

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/12/6

УДК 519.17

МИНИМАЛЬНЫЕ РЕБЕРНЫЕ РАСШИРЕНИЯ НАПРАВЛЕННЫХ
И ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗВЕЗД

М. Б. Абросимов

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия***E-mail:** mic@rambler.ru

Рассматриваются минимальные реберные k -расширения графов, которые получаются из звездного графа произвольной ориентацией ребер. Ранее было получено полное решение, описывающее минимальные вершинные и реберные k -расширения неориентированных звезд, а также минимальные вершинные k -расширения ориентированных звезд. В этой работе дается полное описание всех минимальных реберных k -расширений для ориентированных и направленных звезд.

Ключевые слова: минимальное расширение, оптимальная отказоустойчивая реализация, отказоустойчивость, звездные графы.

Введение

Ориентированным графом (далее орграфом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, называемое *множеством вершин*, а α — отношение на множестве вершин V , называемое *отношением смежности*. Орграф с антисимметричным отношением смежности называется *направленным графом*, или *диграфом*. Граф с симметричным и антирефлексивным отношением смежности называется *неориентированным графом*, или *неографом*. Основные определения даются по работе [1].

Граф с пустым отношением смежности называется *вполне несвязным* и обозначается O_n , где n — число вершин. Полный диграф без петель называется *турниром*. Циклической тройкой называется 3-вершинный турнир, у которого в каждой вершине есть одна исходящая и одна входящая дуга.

Симметризацией орграфа $\vec{G} = (V, \alpha)$ называется неограф $G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1}) \setminus \Delta)$, то есть симметризация орграфа получается заменой дуг ребрами и удалением петель.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, что для любых вершин $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: $(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$.

Два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющее отношение смежности: $(u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$ для любых $u, v \in V_1$. Изоморфизм графа на себя называется *автоморфизмом*. Две вершины u и v называются *подобными*, если существует автоморфизм $\varphi : \varphi(v) = u$. Аналогично, две дуги называются *подобными*, если существует автоморфизм, переводящий одну в другую.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k -расширением* (MP- k P) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) G^* является реберным k -расширением G , то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^* , получающийся удалением любых его k ребер;
- 2) G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Понятие минимального k -расширения введено на основе понятия оптимальной k -отказоустойчивой реализации, которое было предложено Дж. П. Хейзом в работе [2] для исследования отказоустойчивости технических систем. Позднее Дж. П. Хейз совместно с Ф. Харари в работах [3, 4] обобщили модель и распространили ее на случай реберной отказоустойчивости. В этих работах рассматривались неориентированные графы. Для ориентированных графов количество результатов существенно меньше. А. В. Киреева [5] рассматривала вершинную отказоустойчивость в ориентированных графах. Ею описана вершинная оптимальная 1-отказоустойчивая реализация произвольного функционального графа. Т. Санг и др. [6] использовали модель Хейза для нахождения вершинной и реберной оптимальной 1-отказоустойчивой реализации ориентированного цикла. В [7] доказывается, что задача проверки, является ли граф реберным (вершинным) k -расширением заданного графа, принадлежит классу NP-полных. Это означает, что едва ли появится эффективное решение задачи построения минимальных вершинных или реберных k -расширений для заданного произвольного графа, а новые результаты будут связаны с частным решением задачи для каких-либо семейств графов.

Неориентированной звездой (далее просто *звездой*) или *звездным графом* называется полный двудольный граф вида $K_{1,n}$, где $n > 0$ (то есть одна вершина смежна с n несмежными вершинами). *Ориентированной звездой* будем называть орграф, симметризация которого является звездой. Ориентированную звезду будем обозначать $Z_{m,n,p}$, где m и n — число вершин с единственной соответственно исходящей и входящей дугой, а p — число вершин с одной входящей и одной исходящей дугой. *Направленной звездой* будем называть ориентированную звезду, являющуюся диграфом, и обозначать $Z_{m,n}$ (у направленной звезды $p = 0$). Вершину, являющуюся концом или началом каждой дуги звезды, будем называть *центральной*. Вершину, соединенную со всеми остальными вершинами орграфа, будем называть *полной*. Полная вершина может быть соединена с другими вершинами исходящей дугой, входящей или парой встречных дуг. Центральная вершина является единственной полной вершиной звезды. Легко определить количество дуг звезды $Z_{m,n,p}$: $m + n + 2p$.

В работе [8] удалось найти общее решение для описания минимальных вершинных k -расширений предполных графов, то есть графов, которые имеют хотя бы одну вершину, смежную со всеми остальными. Звездный граф является частным случаем предполного графа, и в работе [9] дается полное описание минимальных вершинных и реберных k -расширений для неориентированных звезд. Дадим вспомогательное определение и приведем соответствующую теорему относительно минимальных реберных k -расширений.

Под *соединением* двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, не имеющих общих вершин, понимается граф $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1)$.

Теорема 1 [9]. При $k \leq n/2$ граф $K_{1+2k} + O_{n-2k}$ является единственным минимальным реберным k -расширением графа $K_1 + O_n$. При $k > n/2$ граф $K_1 + O_n$ не имеет минимальных реберных k -расширений.

1. Минимальные реберные 1-расширения

Обозначим через $ZK_{m,n,p}$ семейство графов, получающихся из звезды $Z_{m,n}$ добавлением $p - 1$ «центральной» вершины, соединением их между собой и центральной вершиной звезды $Z_{m,n}$ парами встречных дуг. Каждая из добавленных центральных вершин соединяется m входящими и n исходящими дугами с произвольными источниками и стоками звезды $Z_{m,n}$. По описанной схеме для заданной звезды в общем случае может быть построено много графов (рис. 1).



