

О ВЫДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДКЛОНОВ¹

Н. Г. Парватов

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

E-mail: parvatov@mail.tsu.ru

Рассматривается задача выделения максимальных (предполных) подклонов в произвольном клоне, важная в связи с проблемой полноты в нём. Вводятся и-описания и расширенные и-описания как средства задания подклона в клоне. Устанавливаются необходимые и достаточные условия максимальной подклона, заданного своим расширенным и-описанием. Рассматриваются примеры.

Ключевые слова: клон, подклон, предполный подклон, максимальный подклон, проблема полноты, критериальная система, описание подклона, и-описание подклона.

Введение

Пусть E — непустое конечное множество. Будем рассматривать множество P_E функций $f : E^n \rightarrow E$, где n — произвольное натуральное число. Множество функций из P_E , замкнутое операциями суперпозиции из [1, 2] и включающее множество S_E селекторных функций, тождественно равных некоторой переменной, называется *клоном*.

Пусть B — произвольный клон функций из P_E . Множество функций клона B будем рассматривать с *замыканием относительно S_E -суперпозиции* таким, что замыканием произвольного множества X функций из клона B относительно S_E -суперпозиции является наименьший по включению среди содержащих это множество клон $[X]_{US_E} = [X \cup S_E]$. Для него множество X называется *порождающим*.

Проблема полноты в клоне B состоит в описании всех его порождающих подмножеств. Она может быть решена указанием *критериальной системы* $\mathcal{S}$ собственных подклонов клона B (то есть подклонов, собственным образом в нём содержащихся), такой, что всякий собственный подклон клона B включён в некоторый из клонов системы $\mathcal{S}$.

В работе рассматривается задача выделения в клоне B максимальных собственных подклонов (далее называемых просто *максимальными в B*), очевидно содержащихся в любой критериальной системе клона B , а потому представляющих интерес в связи с проблемой полноты в нём.

Структура статьи следующая. В п. 1 рассматриваются соответствия Галуа из [3, 4] между множествами частичных или полностью определённых функций k -значной логики и множествами предикатов. На основе этого формулируется лемма о доопределении из [5] и в качестве средства задания подклонов вводятся и-описания. В п. 2 вводятся расширенные и-описания; устанавливается лемма о выделении и теорема о выделении, дающие условия максимальной подклона, заданного своим расширенным и-описанием. Использование доказанной теоремы иллюстрируется примером. В п. 3 формулируются достаточные условия максимальной подклона, рассматриваются примеры.

¹Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № П1010).

1. Соответствия Галуа и и-описания

Напомним для дальнейшего использования о классических соответствиях Галуа из [3, 4], определяемых для функций многозначной логики и для частичных таких функций отношением сохранения функцией предиката. Сформулируем лемму о доопределении из [5], которая даёт условия, когда частичная функция имеет доопределение в заданном клоне. На основе этого в качестве средства выделения подклонов введём в рассмотрение и-описания и расширенные и-описания.

