющей псевдобулеву функцию $g_i(\boldsymbol{z^i})$ $(i \in \{1, 2\})$, и соответствующее преобразование матрицы $\boldsymbol{W}$, представляющей функцию $\boldsymbol{h'}(g_1, g_2)$. Последовательность итераций представляет собой чередование этих действий для $\boldsymbol{U_1}$ и $\boldsymbol{U_2}$.

Матрица $\boldsymbol{U_i}$ преобразуется так, чтобы снизилась степень зависимости $d(g_i, x_k)$ представляемой ею функции $g_i(\boldsymbol{z^i})$ от одного из булевых аргументов x_k. Чтобы описать упомянутые преобразования, введём некоторые понятия.

Строки и столбцы матрицы $\boldsymbol{W}$ можно рассматривать как троичные векторы. Две строки матрицы $\boldsymbol{W}$ *несовместимы*, если они представляют ортогональные троичные векторы. В противном случае они *совместимы*. Под ортогональностью троичных векторов понимается наличие противоположных значений (0 и 1) их одноимённых компонент [3]. Такое же отношение совместимости определяется и на множестве столбцов матрицы $\boldsymbol{W}$.

Пусть булева переменная x_k является компонентой векторной переменной $\boldsymbol{z^1}$. На множестве $\{1, 2, \ldots, l_1\}$ номеров строк матрицы $\boldsymbol{U_1}$ определим разбиение $\alpha(\boldsymbol{U_1}, x_k)$ так, что r и s $(1 \leqslant r \leqslant l_1, 1 \leqslant s \leqslant l_1, r \neq s)$ попадают в один блок этого разбиения, если и только если r-я и s-я строки матрицы $\boldsymbol{U_1}$ отличаются только значением компоненты x_k, а r-я и s-я строки матрицы $\boldsymbol{W}$ совместимы. Если переменная x_k является компонентой векторной переменной $\boldsymbol{z^2}$, то аналогично определим разбиение $\alpha(\boldsymbol{U_2}, x_k)$ на множестве $\{1, 2, \ldots, l_2\}$ номеров строк матрицы $\boldsymbol{U_2}$: r и s $(1 \leqslant r \leqslant l_2, 1 \leqslant s \leqslant l_2, r \neq s)$ попадают в один блок этого разбиения, если и только если r-я и s-я строки матрицы $\boldsymbol{U_2}$ отличаются только значением компоненты x_k, а r-й и s-й столбцы матрицы $\boldsymbol{W}$ совместимы.

Преобразования матриц $\boldsymbol{U_1}$ и $\boldsymbol{W}$ выполняются по разбиению $\alpha(\boldsymbol{U_1}, x_k)$. Заметим, что любое разбиение $\alpha(\boldsymbol{U_i}, x_k)$ $(i \in \{1, 2\})$ по любой переменной x_k может содержать только одноэлементные и двухэлементные блоки. В матрице $\boldsymbol{U_1}$ каждую пару строк, номера которых содержатся в одном блоке разбиения $\alpha(\boldsymbol{U_1}, x_k)$, заменяем одной, в которой компоненте x_k приписываем значение «$-$». Это же значение приписываем тем остальным строкам, для которых это изменение не нарушает взаимной ортогональности всех строк матрицы $\boldsymbol{U_1}$. Если столбец x_k оказался при этом состоящим только из элементов со значением «$-$», то он удаляется из матрицы $\boldsymbol{U_1}$. В этом случае $d(g_1, x_k) = 0$. Преобразование матрицы $\boldsymbol{U_1}$ сопровождается преобразованием матрицы $\boldsymbol{W}$, в результате которого каждая пара строк, номера которых содержатся в одном блоке разбиения $\alpha(\boldsymbol{U_1}, x_k)$, заменяется одной строкой, являющейся результатом пересечения троичных векторов, представляемых данными строками. При этом сохраняется взаимно однозначное соответствие между строками матрицы $\boldsymbol{U_1}$ и строками матрицы $\boldsymbol{W}$, а также сохраняется согласование их нумерации.