Рис. 1. Звезда $Z_{2,2}$ и графы вида $ZK_{2,2,2}$

Теорема 2. Относительно минимальных реберных 1-расширений направленных звезд $Z_{m,n}$ справедливо следующее:

- 1) при $m = n = 1$ звезда $Z_{1,1}$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение, которым является циклическая тройка;
- 2) при $mn > 1$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальные реберные 1-расширения: $K_{1,m+n}$ и графы, построенные по схемам $ZK_{m-1,n,2}$ и $ZK_{m,n-1,2}$;
- 3) при $m > 0, n = 0$ звезда $Z_{m,0}$ имеет минимальные реберные 1-расширения вида $ZK_{m-1,0,2}$;
- 4) при $m = 0, n > 0$ звезда $Z_{0,n}$ имеет минимальные реберные 1-расширения вида $ZK_{0,n-1,2}$;
- 5) при $m = 2, n = 1$ звезда $Z_{2,1}$ имеет еще одно минимальное реберное 1-расширение — турнир, получающийся из циклической тройки добавлением одной вершины и дуг от нее во все остальные вершины;
- 6) при $m = 2, n = 1$ звезда $Z_{2,1}$ имеет еще одно минимальное реберное 1-расширение — турнир, получающийся из циклической тройки добавлением одной вершины и дуг в нее из всех остальных вершин.

Доказательство. Убедимся, что орграфы $K_{1,m+n}$, $ZK_{m-1,n,2}$ и $ZK_{m,n-1,2}$ действительно являются реберными 1-расширениями звезды $Z_{m,n}$.

Для неориентированной звезды $K_{1,m+n}$ проверка вполне тривиальна. Пусть в звезде $Z_{m,n}$ есть и источники, и стоки, то есть $m > 0$ и $n > 0$. Рассмотрим удаление в графе $K_{1,m+n}$ любой дуги вида (v, u) , где v — центральная вершина, а u — любая другая. Вложение звезды $Z_{m,n}$ строится следующим образом: центральная вершина звезды $Z_{m,n}$ соответствует вершине v . Вершины u и $m - 1$ из оставшихся вершин графа $K_{1,m+n}$ будут соответствовать источникам, а остальные n вершин — стокам. Аналогично — для случая удаления дуги вида (u, v) . Заметим, что количество дуг в графе $K_{1,m+n}$ в два раза больше, чем в звезде $Z_{m,n}$, то есть $2(m + n)$.

Пусть $m > 0$; рассмотрим орграф $ZK_{m-1,n,2}$. В этом графе две вершины имеют полустепени исхода и захода $n + 1$ и m соответственно, а у остальных вершин суммы полустепеней исхода и захода равны 2. Общее количество дуг равно $2(m + n)$. Обозначим две полные вершины через v_1 и v_2 .

Все дуги рассматриваемого орграфа можно разделить на три группы подобных дуг:

- 1) дуги от вершин v_1 и v_2 в остальные вершины (если $n = 0$, то дуг этого типа может не быть);
- 2) дуги в вершины v_1 и v_2 из остальных вершин (если $m = 1$, то дуг этого типа может не быть);
- 3) дуги между вершинами v_1 и v_2 .

Рассмотрим удаление из орграфа $ZK_{m-1,n,2}$ дуги каждого вида и укажем, каким образом в получившийся оргграф может быть вложена звезда $Z_{m,n}$. Обозначим:

- 1) G_1 — граф, получающийся из орграфа $ZK_{m-1,n,2}$ удалением дуги первого типа; пусть для определенности это будет дуга (v_1, u) , где u — произвольная вершина, которая в звезде $Z_{m,n}$ была стоком;
- 2) G_2 — граф, получающийся из орграфа $ZK_{m-1,n,2}$ удалением дуги второго типа; пусть для определенности это будет дуга (w, v_1) , где w — произвольная вершина, которая в звезде $Z_{m,n}$ была истоком;
- 3) G_3 — граф, получающийся из орграфа $ZK_{m-1,n,2}$ удалением дуги третьего типа; пусть для определенности это будет дуга (v_2, v_1) .

Во всех трех случаях $m - 1$ вершин оргграфов G_1, G_2, G_3 , из которых идет дуга в вершину v_2 , и вершина v_1 будут соответствовать источникам звезды $Z_{m,n}$, вершина v_2 — центральной вершине, а оставшиеся n вершин оргграфов G_1, G_2, G_3 — стокам звезды $Z_{m,n}$.

Аналогично рассмотрим оргграф $ZK_{m,n-1,2}$ при $n > 0$. В этом графе две вершины имеют полустепени исхода и захода n и $m + 1$ соответственно, а у остальных вершин суммы полустепеней исхода и захода равны 2. Общее количество дуг снова равно $2(m + n)$. Как и раньше, обозначим две полные вершины через v_1 и v_2 . Все дуги рассматриваемого оргграфа делятся на три группы подобных дуг:

- 1) дуги от вершин v_1 и v_2 в остальные вершины (если $n = 1$, то дуг этого типа может не быть);
- 2) дуги в вершины v_1 и v_2 из остальных вершин (если $m = 0$, то дуг этого типа может не быть);
- 3) дуги между вершинами v_1 и v_2 .