Соответствие Галуа для полностью определённых функций. Будем обозначать через Π_E множество предикатов $p : E^m \rightarrow \{И, Л\}$ при всевозможных натуральных m . Говорят, что функция f из P_E , зависящая от n переменных, *сохраняет предикат* p из Π_E , зависящий от m переменных, если для любых наборов $X_1, \dots, X_n$, удовлетворяющих предикату p , ему удовлетворяет также набор $X_0 = f^{[m]}(X_1, \dots, X_n)$, полученный последовательным выписыванием значений функции f , вычисленных от строк матрицы $(X_1^T, \dots, X_n^T)$, где верхний индекс T означает транспонирование. Отношение сохранения функцией из множества P_E предиката из множества Π_E определяет соответствие Галуа [6] из [4] между упорядоченными включениями системами подмножеств этих множеств, важное при изучении клонов. При этом соответствии произвольному множеству X функций из P_E сопоставляется множество $\text{inv}_E(X)$ сохраняемых ими предикатов из Π_E , а произвольному множеству Y предикатов из Π_E сопоставляется множество $\text{pol}_E(Y)$ сохраняющих их функций из P_E . Галуа-замкнутыми классами функций в этом случае оказываются всевозможные *клоны* функций из P_E . Иными словами, замыкание Галуа в множестве P_E совпадает с замыканием относительно S_E -суперпозиции. Галуа-замкнутыми классами предикатов оказываются всевозможные множества предикатов из Π_E , замкнутые операциями подстановки переменных и включающие все диагонали (к числу которых относятся тождественно истинные или ложные предикаты, а также предикаты, выражаемые формулами вида $x_i = x_j \wedge \dots \wedge x_l = x_m$, где $\{i, j, \dots, l, m\} = \{1, \dots, n\}$ для некоторого натурального n). В дальнейшем такие множества предикатов будем называть *замкнутыми*. Отметим, что *замкнутый класс* предикатов из Π_E , *порождённый* множеством X , то есть наименьший по включению среди включающих это множество, совпадает с классом $\text{inv}_E(\text{pol}_E(X))$ и состоит из предикатов, выражаемых формулами первого порядка (здесь достаточно предварённых формул), в которых переменные принимают значения в множестве E , предикатные символы интерпретируются в множестве $X \cup \{И, Л, =\}$, функциональные символы отсутствуют, а из логических символов возможны только квантор существования и конъюнкция.

Соответствие Галуа для частичных функций. Наряду с функциями из P_E станем рассматривать функции $f : E^n \rightarrow E \cup \{*\}$, где n — произвольное натуральное число и $*$ — фиксированный элемент, не принадлежащий множеству E . Интерпретируя этот элемент как неопределённое значение, станем называть и считать такие функции *частичными*, а их множество обозначать через P_E^* . Говорят, что частичная функция f из P_E^* , зависящая от n переменных, *сохраняет предикат* p из Π_E , зависящий от m переменных, если для любых наборов $X_1, \dots, X_n$, удовлетворяющих предикату p , набор $X_0 = f^{[m]}(X_1, \dots, X_n)$, полученный последовательным выписыванием значений функции f , вычисленных от строк матрицы $(X_1^T, \dots, X_n^T)$, либо также удовлетворяет предикату p , либо содержит неопределённую компоненту, равную $*$.

Отношение сохранения функцией из множества P_E^* предиката из множества Π_E определяет соответствие Галуа из [3] между упорядоченными включениями систе-

мами подмножеств этих множеств. При этом соответствии произвольному множеству X функций из P_E^* сопоставляется множество $\text{inv}_E(X)$ сохраняемых ими предикатов из Π_E , а произвольному множеству Y предикатов из Π_E сопоставляется множество $\text{pol}_E^*(Y)$ сохраняющих их функций из P_E^* . Галуа-замкнутыми классами функций из P_E^* оказываются теперь всевозможные *строго частичные клоны* — замкнутые операциями суперпозиции классы частичных функций из P_E^* , включающие множество S_E всех селекторов и содержащие вместе с каждой своей функцией всякое её ограничение (получаемое заменой некоторых значений, принимаемых функцией, неопределённым значением $*$). Галуа-замкнутыми классами предикатов оказываются всевозможные множества предикатов из Π_E , замкнутые операциями подстановки переменных и включающие все диагонали. Такие классы предикатов в дальнейшем называются *и-замкнутыми классами*, или, короче, *и-классами* предикатов. Отметим, что *и-класс*, порождённый множеством X предикатов из Π_E , то есть наименьший по включению среди включающих это множество, совпадает с классом $\text{inv}_E(\text{pol}_E^*(X))$ и состоит из предикатов, выражаемых бескванторными формулами первого порядка, в которых переменные принимают значения в множестве E , предикатные символы интерпретируются в множестве $X \cup \{И, Л, =\}$, функциональные символы отсутствуют, а из логических символов возможна только конъюнкция.

