

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

DOI 10.17223/20710410/11/1

УДК 519.1.

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ ПОКРЫТИЙ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА

Р. М. Ганопольский

Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Россия

E-mail: rodion@utmn.ru

Рассматриваются производящие функции последовательности комбинаторных чисел, исчисляющих количество покрытий конечного множества подмножествами с заданными мощностями. Проведен анализ производящих функций, приведены частные случаи, получен ряд рекуррентных соотношений.

Ключевые слова: *покрытие, конечное множество, комбинаторные числа, производящие функции.*

Введение

В работе [1] введены комбинаторные числа неупорядоченных покрытий конечного множества мощности n подмножествами с фиксированными мощностями

$${}_nN(k_1, k_2, \dots, k_n), \quad (1)$$

где k_i — количество подмножеств мощности i в покрытии. В случае, когда часть коэффициентов $k_i = 0$, предложено использовать другое обозначение — ${}_nN_{l_1 l_2 \dots l_m}^{k_1 k_2 \dots k_m}$, где k_i — количество подмножеств мощности l_i в покрытии. Для введенных комбинаторных чисел получены формула

$${}_nN_{l_1 l_2 \dots l_m}^{k_1 k_2 \dots k_m} = \prod_{i=1}^m C_{C_n}^{k_i} + \sum_{i \geq 1} (-1)^i C_n^i \prod_{j=1}^m C_{C_{n-i}}^{k_j}, \quad (2)$$

где $C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!}$ — биномиальный коэффициент, и соотношение

$$\sum_{i \geq 0} C_n^i {}_{n-i}N_{l_1 l_2 \dots l_m}^{k_1 k_2 \dots k_m} = \prod_{i=1}^m C_{C_n}^{k_i}. \quad (3)$$

В случае, когда в (1) $k_n = 1$, формула (2) имеет вид

$${}_nN(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 1) = \prod_{i=1}^{n-1} C_{C_n}^{k_i}. \quad (4)$$

Кроме того, принято, что

$${}_0N_0^0 = 1, \quad (5)$$

то есть число покрытий пустого множества нулевым количеством пустых подмножеств равно 1.

1. Производящие функции

Производящую функцию последовательности чисел (1) будем искать в виде

$$F(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{k \geq 0} {}_nN(k_1, k_2, \dots, k_n) \prod_i A_i^{k_i},$$

где второе суммирование идет по всевозможным наборам $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, $k \geq 0$ — общее условие для каждого числа из набора. Таким образом, комбинаторное число ${}_nN(k_1, k_2, \dots, k_n)$ является коэффициентом перед $x^n \prod_i A_i^{k_i}$ в разложении производящей функции по степеням переменных x и A_i . Разложение функции (1) по степеням x представляет собой сумму $F(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + \dots$, где

$$D_n = \sum_{k \geq 0} {}_nN(k_1, k_2, \dots, k_n) \prod_i A_i^{k_i} \quad (6)$$

— производящая функция последовательности чисел покрытий множества мощности n .

Подставим формулу для комбинаторных чисел (2) в правую часть выражения (6), учтём (5), поменяем порядок суммирования и воспользуемся биномиальной теоремой:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} {}_nN(k_1, k_2, \dots, k_n) \prod_i A_i^{k_i} &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \prod_{i=1}^{n-j} C_{C_{n-j}^i}^{k_i} A_i^{k_i} = \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \sum_{k \geq 0} \prod_{i=1}^{n-j} C_{C_{n-j}^i}^{k_i} A_i^{k_i} = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \prod_{i=1}^{n-j} (1 + A_i)^{C_{n-j}^i}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$D_n = \sum_{j \geq 0} (-1)^j C_n^j \prod_{i=1}^{n-j} (1 + A_i)^{C_{n-j}^i}, \quad (7)$$

а производящая функция равна

$$F(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{j \geq 0} (-1)^j C_n^j \prod_{i=1}^{n-j} (1 + A_i)^{C_{n-j}^i}. \quad (8)$$

Поменяем в (8) порядок суммирования:

$$F(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = \sum_{j \geq 0} \prod_{i=1}^j (1 + A_i)^{C_j^i} \sum_{n \geq j} (-1)^{n-j} C_n^j x^n.$$

Воспользовавшись значением суммы $\sum_{n \geq j} (-1)^{n-j} C_n^j x^n = \frac{x^j}{(1+x)^{j+1}}$, получаем выражение для производящей функции последовательности чисел (1)

$$F(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = \sum_{j \geq 0} \frac{x^j \prod_{i=1}^j (1 + A_i)^{C_j^i}}{(1+x)^{j+1}}. \quad (9)$$