Рассмотрим удаление из оргграфа $ZK_{m,n-1,2}$ дуги каждого вида и укажем, каким образом в получившийся оргграф может быть вложена звезда $Z_{m,n}$. Пусть

- 1) граф G_1 получается из оргграфа $ZK_{m,n-1,2}$ удалением дуги первого типа; пусть для определенности это будет дуга (v_1, u) , где u — произвольная вершина, которая в звезде $Z_{m,n}$ была стоком;
- 2) граф G_2 получается из оргграфа $ZK_{m,n-1,2}$ удалением дуги второго типа; пусть для определенности это будет дуга (w, v_1) , где w — произвольная вершина, которая в звезде $Z_{m,n}$ была истоком;
- 3) граф G_3 получается из оргграфа $ZK_{m,n-1,2}$ удалением дуги третьего типа; пусть для определенности это будет дуга (v_1, v_2) .

Во всех трех случаях $m - 1$ вершин оргграфов G_1, G_2, G_3 , из которых идет дуга в вершину v_2 , и вершина v_1 будут соответствовать источникам звезды $Z_{m,n}$, вершина v_2 — центральной вершине, а оставшиеся n вершин оргграфов G_1, G_2, G_3 — стокам звезды $Z_{m,n}$.

Исследуем, какие у звезды $Z_{m,n}$ могут быть минимальные реберные 1-расширения. Пусть G^* — некоторое минимальное реберное 1-расширение звезды $Z_{m,n}$. Так как звезда $Z_{m,n}$ вкладывается в оргграф G^* , то в G^* есть как минимум одна полная вершина. Рассмотрим случаи, когда такая вершина одна, две, три и более.

И с л у ч а й. Предположим, что полная вершина одна, и обозначим ее через v . В этом случае вершина v должна быть соединена со всеми остальными вершинами парой встречных дуг. Если бы это было не так и вершина v была бы соединена с некоторой вершиной u только одной дугой, например (v, u) , то вложение звезды $Z_{m,n}$ в граф $G^* - (v, u)$ было бы невозможно, так как ни одна вершина не будет соответствовать центральной вершине звезды $Z_{m,n}$. Граф $K_{1,m+n}$ имеет минимальное число дуг среди всех рассматриваемых графов, то есть графов с одной вершиной, соединенной парой встречных дуг со всеми остальными вершинами.

П с л у ч а й. Пусть есть две полные вершины. Обозначим их через v_1 и v_2 . Какие дуги должны быть между этими вершинами? Если между ними будет только одна дуга, например (v_1, v_2) , то граф, получающийся из G^* после удаления дуги (v_1, v_2) , не будет содержать ни одной вершины, которая могла бы соответствовать центральной вершине звезды $Z_{m,n}$. Следовательно, вершины v_1 и v_2 соединены парой встречных дуг.

Каковы могут быть полустепени исхода и захода вершин v_1 и v_2 ? Очевидно, что они не могут быть меньше, чем у центральной вершины звезды $Z_{m,n}$, то есть n и m соответственно. Общее количество дуг, входящих и исходящих из этих вершин, равно $m+n+1$ (две дуги между вершинами v_1 и v_2 и по одной дуге в или из оставшихся $m+n-1$ вершин). Таким образом, вершины v_1 и v_2 могут иметь либо полустепень исхода m , а полустепень захода $n+1$, либо наоборот. Можно заметить, что вершины v_1 и v_2 должны иметь одинаковые полустепени исхода и захода. В самом деле, если бы это было не так и вершины v_1 и v_2 имели бы разные полустепени, например вершина $v_1 - (m, n+1)$, а вершина $v_2 - (m+1, n)$, то удаление дуги (v_1, v_2) привело бы к орграфу, в котором вершины v_1 и v_2 имеют полустепени исхода и захода $(m-1, n+1)$ и $(m+1, n-1)$ соответственно. Ясно, что вложение в получившийся граф звезды $Z_{m,n}$ невозможно. Итак, среди всех графов, имеющих две вершины с одинаковыми полустепенями исхода и захода, соединенные между собой парой встречных дуг, а с остальными вершинами хотя бы одной дугой, подходящими являются только графы семейств $ZK_{m-1,n,2}$ и $ZK_{m,n-1,2}$.

П с л у ч а й. Рассмотрим случай, когда есть три вершины, соединенные со всеми остальными $m+n-2$ вершинами хотя бы одной дугой. Обозначим эти полные вершины через v_1, v_2 и v_3 . Подобное соединение возможно при $m+n \geq 2$. Между этими вершинами, очевидно, должна быть по крайней мере одна дуга. Общее количество дуг в таком графе будет не меньше чем $3 + 3(m+n-2) = 3(m+n-1)$.

Если $m+n=2$, то число дуг будет меньше, чем в рассмотренных ранее случаях I и II, где количество дуг равно $2(m+n)$. Непосредственной проверкой убедимся, что звезда $Z_{1,1}$, которая является ориентированной цепью, имеет подходящее реберное 1-расширение, которое в данном случае будет циклической тройкой (рис. 2).



Рис. 2. Звезда $Z_{1,1}$ и ее единственное МР-1Р

Звезды $Z_{2,0}$ и $Z_{0,2}$ не имеют реберных 1-расширений, построенных по рассматриваемой схеме. Если же добавить еще одну дугу, то мы получим графы, изоморфные

графам семейств $ZK_{1,0,2}$ и $ZK_{0,1,2}$. При $m + n = 3$ имеем $3(m + n - 1) = 2(m + n)$. То есть число дуг будет таким же, как и в рассмотренных ранее случаях. Подходящими звездами будут $Z_{3,0}$, $Z_{2,1}$, $Z_{1,2}$ и $Z_{0,3}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что звезды $Z_{3,0}$ и $Z_{0,3}$ не имеют реберных 1-расширений, построенных по рассматриваемой схеме, а звезды $Z_{2,1}$ и $Z_{1,2}$ имеют. Все их реберные 1-расширения изображены на рис. 3, причем первыми указаны расширения, укладывающиеся в рассматриваемую схему. Вершины v_1 , v_2 и v_3 образуют в них контур. Последующие три расширения принадлежат семействам $ZK_{2,0,2}$ и $ZK_{1,1,2}$ для звезды $Z_{2,1}$; $ZK_{0,2,2}$ и $ZK_{1,1,2}$ для звезды $Z_{1,2}$. Последние расширения — это звезды $K_{1,3}$. Видно, что звезды $Z_{2,1}$ и $Z_{1,2}$ имеют три изоморфных минимальных реберных 1-расширения и по два различных.