Результатом операции пересечения двух пересекающихся троичных векторов одинаковой размерности является троичный вектор, формируемый следующим образом [4]. Если обе одноимённые компоненты исходных векторов имеют значение «$-$», то это значение приписывается соответствующей компоненте вектора-результата. Если хотя бы одна из одноимённых компонент исходных векторов имеет значение 0 или 1 (в пересекающихся векторах они не могут иметь противоположные значения), то это значение приписывается соответствующей компоненте вектора-результата.

Матрица $\boldsymbol{U_2}$ преобразуется совершенно аналогично, только прежнюю переменную x_k для этой цели использовать нельзя. Во всей последовательности итераций каждая переменная может использоваться не более одного раза. При сопровождающем преобразовании матрицы $\boldsymbol{W}$ всё, что говорилось относительно её строк, делается с её столбцами.

Пример 2. Для матрицы $\boldsymbol{U}$ из примера 1 найдем следующие разбиения:
$\alpha(\boldsymbol{U}, x_1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6, 12\}, \{7, 13\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{11\}\}$;
$\alpha(\boldsymbol{U}, x_2) = \{\{1\}, \{2, 6\}, \{3, 8\}, \{4\}, \{5, 9\}, \{7\}, \{10\}, \{11\}, \{12\}, \{13\}\}$;
$\alpha(\boldsymbol{U}, x_3) = \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}, \{6, 9\}, \{7\}, \{8\}, \{10\}, \{11\}, \{12\}, \{13\}\}$;
$\alpha(\boldsymbol{U}, x_4) = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}, \{8, 9\}, \{10, 12\}, \{11, 13\}\}$;
$\alpha(\boldsymbol{U}, x_5) = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{6, 7\}, \{8\}, \{9\}, \{10, 11\}, \{12, 13\}\}$.

Выбрав x_3 для преобразования матрицы $\boldsymbol{U_1}$ и затем x_1 для преобразования матрицы $\boldsymbol{U_2}$, получим

$$
\boldsymbol{U_1} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array},
\quad
\boldsymbol{U_2} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array},
\quad
\boldsymbol{W} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
00 & - & 10 & - & - & - & - & - & - & - & - \\
- & 00 & - & - & 11 & - & - & - & - & - & - \\
- & - & - & 01 & - & - & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & 00 & - & - & 00 & - & - \\
- & - & - & - & - & - & 01 & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - & 11 & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & 10 & - \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 11 \\
- & - & - & - & - & 11 & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & 00 & - & - & - & -
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}.
$$

Заметим, что некоторые столбцы, совместимые в матрице $\boldsymbol{W}$, могут оказаться несовместимыми после совмещения её строк. По условию решаемой задачи декомпозиции аргументы $\boldsymbol{g_1}$ и $\boldsymbol{g_2}$ системы булевых функций $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2})$ искомой декомпозиции должны соответственно состоять не более чем из h_1 и h_2 булевых переменных. Значения векторных переменных $\boldsymbol{g_1}$ и $\boldsymbol{g_2}$ определяются при кодировании строк и столбцов матрицы $\boldsymbol{W}$ на этапе 3, и чтобы удовлетворить этому условию, любое множество взаимно ортогональных строк матрицы $\boldsymbol{W}$ должно содержать не более 2^{h_1} строк, а любое множество взаимно ортогональных столбцов — не более 2^{h_2} столбцов. Необходимым условием для этого является следующее.

Условие C. Каждый столбец матрицы $\boldsymbol{W}$ должен содержать не более 2^{h_1}, а каждая её строка — не более 2^{h_2} взаимно ортогональных значений векторной переменной $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Это условие должно проверяться перед каждым преобразованием матрицы $\boldsymbol{W}$. Булеву переменную x_k, при которой преобразование матрицы $\boldsymbol{W}$ по разбиению $\alpha(\boldsymbol{U_i}, x_k)$ $(i \in \{1, 2\})$ не нарушает условие C, назовем *корректной*. При выборе аргумента x_k, по которому осуществляется данное преобразование, предпочтение отдаётся корректному аргументу. Если таких аргументов несколько, то выбирается тот, который приведёт к увеличению несовместимых пар столбцов в матрице $\boldsymbol{W}$ на минимальную величину.