С помощью аналогичных преобразований определим для чисел (1) экспоненциальную производящую функцию. Будем искать её в виде

$$E(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{k \geq 0} {}_nN(k_1, k_2, \dots, k_n) \prod_i A_i^{k_i} \quad (10)$$

или, воспользовавшись функциями (7),

$$E(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} D_n \frac{x^n}{n!},$$

то есть экспоненциальной функция является только по переменной x . Таким образом,

$$E(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \prod_{i=1}^{n-j} (1 + A_i)^{C_{n-j}^i}. \quad (11)$$

Используем равенство $\frac{1}{n!} C_n^j = \frac{1}{j!(n-j)!}$, произведем замену $n-j \rightarrow j$ и поменяем порядок суммирования в (11). Получим выражение для экспоненциальной производящей функции последовательности чисел (1):

$$E(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = e^{-x} \sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!} \prod_{i=1}^j (1 + A_i)^{C_j^i}. \quad (12)$$

2. Анализ производящих функций

Проанализируем выражение (12) для экспоненциальной производящей функции. Переменные A_i можно интерпретировать как множества мощности i . Тогда произведение

$$\prod_{i=1}^n (1 + A_i)^{C_n^i} \quad (13)$$

— это всевозможные покрытия множества мощности n и всех его подмножеств, включая пустое, а функция D_n (7) — покрытие множества мощности n после исключения из семейства покрытий (13) всех покрытий собственных подмножеств исходного множества.

В (7) переменная A_n содержится только в первом слагаемом (13), из этого факта следует формула (4). А из соотношения (3) следует, что

$$\sum_i C_n^i D_i = \prod_{j=1}^n (1 + A_j)^{C_n^j}.$$

Приравнявая нулю произвольные переменные A_i , получаем покрытия, включающие подмножества только определенных мощностей, например,

$$D_n(A_l) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j (1 + A_l)^{C_{n-j}^l}$$

— покрытие множества мощности n подмножествами мощности l ,

$$D_n(A_l, A_{l+1}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j (1 + A_l)^{C_{n-j}^l} (1 + A_{l+1})^{C_{n-j}^{l+1}}$$

— покрытие подмножествами мощности l и $l+1$. Соответственно

$$E(x; A_l) = e^{-x} \sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!} (1 + A_l)^{C_j^l} \quad (14)$$

— экспоненциальная производящая функция последовательности чисел покрытий множеств подмножествами мощности l , а

$$E(x; A_l, A_{l+1}) = e^{-x} \sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!} (1 + A_l)^{C_l^j} (1 + A_{l+1})^{C_{l+1}^j} \quad (15)$$

— подмножествами мощности l и $l + 1$.

Приравняв в (13) все переменные A_i переменной A , с учетом равенства $\prod_{i=1}^n (1 + A)^{C_n^i} = (1 + A)^{2^n - 1}$ получим экспоненциальную производящую функцию для последовательности чисел k -покрытий (покрытия, содержащие ровно k подмножеств [2]):

$$E(x; A) = e^{-x} \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} (1 + A)^{2^n - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j (1 + A)^{2^{n-j} - 1}.$$

Раскроем скобки и поменяем порядок суммирования:

$$E(x; A) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \sum_{k=0}^{2^{n-j}-1} C_{2^{n-j}-1}^k A^k = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{2^n-1} A^k \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j C_{2^{n-j}-1}^k. \quad (16)$$

Коэффициент перед мономом $x^n A^k / n!$ в функции (16) — это количество k -покрытий множества мощности n [2]: $C_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j C_{2^{n-j}-1}^k$.

Приравняв переменную A единице, получим экспоненциальную производящую функцию последовательности чисел покрытий множества мощности n [2, 3]:

$$E(x; 1) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j 2^{2^{n-j}-1}. \quad (17)$$

Выражения, подобные (16) и (17), после аналогичных преобразований получаются из производящей функции (9).