Описания, и-описания и доопределения. Далее будут сформулированы условия из [5] существования доопределения в заданном клоне для произвольной частичной функции и с их помощью будут введены новые методы задания подклонов — посредством и-описаний.

Для произвольных клонов B и C функций из P_E , таких, что $B \subseteq C$, множество Y предикатов из Π_E (на самом деле из $\text{inv}_E(B)$, как выяснится позднее) назовём *описанием* клона B в клоне C , если выполняются равенства

$$B = C \cap \text{pol}_E(Y) \quad \text{и} \quad \text{inv}_E(B) = \text{inv}_E \text{pol}_E(\text{inv}_E(C) \cup Y),$$

равносильные в силу рассмотренного выше соответствия Галуа из [4]. Первое из этих равенств указывает на то, что клон B состоит из функций клона C , сохраняющих все предикаты из множества Y ; второе говорит о том, что замкнутый класс $\text{inv}_E(B)$ инвариантных для B предикатов порождается (с помощью операций подстановки переменных, конъюнкции и проектирования) предикатами из множества $\text{inv}_E(C) \cup Y$ (отсюда и включение $Y \subseteq \text{inv}_E(B)$).

По аналогии с этим для произвольных строго частичных клонов B' и C' функций из P_E^* , таких, что $B' \subseteq C'$, множество Y предикатов из Π_E (точнее, из $\text{inv}_E(B')$) назовём *и-описанием* частичного клона B' в частичном клоне C' , если выполняются равенства

$$B' = C' \cap \text{pol}_E^*(Y) \quad \text{и} \quad \text{inv}_E(B') = \text{inv}_E \text{pol}_E^*(\text{inv}_E(C') \cup Y), \quad (1)$$

равносильные в силу рассмотренного выше соответствия Галуа из [3]. Первое из этих равенств указывает на то, что частичный клон B' состоит из функций частичного клона C' , сохраняющих все предикаты из множества Y ; второе говорит о том, что и-замкнутый класс $\text{inv}_E(B')$ инвариантных для строго частичного клона B' предикатов порождается (с помощью операций подстановки переменных и конъюнкции, без операции проектирования) предикатами из множества $\text{inv}_E(C') \cup Y$.

Далее. Для произвольного клона D обозначим через D^* частичный клон, состоящий из всех частичных функций, имеющих доопределение в клоне D . При этом под *доопределением* частичной функции f из P_E^* , зависящей от n переменных, как обычно,

понимаем всякую зависящую от n переменных частичную функцию g из P_E^* (в частности, из P_E), такую, что для любого набора a из множества E^n значения $f(a)$ и $g(a)$ совпадают или значение $f(a)$ не определено (равно $*$).

Сделанное выше определение и-описания имеет смысл и для частичных клонов $B' = B^*$ и $C' = C^*$, где по-прежнему B и C — клоны функций из P_E и $B \subseteq C$. В этой ситуации множество Y будем называть *и-описанием* клона B в клоне C . Заметим, что в этом случае $\text{inv}_E(B) = \text{inv}_E(B^*)$ и $\text{inv}_E(C) = \text{inv}_E(C^*)$, вследствие чего равенствам в (1) равносильно ещё одно:

$$\text{inv}_E(B) = \text{inv}_E \text{pol}_E^*(\text{inv}_E(C) \cup Y), \quad (2)$$

означающее, что и-замкнутый класс $\text{inv}_E(B)$ инвариантных для клона B предикатов порождается (с помощью операций конъюнкции и подстановки переменных) предикатами из множества $\text{inv}_E(C) \cup Y$. Таким образом, получаем следующую лемму из [5].