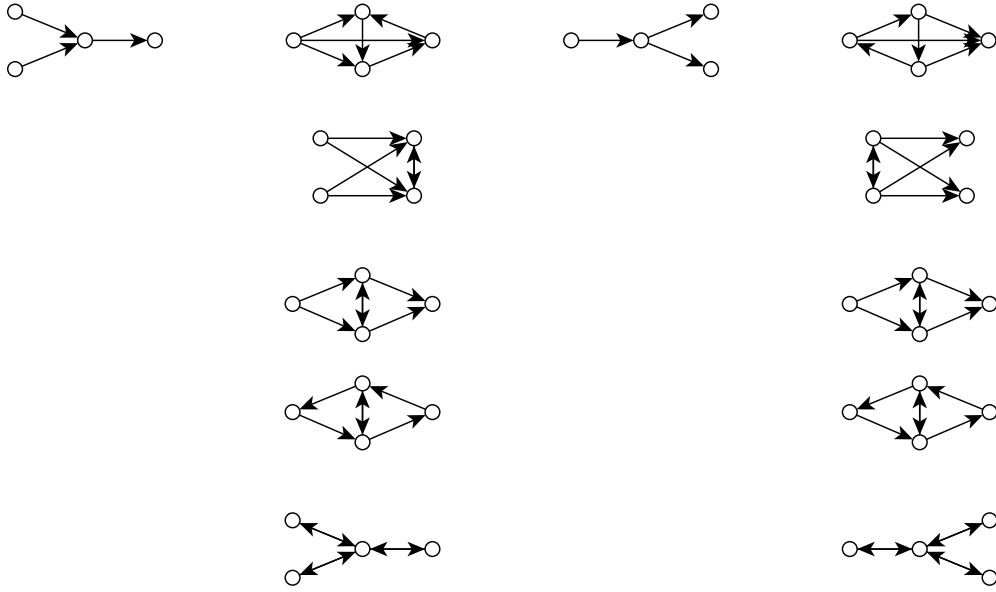


Рис. 3. Звезды $Z_{2,1}$ и $Z_{1,2}$ и все их МР-1Р

IV с л у ч а й. Рассмотрим случай, когда есть $p > 3$ вершин, соединенных со всеми остальными $m + n - p + 1$ вершинами хотя бы одной дугой. Подобное соединение возможно при $m + n \geq p - 1$. Между этими вершинами, очевидно, должна быть по крайней мере одна дуга, то есть индуцированный ими подграф является турниром. Общее количество дуг в таком графе будет не менее чем

$$p(m + n - p + 1) + p(p - 1)/2 = p(m + n) - p(p - 1)/2.$$

Исследуем, в каких случаях эта величина может быть меньше, чем $2(m + n)$ — количество дополнительных ребер в случаях I и II. Получаем

$$\begin{aligned} p(m + n) - p(p - 1)/2 &\leq 2(m + n), \\ (m + n)(p - 2) - p(p - 1)/2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Так как $m + n \geq p - 1$, то $(p - 1)(p - 2) - p(p - 1)/2 \leq 0$, откуда $(p - 1)(p - 2 - p/2) \leq 0$, а так как $p > 3$, то остается $p/2 - 2 \leq 0$, то есть $p \leq 4$.

Случаи, когда $p = 1, 2$ и 3 , были рассмотрены ранее, и, таким образом, еще только при $p = 4$ возможно реберное 1-расширение, которое будет иметь не больше дуг, чем расширения из случаев I и II. Итак, при $p = 4$ количество дуг есть $4(m + n) - 6$, а у

расширений в случаях I и II — $2(m+n)$, причем $m+n \geq 3$. Сравнивая, получаем, что лишь при $m+n = 3$ достигается равенство, а при остальных значениях количество дуг в расширении с $p = 4$ будет больше, чем в случаях I и II. При $m+n = 3$ имеем четыре звезды, которые мы уже рассматривали ранее: $Z_{3,0}$, $Z_{2,1}$, $Z_{1,2}$ и $Z_{0,3}$. Можно заметить, что эта ситуация идентична рассмотренной ранее и не дает новых реберных 1-расширений. ■

Следствие 1. Исходящая звезда, то есть направленная звезда вида $Z_{m,0}$, $m > 1$, имеет два неизоморфных минимальных реберных 1-расширения — граф $K_{1,m}$ и оргграф $ZK_{m-1,0,2}$.

Следствие 2. Входящая звезда, то есть направленная звезда вида $Z_{0,n}$, $n > 1$, имеет два неизоморфных минимальных реберных 1-расширения — граф $K_{1,m}$ и оргграф $ZK_{0,n-1,2}$.

Теорему 2 легко обобщить для ориентированных звезд. Обозначим через $ZK_{m,n,p,t}$ граф, получающийся из звезды $Z_{m,n}$ добавлением $t-1$ «центральной» вершины, соединением их между собой и центральной вершиной звезды $Z_{m,n}$ парами встречных дуг. Каждая из добавленных центральных вершин соединяется m входящими, n исходящими дугами и p ребрами с произвольными источниками и стоками звезды $Z_{m,n}$.