Пусть корректные аргументы отсутствуют. Это означает, что для каждого аргумента не выполняется условие C. Пусть аргумент x_k не является корректным. Преобразуем разбиение $\alpha(\boldsymbol{U_i}, x_k)$ посредством деления некоторых его двухэлементных блоков так, чтобы условие C выполнялось. В этом случае степень зависимости $d(g_i, x_k)$ функции g_i от аргумента x_k останется не равной нулю. Величина $d(g_i, x_k)$ будет тем меньше, чем меньше будет выполнено делений двухэлементных блоков разбиения $\alpha(\boldsymbol{U_i}, x_k)$. Если выполнение условия C будет достигнуто лишь в том случае, когда все блоки разбиения $\alpha(\boldsymbol{U_i}, x_k)$ будут разделены до одноэлементных, то тогда $d(g_i, x_k)$ уменьшить не удастся. Назовём в этом случае аргумент x_k устойчивым. В противном случае аргумент x_k будем называть неустойчивым. Если все аргументы функции g_i устойчивы, то её преобразование прекращается. Если среди аргументов имеются неустойчивые, то выбираем из них тот, степень зависимости от которого функции g_i будет наименьшей.

Пример 3. Матрица $\boldsymbol{U_1}$, полученная в примере 2, преобразуется на основе разбиения $\alpha(\boldsymbol{U_1}, x_2) = \{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}\}$, в результате чего при сохранении прежнего значения матрицы $\boldsymbol{U}$ получаем следующее:

$$
\boldsymbol{U_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array},\quad
\boldsymbol{U_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array},\quad
\boldsymbol{W} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 00 & - & 10 & - & - & - & - & 11 & - & - & - \\ - & 00 & - & - & 11 & 00 & - & - & 00 & - & - \\ - & - & - & 01 & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 01 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & 10 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 11 \\ - & - & - & - & - & 11 & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 00 & - & - & - & - \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}.
$$

Пусть в искомой суперпозиции $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2})$ число компонент в векторной переменной $\boldsymbol{g_1}$ должно быть не более единицы, а в переменной $\boldsymbol{g_2}$ — не более двух, т. е. $h_1 = 1$ и $h_2 = 2$. Взяв любое из разбиений $\alpha(\boldsymbol{U_2}, x_k), k = 4, 5$, в качестве основы для совмещения столбцов матрицы $\boldsymbol{W}$, мы не получим окончательное значение матрицы $\boldsymbol{W}$ без нарушения указанных ограничений, т. е. ни одна из переменных x_4 и x_5 не является корректной (переменные x_2 и x_3 не могут быть взяты в данном случае, поскольку на их основе проводились преобразования матрицы $\boldsymbol{U_1}$). Тогда выбираем подходящее совмещение столбцов матрицы $\boldsymbol{W}$ — третьего с четвертым и десятого с одиннадцатым — и получаем следующие матрицы при $d(\boldsymbol{g_2}, x_5) = 1$:

$$
\boldsymbol{U_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array},\quad
\boldsymbol{U_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & - \\ 1 & 1 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & - \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array},\quad
\boldsymbol{W} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 00 & - & 10 & - & - & - & 11 & - & - \\ - & 00 & - & 11 & 00 & - & - & 00 & - \\ - & - & 01 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & 01 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 11 \\ - & - & - & - & 11 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & 00 & - & - & - \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}.
$$