Лемма 1. Для любых клонов B и C , таких, что $B \subseteq C$, и любого множества Y предикатов из $\text{inv}_E(B)$ равносильны условия

$$B^* = C^* \cap \text{pol}_E^*(Y) \quad \text{и} \quad \text{inv}_E(B) = \text{inv}_E \text{pol}_E^*(\text{inv}_E(C) \cup Y).$$

В частности, для любого клона B и любого множества Y предикатов из $\text{inv}_E(B)$ равносильны условия

$$B^* = \text{pol}_E^*(Y) \quad \text{и} \quad \text{inv}_E(B) = \text{inv}_E \text{pol}_E^*(Y).$$

Иными словами, второе утверждение леммы говорит о том, что для любого клона B и любого множества Y предикатов из $\text{inv}_E(B)$ равносильны следующие условия:

- 1) произвольная частичная функция из P_E^* имеет доопределение в клоне B , если она сохраняет все предикаты из множества Y ;
- 2) множество Y порождает и-класс $\text{inv}_E(B)$.

Первое утверждение леммы допускает аналогичную переформулировку.

Таким образом, лемма 1 даёт условия, при которых множество предикатов порождает инвариантный и-класс, и одновременно условия, при которых частичная функция имеет доопределение в клоне. Из-за этого будем называть её *леммой о доопределении*.

Лемма 1 о доопределении является удобным инструментом изучения инвариантных предикатов.

2. Теорема о выделении

Установим теорему о выделении, дающую необходимые и достаточные условия максимальности подклона, заданного в клоне B своим и-описанием. Эта теорема позволяет распознавать максимальность подклонов и может использоваться для выделения максимальных подклонов. Рассмотрим примеры её использования, иллюстрирующие одновременно и применение леммы о доопределении.

Расширенные и-описания и задача выделения

Сформулируем задачу более точно. Для этого понадобятся некоторые определения.

Будем говорить, что предикат p , зависящий от $m - 1$ переменной, получен из предиката q , зависящего от m переменных, *отождествлением двух переменных*, если эти предикаты для каких-то различных чисел i и j из множества $\{1, \dots, m\}$ связаны соотношением

$$p(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m) \equiv q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_m),$$

где крышечкой сверху помечена отсутствующая переменная. Будем говорить, что предикат p , зависящий от $m - t$ переменных, где $1 \leq t \leq m - 1$, получен из предиката q *отождествлением переменных*, если в некоторой последовательности предикатов $p_1, \dots, p_t$, такой, что $p_1 = q$ и $p_t = p$, каждый предикат, начиная со второго, получен из предыдущего отождествлением каких-то двух переменных.

Переменная x_i называется *фиктивной* переменной предиката $p(x_1, \dots, x_m)$, если выполняется соотношение

$$\forall x_i p(x_1, \dots, x_m) \equiv \exists x_i p(x_1, \dots, x_m).$$

Пусть предикаты p и q связаны соотношением

$$p(x_1, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_t}, \dots, x_m) \equiv \exists x_{i_1} \dots \exists x_{i_t} q(x_1, \dots, x_m),$$

где $1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m$ и крышечкой сверху помечены отсутствующие переменные. Будем говорить, что предикат p получен из предиката q *проектированием* и предикат p является *проекцией* предиката q , если $t \geq 1$. Будем говорить, что предикат p получен из предиката q *удалением фиктивных переменных*, если $t \geq 0$ и переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$ составляют множество всех фиктивных переменных предиката $q(x_1, \dots, x_m)$.

Рассмотрим произвольный подклон K клона B . Пусть множество Y предикатов из $\text{inv}_E(K)$ является и-описанием подклона K в клоне B , то есть выполняются равенства $\text{inv}_E(K) = \text{inv}_E \text{rol}_E^*(Y \cup \text{inv}_E(B))$ и $K^* = B^* \cap \text{rol}_E^*(Y)$. И-описание Y подклона K в клоне B назовём *расширенным*, если оно состоит из предикатов без фиктивных переменных и вместе с любым своим предикатом p содержит всякий неинвариантный для клона B (то есть не принадлежащий и-классу $\text{inv}_E(B)$) предикат, который можно получить удалением фиктивных переменных из предиката, возникающего в результате отождествления переменных у предиката p . Понятно, что всякий подклон K клона B обладает расширенным и-описанием, которое обычно несложно получается по произвольному и-описанию.