Если производящая функция какой-либо последовательности чисел покрытий с фиксированными мощностями подмножеств является сложной функцией от функций E (12) (или от функции F (9), или от функций D_i (6)), т. е. $G(x, y; A_1, A_2, \dots) = G(E(x; A_1, A_2, \dots), y)$, где y — дополнительная переменная, задающая ограничение на покрытия, то приравнивание всех переменных A_i переменной A дает следующую производящую функцию последовательности чисел k -покрытий:

$$A_i \rightarrow A \Rightarrow G(E(x; A_1, A_2, \dots), y) \rightarrow G(E(x; A), y).$$

Справедливо и обратное преобразование

$$G(E(x; A), y) \rightarrow G(E(x; A_1, A_2, \dots), y).$$

Таким же образом можно трансформировать производящую функцию, зависящую от $E(x; A)$, в производящую функцию, зависящую от $E(x; 1)$, то есть от производящей функции последовательности числа покрытий множества мощности n (17):

$$G(E(x; A), y) \rightarrow G(E(x; 1), y)$$

и обратно:

$$G(E(x; 1), y) \rightarrow G(E(x; A), y).$$

Разложим производящую функцию (7) по степеням переменной A_1 :

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \sum_{i=0}^k C_k^i A_1^i \prod_{j=2}^k (1 + A_j)^{C_j^i} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \sum_{i=0}^k C_n^i C_{n-i}^{n-k} A_1^i \prod_{j=2}^k (1 + A_j)^{C_j^i} = \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i A_1^i \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k C_{n-i}^k \prod_{j=2}^{n-k} (1 + A_j)^{C_{n-k}^j}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь мы воспользовались свойством биномиальных коэффициентов [4] $C_n^k C_k^i = C_n^i C_{n-i}^{n-k}$ и поменяли порядок суммирования, произведя замену $n - k \rightarrow k$. Так как по определению $C_j^i = 0$ для $i > j \geq 0$, то сумму по k в (18) можно продолжить до n :

$$\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k C_{n-i}^k \dots = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{n-i}^k \dots$$

Для дальнейшего преобразования воспользуемся тождествами [4]

$$C_s^r = (-1)^r C_{r-s-1}^r, \quad \sum_r C_s^r C_p^{t-r} = C_{s+p}^t.$$

Преобразуем $(-1)^k C_{n-i}^k$ и разложим в сумму:

$$(-1)^k C_{n-i}^k = C_{k-n+i-1}^k = \sum_{l=0}^i C_i^l C_{k-n-1}^{k-l} = \sum_{l=0}^i C_i^l (-1)^{k-l} C_{n-l}^{k-l}.$$

Используем получившееся выражение для преобразования суммы в (18), затем поменяем порядок суммирования и произведем замену $k - l \rightarrow k$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{n-i}^k \prod_{j=2}^{n-k} (1 + A_j)^{C_j^i} &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^i C_i^l (-1)^{k-l} C_{n-l}^{k-l} \prod_{j=2}^{n-k} (1 + A_j)^{C_j^i} = \\ &= \sum_{l=0}^i C_i^l \sum_{k=0}^{n-l} (-1)^k C_{n-l}^k \prod_{j=2}^{n-k-l} (1 + A_j)^{C_{n-k-l}^j}. \end{aligned}$$

Воспользуемся значением производящих функций D_n при $A_1 = 0$:

$$D_n(A_1 = 0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \prod_{j=2}^{n-k} (1 + A_j)^{C_j^k}.$$

Окончательно получим разложение D_n по степеням переменной A_1 :

$$D_n = \sum_{i=0}^n C_n^i A_1^i \sum_{l=0}^i C_i^l D_{n-l}(A_1 = 0). \quad (19)$$

3. Получение рекуррентных соотношений

С помощью преобразований выражения для производящей функции (12) получим несколько рекуррентных соотношений.

Найдем частную производную по x от левой и правой частей выражения (12), предварительно умножив обе части на e^x :

$$\frac{\partial(e^x E)}{\partial x} = e^x \left(E + \frac{\partial E}{\partial x} \right) = \sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!} \prod_{i=1}^{j+1} (1 + A_i)^{C_{j+1}^i}.$$

Получившуюся в правой части сумму можно вывести с помощью следующих операций над функцией E :

$$\sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!} \prod_{i=1}^{j+1} (1 + A_i)^{C_{j+1}^i} = \frac{\partial(e^x E)}{\partial A_1} \frac{1 + A_1}{x}.$$

Отсюда следует, что

$$x \left(E + \frac{\partial E}{\partial x} \right) = \frac{\partial E}{\partial A_1} (1 + A_1). \quad (20)$$