Э т а п 3. *Получение суперпозиции* $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2})$, *удовлетворяющей условиям задачи.* Чтобы получить векторные булевы функции $\boldsymbol{g_1}$ и $\boldsymbol{g_2}$, надо закодировать строки и столбцы матрицы $\boldsymbol{W}$ двоичными векторами, причем совместимые строки, так же как совместимые столбцы, могут иметь одинаковые коды. Те же коды присваиваются соответствующим значениям многозначных переменных g_1 и g_2. Если функция g_i задана матрицей $\boldsymbol{U_i}$ ($i = 1, 2$), то векторная функция $\boldsymbol{g_i}$ задается следующим образом: значением функции $\boldsymbol{g_i}$ на наборе переменных, представляемым строкой матрицы $\boldsymbol{U_i}$, является код соответствующего значения функции g_i. Удобно преобразовать матрицу $\boldsymbol{W}$ в матрицу $\boldsymbol{H}$, представляющую искомую функцию $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2})$. Для этого находится разбиение множества строк матрицы $\boldsymbol{W}$ на совместимые подмножества, т. е. на подмножества, где любые две строки совместимы, и все строки из одного подмножества заменяются одной строкой, представляющей пересечение соответствующих троичных векторов. Та же операция проделывается затем со столбцами матрицы $\boldsymbol{W}$.

При совмещении строк для получения матрицы $\boldsymbol{H}$, число строк в которой не должно превышать 2^{h_1}, следует стараться не потерять возможности сократить число столбцов в ней до 2^{h_2}. Выделим 2^{h_1} строк в матрице $\boldsymbol{W}$, которые должны войти в различные совместимые множества. Около них группируем остальные строки, формируя таким образом искомые совместимые подмножества. В результате получаем матрицу $\boldsymbol{W'}$ с 2^{h_1} строками, где каждая строка является пересечением всех строк, принадлежащих соответственному совместимому подмножеству.

Текущая ситуация в этом процессе характеризуется двумя множествами: $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_{2^{h_1}}\}$ — совокупность совместимых подмножеств строк матрицы $\boldsymbol{W}$ (в начале процесса это одноэлементные множества) и $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_t\}$ — множество остальных строк матрицы $\boldsymbol{W}$. Из множества R последовательно выбираются строки и переносятся в определенные подмножества из множества S. Процесс заканчивается, когда множество R оказывается пустым.

Строки матриц $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{W'}$ рассматриваются как секционированные троичные векторы [3]. Длина секции равна числу компонент векторной переменной $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Выбор пары (S_i, r_j) $(S_i \in S, r_j \in R)$ для включения строки r_j в множество S_i, где строка r_j должна быть совместима со всеми строками из S_i, осуществляется по следующим двум критериям: 1) минимум увеличения количества взаимно ортогональных секций в получаемой строке матрицы $\boldsymbol{W'}$; 2) минимум увеличения количества пар ортогональных секций в этой строке.

Матрица $\boldsymbol{W'}$ преобразуется в матрицу $\boldsymbol{H}$ путем аналогичного совмещения столбцов.

Пример 4. Используем данные, полученные в примере 3. Как было сказано, для получения искомой декомпозиции необходимо матрицу $\boldsymbol{W}$ преобразовать в матрицу $\boldsymbol{H}$ таким образом, чтобы матрица $\boldsymbol{H}$ имела не более двух строк и не более четырех столбцов.

В начальной ситуации имеем $S = \{\{1\}, \{3\}\}$ и $R = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$, при этом матрица $\boldsymbol{W'}$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{W'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 00 & - & 10 & - & - & - & 11 & - & - \\ - & - & 01 & - & - & - & - & - & - \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array} .$$

Согласно приведённым выше критериям, следующим шагом является совмещение строк 1 и 2 матрицы $\boldsymbol{W}$, и матрица $\boldsymbol{W'}$ примет следующий вид, где справа покажем множества номеров строк матрицы $\boldsymbol{W}$, из которых образованы соответствующие строки матрицы $\boldsymbol{W'}$:

$$\boldsymbol{W'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 00 & 00 & 10 & 11 & 00 & - & 11 & 00 & - \\ - & - & 01 & - & - & - & - & - & - \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1,2 \\ 3 \end{array} .$$

Следующим значением матрицы $\boldsymbol{W}$ является

$$\boldsymbol{W'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 00 & 00 & 10 & 11 & 00 & - & 11 & 00 & - \\ - & - & 01 & - & - & 01 & - & - & - \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1,2 \\ 3,4 \end{array} .$$