Теорема 3. Ориентированные звезды $Z_{m,n,p}$ при $m > 0$, $n > 0$ и $p > 0$ имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение — звезду $K_{1,m+n+p}$.

Доказательство. Пусть G^* — некоторое минимальное реберное 1-расширение звезды $Z_{m,n,p}$. Так как звезда $Z_{m,n,p}$ вкладывается в оргграф G^* , то в G^* есть как минимум одна полная вершина. Рассмотрим случаи, когда полная вершина одна и более.

И с л у ч а й. Предположим, что полная вершина одна, и обозначим ее через v . Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2, получим, что вершина v должна быть соединена со всеми остальными вершинами парой встречных дуг. Если бы это было не так и вершина v была бы соединена с некоторой вершиной u только одной дугой, например (v, u) , то вложение звезды $Z_{m,n,p}$ в граф $G^* - (v, u)$ было бы невозможно, так как ни одна вершина не будет соответствовать центральной вершине звезды $Z_{m,n,p}$. Граф $K_{1,m+n+p}$ имеет минимальное число дуг среди всех подходящих под этот случай графов, то есть графов с одной вершиной, соединенной парой встречных дуг со всеми остальными вершинами. Легко видеть, что звезда $K_{1,m+n+p}$ является реберным 1-расширением орзвезды $Z_{m,n,p}$. Рассмотрим удаление в графе $K_{1,m+n+p}$ любой дуги вида (v, u) , где v — центральная вершина, а u — любая другая. Вложение звезды $Z_{m,n,p}$ строится следующим образом: центральная вершина звезды $Z_{m,n,p}$ соответствует вершине v . Вершина u и $m-1$ из оставшихся вершин графа $K_{1,m+n}$ будут соответствовать источникам, а остальные $n+p$ вершин — стокам и вершинам, которые соединены с центральной вершиной парой встречных дуг. Заметим, что количество дуг в графе $K_{1,m+n+p}$ есть $2(m+n+p)$.

И с л у ч а й. Предположим, что вершин, соединенных дугой с остальными вершинами, всего t штук и $t > 1$. Повторяя рассуждения из теоремы 2, получим, что центральные вершины должны быть соединены между собой, что дает не менее $t(t-1)/2$ дуг, каждая из них — с p вершинами парой встречных дуг и с остальными $m+n-t+1$ вершинами по крайней мере одной дугой. Всего получаем дуг

$$t(t-1)/2 + 2pt + t(m+n-t+1) = t(m+n+2p - (t-1)/2).$$

Эта величина принимает минимальное (по $t > 1$) значение при $t = 2$, и это будет $2(m + n + p) + p - 1$. Однако при $t = 2$, как мы установили при исследовании случая II в доказательстве теоремы 2, центральные вершины должны быть соединены парой встречных дуг. Поэтому минимально возможное количество дуг по данной схеме может быть $2(m + n + p) + p$, и при $p > 0$ это больше числа дуг в графе $K_{1,m+n+p}$. ■

2. Минимальные реберные k -расширения

Обобщим результаты двух предыдущих теорем.

Теорема 4. Относительно минимальных реберных k -расширений направленных звезд $Z_{m,n}$ справедливо следующее:

- 1) при $m = n = k$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальным реберным k -расширением любой регулярный $(2k + 1)$ -вершинный турнир, и только их;
- 2) при $m = n + 1 = k$ звезда $Z_{m+1,m}$ имеет минимальным реберным k -расширением любой $(2k + 2)$ -вершинный турнир, который получается из регулярного $(2k + 1)$ -вершинного турнира добавлением дополнительной вершины-источника;
- 3) при $m + 1 = n = k$ звезда $Z_{m,m+1}$ имеет минимальным реберным k -расширением любой $(2k + 2)$ -вершинный турнир, который получается из регулярного $(2k + 1)$ -вершинного турнира добавлением дополнительной вершины-стока;
- 4) кроме случая $m = n = k$, звезда $Z_{m,n}$ при $k \leq m + n$ имеет минимальным реберным k -расширением графы вида $ZK_{m_1,n_1,k+1}$, где $m_1 + n_1 = m + n - k$, $\max\{0, m - k\} \leq m_1 \leq m$, $\max\{0, n - k\} \leq n_1 \leq n$. При $k > m + n$ звезда $Z_{m,n}$ не имеет минимальных реберных k -расширений.

Доказательство. Пусть $k > 1$ и G^* — некоторое минимальное реберное k -расширение звезды $Z_{m,n}$. Так как звезда $Z_{m,n}$ вкладывается в орграф G^* , то в G^* есть как минимум одна вершина, соединенная дугой со всеми остальными. Обозначим через p количество полных вершин; положим $N = m + n$. Очевидно, что $p \leq m + n + 1$. Удаление k любых дуг из графа G^* должно оставить по крайней мере одну полную вершину.

I с л у ч а й. Если все полные вершины в графе G^* соединены между собой одной дугой, то удаление такой дуги исключает две полные вершины. Поэтому количество полных вершин должно быть не менее $2k + 1$. Тогда количество дуг в таком орграфе будет не менее чем $(2k + 1)k + (2k + 1)(N - 2k) = (2k + 1)N - 2k^2 - k$, причем $2k \leq N$.