Коэффициент перед каждым произведением

$$\frac{x^n}{n!} \prod_{i=1}^n A_i^{k_i} \quad (21)$$

в (10) при произвольных операциях над производящей функцией (вычисление производных и умножение на переменные) меняется следующим образом [4, 5]:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow {}_n N(k_1, \dots, k_n); \\ xE &\rightarrow {}_{n-1} N(k_1, \dots, k_{n-1}) \text{ для } n > 0; \\ x^s E &\rightarrow n^s {}_{n-s} N(k_1, \dots, k_{n-s}) \text{ для } n \geq s; \\ A_l E &\rightarrow {}_n N(\dots, k_l - 1, \dots) \text{ для } k_l > 0; \\ \frac{\partial E}{\partial x} &\rightarrow {}_{n+1} N(k_1, \dots, k_n, 0); \\ \frac{\partial^m E}{\partial x^m} &\rightarrow {}_{n+m} N(k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0); \\ \frac{\partial E}{\partial A_l} &\rightarrow (k_l + 1) {}_n N(\dots, k_l + 1, \dots); \\ x \frac{\partial E}{\partial x} &\rightarrow {}_n N(k_1, \dots, k_n); \\ x^s \frac{\partial^m E}{\partial x^m} &\rightarrow n^s {}_{n+m-s} N(k_1, \dots, k_{n+m-s}) \text{ для } s \geq m; \\ A_l \frac{\partial E}{\partial A_l} &\rightarrow k_l {}_n N(\dots, k_l, \dots), \end{aligned} \quad (22)$$

где $n^s = n(n-1) \cdots (n-s+1)$ — убывающая степень [4]. Применяя правила (22) к (20), получаем рекуррентное соотношение

$$n {}_{n-1} N(k_1, \dots) + n {}_n N(k_1, \dots) = (k_1 + 1) {}_n N(k_1 + 1, \dots) + k_1 {}_n N(k_1, \dots),$$

или, перейдя от n к $n+1$,

$${}_{n+1} N(k_1 + 1, \dots)(k_1 + 1) = {}_{n+1} N(k_1, \dots)(n - k_1 + 1) + {}_n N(k_1, \dots)(n + 1).$$

В случае производной степени s от произведения $e^x E$

$$\frac{\partial^s(e^x E)}{\partial x^s} = e^x \left(E + \sum_{i=1}^s C_s^i \frac{\partial^i E}{\partial x^i} \right) = \sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!} \prod_{i=1}^{j+s} (1 + A_i)^{C_{j+s}^i}$$

правую часть выражения можно получить с помощью преобразований

$$\sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!} \prod_{i=1}^{j+s} (1 + A_i)^{C_{j+s}^i} = s! \frac{\partial^s(e^x E)}{\partial A_s} \frac{1 + A_s}{x^s}.$$

Таким образом,

$$x^s \left(E + \sum_{i=1}^s C_s^i \frac{\partial^i E}{\partial x^i} \right) = s! \frac{\partial(e^x E)}{\partial A_s} \frac{1 + A_s}{x^s}.$$

Используя правила (22) и тождество $\frac{n^s}{s!} = C_n^s$, получаем соотношение

$$C_n^s \sum_{i=0}^s C_{s+n-i}^i N(k_1, \dots, k_n) = (k_s + 1)_n N(\dots, k_s + 1, \dots) + k_s {}_n N(\dots, k_s, \dots).$$

Для получения следующего рекуррентного соотношения воспользуемся свойством биномиальных коэффициентов $C_n^l + C_n^{l+1} = C_{n+1}^{l+1}$. В производящей функции (15) при замене всех переменных A_l на переменные A_{l+1}

$$A_l \rightarrow A_{l+1} \Rightarrow (1 + A_l) C_n^l (1 + A_{l+1})^{C_n^{l+1}} \rightarrow (1 + A_{l+1})^{C_{n+1}^{l+1}}$$

получаем произведение, стоящее в выражении для экспоненциальной производящей функции (14) перед x^{n+1} :

$$\sum_n \frac{x^n}{n!} (1 + A_{l+1})^{C_{n+1}^{l+1}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_n \frac{x^n}{n!} (1 + A_{l+1})^{C_n^{l+1}} \right).$$

Таким образом,

$$E(x; A_l, A_{l+1})|_{A_l \rightarrow A_{l+1}} = E(x; A_{l+1}) + \frac{\partial E(x; A_{l+1})}{\partial x}.$$

При проведении замены всех переменных A_l переменными A_{l+1} коэффициент перед произведением (21) равен $\sum_{k_1+k_2=k} {}_n N_{l, l+1}^{k_1, k_2}$. Получаем равенство

$$\sum_{k_1+k_2=k} {}_n N_{l, l+1}^{k_1, k_2} = {}_n N_{l+1}^k + {}_{n+1} N_{l+1}^k,$$

или, после преобразования,

$${}_{n+1} N_{l+1}^k = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ k_1>0}} {}_n N_{l, l+1}^{k_1, k_2}.$$

В выражении (15) можно не все переменные A_l заменить переменными A_{l+1} , а оставить одну переменную в каждом слагаемом неизменной:

$$[C_n^l - 1] A_l \rightarrow A_{l+1} \Rightarrow (1 + A_l) C_n^l (1 + A_{l+1})^{C_n^{l+1}} \rightarrow C_n^l (1 + A_l) (1 + A_{l+1})^{C_{n+1}^{l+1} - 1}. \quad (23)$$

Здесь $[k]A_l$ означает, что следующее действие производим с k переменными A_l ; появляется коэффициент C_n^l , так как выбрать одну неизменяемую переменную A_l можно именно таким числом способов.