Продолжая этот процесс, получим следующую последовательность значений матрицы $\boldsymbol{W'}$:

$$\boldsymbol{W'}=\begin{array}{c l}\begin{array}{ccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccccc}00&00&10&11&00&-&11&00&11\\-&-&01&-&-&01&-&-&-\end{array}\right] & \begin{array}{r}1,2,6\\3,4\end{array}\end{array};\quad \boldsymbol{W'}=\begin{array}{c l}\begin{array}{ccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccccc}00&00&10&11&00&00&11&00&11\\-&-&01&-&-&01&-&-&-\end{array}\right] & \begin{array}{r}1,2,6,8\\3,4\end{array}\end{array};$$

$$\boldsymbol{W'}=\begin{array}{c l}\begin{array}{ccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccccc}00&00&10&11&00&00&11&00&11\\-&-&01&-&-&01&-&-&10\end{array}\right] & \begin{array}{r}1,2,6,8\\3,4,5\end{array}\end{array};\quad \boldsymbol{W'}=\begin{array}{c l}\begin{array}{ccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccccc}00&00&10&11&00&00&11&00&11\\-&-&01&-&11&01&-&-&10\end{array}\right] & \begin{array}{r}1,2,6,8\\3,4,5,7\end{array}\end{array}.$$

В последней матрице совместимы группы столбцов: $\{3\}, \{1,2,5\}, \{6,8\}, \{4,7,9\}$. После совмещения этих столбцов получим матрицу $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H}=\begin{array}{c l}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccc}10&00&00&11\\01&11&01&10\end{array}\right] & \begin{array}{l}1\\2\end{array}\end{array}.$$

Присвоив код 0 первой строке этой матрицы и код 1 второй строке, получим функцию $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g_1}(x_1,x_4,x_5)$ и, присвоив коды 00, 01, 10 и 11 соответственно столбцам 1, 2, 3 и 4, получим функцию $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{g_2}(x_2,x_3,x_4,x_5)$, задаваемые следующими матрицами:

$$\boldsymbol{U_1}=\begin{array}{c l}\begin{array}{ccc}x_1&x_4&x_5\end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{array}\right] & \begin{array}{l}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{array}\end{array};\ \boldsymbol{V_1}=\begin{array}{c l}v & \\ \left[\begin{array}{c}0\\0\\1\\1\\1\\0\\1\\0\end{array}\right] & \begin{array}{l}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{array}\end{array};\ \boldsymbol{U_2}=\begin{array}{c l}\begin{array}{cccc}x_2&x_3&x_4&x_5\end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccc}0&0&0&-\\0&0&1&-\\0&1&0&-\\0&1&1&-\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&-\\1&1&1&-\\1&0&0&-\end{array}\right] & \begin{array}{l}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{array}\end{array};\ \boldsymbol{V_2}=\begin{array}{c l}\begin{array}{cc}w_1&w_2\end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc}0&1\\0&1\\0&0\\1&1\\0&1\\1&0\\1&1\\1&0\\1&1\end{array}\right] & \begin{array}{l}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{array}\end{array}.$$

Искомая функция $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{g_1},\boldsymbol{g_2})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ представится следующими матрицами:

$$\boldsymbol{U}=\begin{array}{c l}\begin{array}{ccc}v&w_1&w_2\end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{array}\right] & \begin{array}{l}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{array}\end{array};\ \boldsymbol{V}=\begin{array}{c l}\begin{array}{cc}y_1&y_2\end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc}1&0\\0&0\\0&0\\1&1\\0&1\\1&0\\0&1\\1&0\end{array}\right] & \begin{array}{l}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{array}\end{array}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Perkowski M. A., Grygiel S.* A Survey of Literature on Functional Decomposition. Version IV (Technical Report). Portland, USA: Portland State University, Department of Electrical Engineering, 1995. 188 p.
2. *Поттосин Ю. В., Шестаков Е. А.* Табличные методы декомпозиции систем полностью определенных булевых функций. Минск: Белорус. наука, 2006. 327 с.
3. *Закревский А. Д., Поттосин Ю. В., Черемисинова Л. Д.* Логические основы проектирования дискретных устройств. М.: Физматлит, 2007. 592 с.
4. *Закревский А. Д.* Логический синтез каскадных схем. М.: Наука, 1981. 414 с.