II с л у ч а й. Если все полные вершины в графе G^* соединены между собой парой встречных дуг, то удаление такой пары дуг исключает две полные вершины. Поэтому, если k четно, то количество полных вершин должно быть не менее $k + 1$. При нечетном $k = 2k_1 + 1$ с удалением k_1 пар встречных дуг будут исключены $k - 1$ полных вершин. Предположим, что останется еще лишь одна полная вершина. Если она будет соединена с некоторой вершиной только одной дугой, то, удалив ее, мы исключим последнюю полную вершину. Следовательно, эта вершина должна быть соединена с остальными вершинами также парой встречных дуг. Более того, удалив одну такую дугу, мы получим, что из единственной полной вершины либо исходит, либо входит в некоторую вершину единственная дуга. Следовательно, в звезде $Z_{m,n}$ должен быть хотя бы один источник и сток. В силу произвольности выбора исключаемых вершин можно сделать вывод, что при нечетном k , при $n > 0$, $m > 0$ и $k - 1 \leq N$, орграф G^* может иметь k полных вершин, соединенных между собой и со всеми остальными вершинами парой встречных дуг. Определим количество дуг в этом случае:

$$k(k - 1) + 2(N - k + 1)k = 2Nk - k^2 + k,$$

причем $k - 1 \leq N$.

III с л у ч а й. Если количество полных вершин в орграфе G^* есть $k + 1$, то между собой они должны быть соединены парой встречных дуг, но с остальными вершинами они могут быть соединены одной дугой. Мы уже встречались с такими орграфами, например это семейства $ZK_{m_1, n_1, k+1}$. Минимальное количество дуг в этом случае равно $(k + 1)k + (k + 1)(N - k) = N(k + 1)$, причем $k \leq N$.

Видно, что при больших значениях N количество дуг в последнем случае будет меньше, чем в случаях I и II. Определим более точные соотношения по количеству дуг между этими случаями. Случаи II и III:

$$\begin{aligned} 2Nk - k^2 + k &\leq N(k + 1), \\ N(k - 1) - k(k - 1) &\leq 0, \\ (N - k)(k - 1) &\leq 0. \end{aligned}$$

При $k = 1$ имеем равенство количества дуг. Случай II при $k = 1$ — это звезда $K_{1, N}$ из теоремы 2. При $k > 1$ интерес представляет случай $N \leq k$. Но так как в случае II $k \leq N$, то остается единственная возможность $k = N$. Легко видеть, что при $k = N$ графы в случаях II и III изоморфны и представляют собой полный граф K_n . Таким образом, при $k > 1$ случай II не представляет интереса.

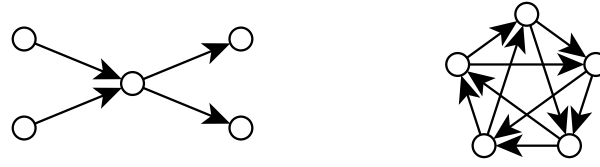
Случаи I и III:

$$\begin{aligned} (2k + 1)N - 2k^2 - k &\leq N(k + 1), \\ Nk - 2k^2 - k &\leq 0. \end{aligned}$$

Так как в случае I имеем ограничение $2k \leq N$, то интерес представляют всего два значения N . При $N = 2k$ получаем, что граф, построенный по схеме I, будет иметь меньше дуг, чем граф из случая III, а при $N = 2k + 1$ количество дуг в случаях I и III будет одинаково. Видно, что при этих значениях графы из случая I будут турнирами. Исследуем эти возможности подробнее.

$N = 2k$. В этом случае имеем $(2k + 1)$ -вершинный турнир. Удаляя k произвольных дуг, соединяющих различные вершины турнира, получим граф с единственной полной вершиной, которая соединена с каждой из остальных вершин одной дугой. Значит, чтобы звезда $Z_{m, n}$ вкладывалась в получившийся граф, в эту вершину должны входить m дуг и выходить n . В силу произвольности выбора это должно быть справедливо для всех вершин турнира, то есть все вершины должны иметь одинаковые степени исхода и захода. Это возможно лишь при $m = n = k$. Таким образом, только звезда вида $Z_{m, m}$ может иметь регулярный турнир минимальным реберным k -расширением при $k = m$. При $k = 1$ имеем звезду $Z_{1, 1}$, и ее минимальным реберным 1-расширением является циклическая тройка. На рис. 4 показана звезда $Z_{2, 2}$ и ее единственное минимальное реберное 2-расширение, построенное по описанной схеме.

$N = 2k + 1$. В этом случае имеем $(2k + 2)$ -вершинный турнир. Удаляя k произвольных дуг, соединяющих различные вершины турнира, получим граф с двумя полными вершинами, которые соединены с каждой из остальных вершин одной дугой. Значит, чтобы звезда $Z_{m, n}$ вкладывалась в получившийся граф, в одну из этих вершин должны входить m дуг и выходить n . Так как число вершин в турнире четно, то он не может быть регулярным и все вершины не могут иметь одинаковые полустепени исхода и захода. Следовательно, хотя бы одна вершина будет иметь полустепени исхода и захода, отличные от m и n . Однако такая вершина может быть только одна, потому что

Рис. 4. Звезда $Z_{2,2}$ и ее единственное МР-2Р

в противном случае, подбирая соответствующим образом k удаляемых дуг, мы могли бы получить орграф с двумя полными вершинами, ни одна из которых бы не имела m входящих и n исходящих дуг. Итак, в $(2k + 2)$ -вершинном турнире $2k + 1$ вершин должны иметь одинаковые полустепени исхода и захода — m и n соответственно. Таким образом, имеем $(2k + 1)m$ исходящих дуг, $(2k + 1)n$ входящих и одну неучтенную вершину, обозначим ее w . Так как число входящих и исходящих дуг должно быть равно, а $m \neq n$, то можно сделать вывод, что либо $m = n + 1$ и w является стоком, либо $n = m + 1$ и w является источником. Таким образом, только звезды вида $Z_{m+1,m}$ и $Z_{m,m+1}$ могут иметь минимальным реберным k -расширением при $k = m$ турнир, получающийся из регулярного $(2m + 1)$ -вершинного турнира добавлением вершины и дуг из нее во все вершины турнира для звезды $Z_{m+1,m}$ и из всех вершин турнира в добавленную для звезды $Z_{m,m+1}$. При $k = 1$ имеем звезды $Z_{2,1}$ и $Z_{1,2}$ и их минимальные реберные 1-расширения, упомянутые в п. 5 и 6 теоремы 2. Этим завершается исследование случая I. Рассмотрим далее наиболее общий случай III.