Такое же выражение с точностью до константы можно получить в результате замены одной из переменных A_{l+1} переменной A_l :

$$[1] A_{l+1} \rightarrow A_l \Rightarrow (1 + A_{l+1})^{C_{n+1}^{l+1}} \rightarrow C_{n+1}^{l+1} (1 + A_l) (1 + A_{l+1})^{C_{n+1}^{l+1} - 1}. \quad (24)$$

После преобразований (23) и (24) сумма (15) будет равна в первом случае

$$\sum_{n \geq l} C_n^l \frac{x^n}{n!} (1 + A_l)(1 + A_{l+1})^{C_{n+1}^{l+1}-1} = \sum_{n \geq l} \frac{x^n}{l!(n-l)!} (1 + A_l)(1 + A_{l+1})^{C_{n+1}^{l+1}},$$

во втором —

$$\sum_{n \geq l} C_{n+1}^{l+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (1 + A_l)(1 + A_{l+1})^{C_{n+1}^{l+1}-1} = \sum_{n \geq l} \frac{x^{n+1}}{(l+1)!(n-l)!} (1 + A_l)(1 + A_{l+1})^{C_{n+1}^{l+1}}.$$

Сравнивая полученные выражения, выведем соотношение для функции E :

$$x E(x; A_l, A_{l+1})|_{[\max -1]A_l \rightarrow A_{l+1}} = (l+1) E(x; A_{l+1})|_{[1]A_{l+1} \rightarrow A_l}.$$

Здесь $[\max -1] A_l$ — следующее действие производим со всеми переменными A_l в мономе, кроме одной. В каждом мономе $A_l^{k_1} A_{l+1}^{k_2}$ можно оставить без изменения одну из k_1 переменных A_l , а в мономе A_{l+1}^k — изменить одну из k переменных A_{l+1} . Следовательно, верно равенство

$$n \sum_{k_1+k_2=k} k_1 {}_n N_{l, l+1}^{k_1, k_2} = k(l+1) {}_n N_{l+1}^k,$$

или после преобразования

$${}_{n+1} N_{l+1}^k = \frac{(n+1)}{k(l+1)} \sum_{k_1+k_2=k} k_1 {}_n N_{l, l+1}^{k_1, k_2}.$$

Для вывода следующего рекуррентного соотношения сравним правые части выражений (6) и (19) при одинаковых степенях A_1 :

$$\sum_{k \geq 0} {}_n N(k_1, k_2, \dots, k_n) \prod_{i>1} A_i^{k_i} = C_n^{k_1} \sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j D_{n-j}(A_1 = 0). \quad (25)$$

Подставим значение $D_{n-j}(A_1 = 0)$ в (25) и приравняем коэффициенты при одинаковых мономах $\prod A_i^{k_i}$:

$${}_n N(k_1, k_2, \dots, k_{n-k_1}, 0, \dots, 0) = C_n^{k_1} \sum_{j=0}^{k_1} C_{k_1}^j {}_{n-j} N(0, k_2, \dots, k_{n-k_1}, 0, \dots, 0).$$

Заключение

В работе выведены выражения для обычной и экспоненциальной производящих функций последовательности чисел покрытий. Полученные выражения могут использоваться для анализа различного рода неповторяющихся покрытий конечного множества. Интерпретируя переменные A_i как подмножества, можно более наглядно конструировать различные покрытия и множества покрытий с определенными ограничениями. Показано, как с помощью разнообразных преобразований выражений для производящих функций можно получать рекуррентные соотношения. Все выведенные в статье рекуррентные соотношения можно использовать для вычисления чисел покрытий конечного множества с помощью меньшего количества операций и без больших промежуточных результатов, возникающих из-за быстро растущих значений C_n^k .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганопольский Р. М. Число неупорядоченных покрытий конечного множества подмножествами фиксированного размера // Прикладная дискретная математика. 2010. № 4(10). С. 5–17
2. Macula A. J. Covers of a finite set // Mathematics Magazine. V. 67. No. 2. P. 141–144.
3. Comtet L. Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1974.
4. Кнут Д., Грэхем Ф., Поташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 2006.
5. Ландо С. К. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2002.