Будем интересоваться условиями, при которых подклон K клона B , заданный своим расширенным и-описанием Y , является максимальным.

Предельные предикаты. Понадобятся некоторые определения и замечания. В них p и q — предикаты из Π_E , зависящие от m переменных.

1. Неинвариантный для клона B предикат p из множества $\Pi_E \setminus \text{inv}_E(B)$ будем называть *B -предельным по проектированию*, если всякая проекция предиката p инвариантна для клона B , то есть принадлежит множеству $\text{inv}_E(B)$.

2. Неинвариантный для клона B предикат p из множества $\Pi_E \setminus \text{inv}_E(B)$ будем называть *B -предельным по отождествлению*, если предикаты, полученные из предиката p отождествлением переменных, инвариантны для B .

3. Отождествляя предикат с его областью истинности (подобное отождествление предикатов и отношений принято в дискретной математике), станем использовать для предикатов теоретико-множественные отношения и операции. В частности, для m -местных предикатов p и q *включение* $p \subseteq q$ означает, что выполняется соотношение

$$p(x_1, \dots, x_m) \Rightarrow q(x_1, \dots, x_m),$$

а *пересечение* $p \cap q$ и *разность* $p \setminus q$ предикатов p и q определяются соотношениями

$$(p \cap q)(x_1, \dots, x_m) \equiv p(x_1, \dots, x_m) \wedge q(x_1, \dots, x_m),$$

$$(p \setminus q)(x_1, \dots, x_m) \equiv p(x_1, \dots, x_m) \wedge \neg q(x_1, \dots, x_m).$$

4. Для любого натурального $n \geq 1$ и функции $\alpha : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ определим n -местный предикат $p_\alpha^{(n)}$ как

$$p_\alpha^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv p(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(m)}).$$

Будем писать p_α вместо $p_\alpha^{(n)}$, если $n = m$. Если при $n = m$ функция α является подстановкой на множестве чисел $1, \dots, m$, то будем говорить, что предикаты p_α и $p \cap p_\alpha$ получены из предиката p перестановкой переменных и симметризацией соответственно, а предикаты p и p_α будем называть перестановочно эквивалентными.

5. Неинвариантный для клона B предикат p из множества $\Pi_E \setminus \text{inv}_E(B)$ станем называть B -предельным по симметризации, если любой предикат, полученный из предиката p симметризацией, совпадает с p либо инвариантен для клона B .

6. Через Bp станем обозначать m -местный предикат, которому удовлетворяют исключительно всевозможные наборы $f^{[m]}(X_1, \dots, X_n)$, полученные последовательным вычислением значений функции f от строк матрицы $(X_1^T, \dots, X_n^T)$, где n — произвольное натуральное число, функция f от n переменных выбирается произвольно в клоне B , и наборы $X_1, \dots, X_n$, удовлетворяющие предикату p , также выбираются произвольно. Имеет место следующая

Лемма 2. Для любого клона B функций из P_E и любых предикатов p и q из Π_E , зависящих от m переменных, следующие условия равносильны:

- 1) имеют место включения $q \subseteq p$ и $(Bq) \setminus q \subseteq (Bp) \setminus p$;
- 2) имеет место равенство $q = (Bq) \cap p$;
- 3) имеет место равенство $q = p' \cap p$ для некоторого предиката p' из $\text{inv}_E(B)$, зависящего от m переменных.

Если для предикатов p и q выполняются условия 1–3, то выполняется и включение $B \cap \text{pol}_E(p) \subseteq B \cap \text{pol}_E(q)$.

Доказательство. Если выполняется первое условие, то включение $q \subseteq (Bq) \cap p$ очевидно, а обратное включение проверяется непосредственно; таким образом, выполняется второе условие, из которого третье следует очевидным образом. Пусть выполняется третье условие. Отметим в этом случае «включения»

$$q \subseteq Bq \subseteq Bp' = p',$$

из которых первое имеет место, поскольку клон B содержит селекторы, второе выполняется в силу включения $q \subseteq p'$, имеющего место из-за третьего условия, а равенство выполняется из-за инвариантности предиката p' для клона B . В силу этого вслед за третьим условием выполняется и второе. Тогда в первом условии первое включение очевидно, а второе проверяется непосредственно. Тем самым имеет место первое условие. Первое утверждение леммы доказано.