Кроме случая $N = 2k$, графы, построенные по схеме случая III, являются кандидатами на минимальные реберные k -расширения. Убедимся, что эти графы действительно будут являться реберными k -расширениями. Пусть G^* — произвольный граф вида $ZK_{m_1,n_1,k+1}$, где $m_1 + n_1 + k = m + n$. Рассмотрим удаление дуг между различными полными вершинами и остальными вершинами орграфа G^* . Удаление одной такой дуги исключает одну полную вершину. Удаление k дуг оставит единственную полную вершину. Эта полная вершина будет соединена с k вершинами парой встречных дуг, с m_1 вершинами исходящей дугой, а с n_1 вершинами входящей дугой. По предположению звезда $Z_{m,n}$ должна вкладываться в получившийся орграф. Если $m_1 > m$ или $n_1 > n$, то такое вложение будет невозможно. Аналогично, если $m_1 < m - k$ или $n_1 < n - k$. Если же все указанные неравенства выполняются, то недостающими вершинами для соответствия источникам и стокам звезды будут являться бывшие полные вершины орграфа G^* . Похожим образом можно рассмотреть удаления дуг между полными вершинами и убедиться, что графы вида $ZK_{m_1,n_1,k+1}$ действительно являются реберными k -расширениями звезды $Z_{m,n}$ при выполнении указанных ранее ограничений. ■

На рис. 5 показаны все минимальные реберные 2-расширения звезд $Z_{2,3}$ и $Z_{3,2}$.

Теорема 5. Относительно минимальных реберных k -расширений ориентированных звезд $Z_{m,n,p}$ справедливо следующее:

- 1) при четном k звезда $Z_{m,n,p}$ имеет минимальные реберные k -расширения вида $ZK_{m_1,n_1,p,k+1}$, и только их;
- 2) при нечетном k , $m > 0$, $n > 0$ и $(m + n - k)(k - 1) - 2p \leq 0$ звезда $Z_{m,n,p}$ имеет минимальное реберное k -расширение вида $K_k + O_{m+n+p-k+1}$;
- 3) при $k \leq m + n$ и $(m + n - k)(k - 1) - 2p \geq 0$ звезда $Z_{m,n,p}$ имеет минимальные реберные k -расширения вида $ZK_{m_1,n_1,p,k+1}$;

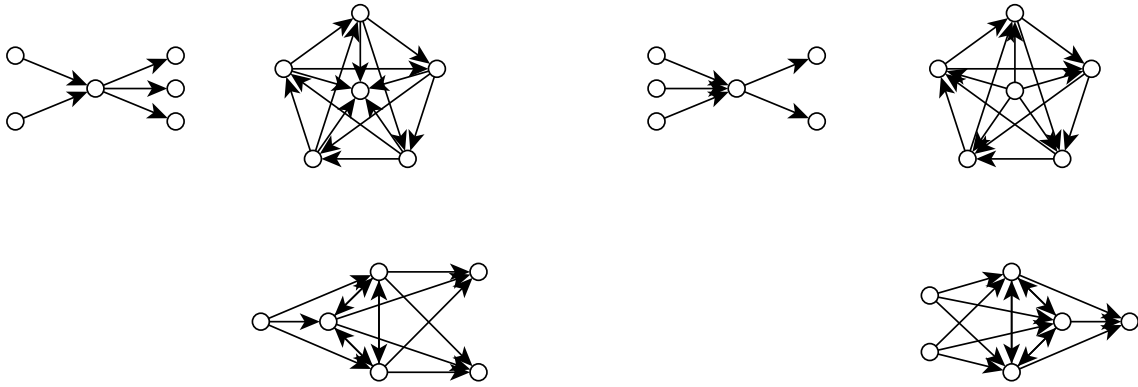


Рис. 5. Звезды $Z_{2,3}$ и $Z_{3,2}$ и их МР-2Р: единственное в форме турнира и по одному представителю семейств $ZK_{1,2,3}$ и $ZK_{2,1,3}$

4) при $k > m + n$ звезда $Z_{m,n,p}$ не имеет минимальных реберных k -расширений.

Доказательство. Пусть $k > 1$ и G^* — некоторое минимальное реберное k -расширение звезды $Z_{m,n,p}$. Так как звезда $Z_{m,n,p}$ вкладывается в орграф G^* , то в G^* есть как минимум одна полная вершина. Обозначим через t количество полных вершин; положим $N = m + n$. Очевидно, что $t \leq m + n + 1$. Удаление k любых дуг из графа G^* должно оставить по крайней мере одну полную вершину.

И с л у ч а й. Если все полные вершины в графе G^* соединены между собой одной дугой, то удаление одной такой дуги исключает две полные вершины. Поэтому количество полных вершин должно быть не менее $2k + 1$. Каждая полная вершина должна быть соединена с p вершинами парой встречных дуг, а с остальными по крайней мере одной дугой. Тогда количество дуг в таком орграфе будет не менее чем

$$(2k + 1)k + (2k + 1)(N - 2k) + 2(2k + 1)p = (2k + 1)N - 2k^2 - k + 2(2k + 1)p,$$

причем $2k \leq N$.

И с л у ч а й. Если все полные вершины в графе G^* соединены между собой парой встречных дуг, то удаление такой пары дуг исключает две полные вершины. Поэтому если k четно, то количество полных вершин должно быть не менее $k + 1$. При нечетном $k = 2k_1 + 1$ удаление k_1 пары встречных дуг исключает $k - 1$ полных вершин. Предположим, что останется еще лишь одна полная вершина. Если она будет соединена с некоторой вершиной только одной дугой, то, удалив ее, мы исключим последнюю полную вершину. Следовательно, эта вершина должна быть соединена с остальными вершинами также парой встречных дуг. Более того, удалив одну такую дугу, мы получим, что из единственной полной вершины либо исходит, либо входит в некоторую вершину единственная дуга. Следовательно, в звезде $Z_{m,n}$ должен быть хотя бы один источник и сток. В силу произвольности выбора исключаемых вершин можно сделать вывод, что при нечетном k , при $n > 0$, $m > 0$ и $k - 1 \leq N$ орграф G^* может иметь k полных вершин, соединенных между собой и со всеми остальными вершинами парой встречных дуг. Такой граф можно представить как $K_k + O_{m+n+p-k+1}$. Определим количество дуг в этом случае: $k(k - 1) + 2(N - k + 1 + p)k = 2Nk - k^2 + k + 2pk$, причем $k - 1 \leq N$.

И с л у ч а й. Если количество полных вершин в орграфе G^* есть $k + 1$, то между собой они должны быть соединены парой встречных дуг, с p вершинами также

парой встречных дуг, а с остальными вершинами они могут быть соединены одной дугой. Мы уже встречались с такими орграфами, например это семейства $ZK_{m_1, n_1, p, k+1}$. Определим минимальное количество дуг в этом случае:

$$(k+1)k + (k+1)(N-k) + 2(k+1)p = N(k+1) + 2(k+1)p, \text{ причем } k \leq N.$$

Видно, что при больших значениях N количество дуг в последнем случае будет минимальным. Определим более точные соотношения по количеству дуг между этими случаями. Случаи II и III:

$$\begin{aligned} 2Nk - k^2 + k + 2pk &\leq N(k+1) + 2(k+1)p, \\ N(k-1) - k(k-1) - 2p &\leq 0, \\ (N-k)(k-1) - 2p &\leq 0. \end{aligned}$$

При $k = 1$ в теореме 3 мы получили, что графы из случая II всегда имеют меньшее число дуг, чем графы из случая III. При $k > 1$ ситуация представляется более сложной: при значениях N , много больших, чем k и p , меньше дуг будет в схеме III, а при нечетных значениях k , близких к N или больших, чем p , меньше дуг будет в схеме II.

Случаи I и III:

$$\begin{aligned} (2k+1)N - 2k^2 - k + 2(2k+1)p &\leq N(k+1) + 2(k+1)p, \\ Nk - 2k^2 - k + 2kp &\leq 0. \end{aligned}$$

Так как в случае I имеем ограничение $2k \leq N$, то при $p > 0$ у графов из случая I будет всегда больше дуг, чем у графов из случая III. ■

Рассмотрим для примера поиск минимальных реберных 3-расширений звезды $Z_{2,2,1}$. Посчитаем величину $(m+n-k)(k-1) - 2p$ и получим

$$(2+2-3)(3-1) - 2*1 = 0.$$

Таким образом, по теореме 5 получаем, что звезда $Z_{2,2,1}$ будет иметь минимальные реберные 3-расширения двух видов: граф $K_3 + O_3$ и графы вида $ZK_{1,0,1,4}$ и $ZK_{0,1,1,4}$. Все эти графы содержат по 24 дуги. На рис. 6 показаны все минимальные реберные 3-расширения звезды $Z_{2,2,1}$. Для облегчения визуализации расширений пара встречных дуг заменена неориентированным ребром.

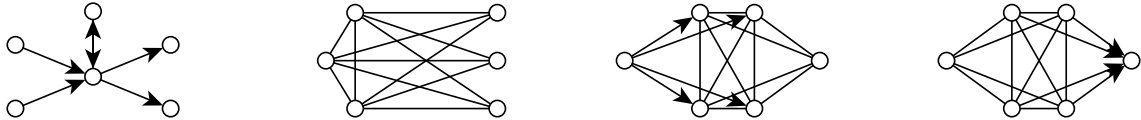


Рис. 6. Звезда $Z_{2,2,1}$ и все ее МР-3Р

Заключение

В данной работе дано аналитическое решение задачи описания минимальных реберных k -расширений для направленных и ориентированных звезд. Ранее удалось найти полное решение задачи описания минимальных вершинных k -расширений для направленных звезд, а также минимальных вершинных и реберных k -расширений для неориентированных звезд. Полученные результаты расширяют класс графов, для которых удалось найти полное решение рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов А. М., Салый В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
2. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
3. Harary F. and Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
4. Harary F. and Hayes J. P. Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
5. Киреева А. В. Отказоустойчивость в функциональных графах // Упорядоченные множества и решетки. Саратов, 1995. Вып. 11. С. 32–38.
6. Sung T. Y., Lin C. Y., Chuang Y. C., and Hsu L. H. Fault tolerant token ring embedding in double loop networks // Inform. Process. Lett. 1998. V. 66. P. 201–207.
7. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
8. Абросимов М. Б. Минимальные k -расширения предполных графов // Изв. вузов. Математика. 2003. № 6(493). С. 3–11.
9. Абросимов М. Б. Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: СГУ, 2006. Вып. 7. С. 3–5.
10. Абросимов М. Б. Минимальные расширения транзитивных турниров // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 17. С. 187–190.