Для доказательства второго утверждения предположим, что функция f из клона B , зависящая от n переменных, не сохраняет предикат q , удовлетворяющий вместе с предикатом p условиям 1–3. Тогда найдутся наборы $X_1, \dots, X_n$, удовлетворяющие предикату q , в отличие от набора $X_0 = f^{[m]}(X_1, \dots, X_n)$. Тогда в силу включений из первого условия наборы $X_1, \dots, X_n$ удовлетворяют также и предикату p , в отличие от набора X_0 . Таким образом, функция f не сохраняет предикат p . Лемма доказана. ■

Предикат q будем называть B -сужением предиката p , если для этих предикатов выполняются равносильные условия 1–3 из леммы 2. Неинвариантный для клона B

предикат p из множества $\Pi_E \setminus \text{inv}_E(B)$ станем называть B -предельным по сужению, если любой предикат, полученный из предиката q B -сужением, совпадает с p или инвариантен для клона B .

7. Отметим, что для любого предиката p' , полученного из предиката p проектированием, отождествлением переменных, симметризацией или B -сужением, выполняется включение $B \cap \text{pol}_E(p) \subseteq B \cap \text{pol}_E(p')$.

8. В соответствии с определениями, если предикат p является B -предельным по проектированию, отождествлению, симметризации или сужению, то клон $K = B \cap \text{pol}_E(p)$ обладает свойством $K \subset B$.

9. Всякий клон $K' \subset B$ можно расширить до клона $K = B \cap \text{pol}_E(p)$, где $K' \subseteq K \subset B$ и предикат p обладает любым наперёд заданным свойством B -предельности по проектированию, отождествлению, симметризации или сужению. (Для доказательства необходимо выбрать произвольно предикат p из множества $\text{inv}_E(K) \setminus \text{inv}_E(B)$, непустого в силу строгого включения $K' \subset B$, а затем, сохраняя за предикатом p его обозначение, выполнять над ним соответствующие операции проектирования, отождествления переменных, симметризации или сужения, пока они не выведут предикат p из множества $\text{inv}_E(K) \setminus \text{inv}_E(B)$.)

10. Отсюда критериальную систему клона B , возможно избыточную, составляют клоны $B \cap \text{pol}_E(p)$, где предикат p обладает всеми указанными выше свойствами B -предельности (достаточно любым зафиксированным набором этих свойств). Это даёт способ отыскания критериальной системы, требующий нахождения предикатов с фиксированным набором свойств B -предельности. Можно показать, что, найдя все предикаты, B -предельные по отождествлению, получаем критериальную систему клона B , причём конечную для конечно порождаемого клона B . Если вместо этого взять предикаты, B -предельные по проектированию, то конечность критериальной системы для конечно порождаемого клона B не гарантирована известными автору теоремами.

11. В силу сказанного, всякий максимальный подклон клона B имеет вид $B \cap \text{pol}_E(p)$, где предикат p обладает свойствами B -предельности по проектированию, отождествлению, симметризации и сужению.

Теорема о выделении. Сделанные выше замечания позволяют теперь вернуться к задаче распознавания свойства максимальности подклона K , заданного в клоне B своим расширенным и-описанием Y . Основной является следующая

Лемма 3. Пусть K и B — клоны функций из P_E , такие, что $K \subset B$, а множество Y предикатов из $\text{inv}_E(K)$ является расширенным и-описанием клона K в клоне B . Пусть также для B -предельного по проектированию и отождествлению предиката q из множества $\Pi_E \setminus \text{inv}_E(B)$, зависящего от m переменных, выполняется включение $K \subseteq B \cap \text{pol}_E(q)$. Тогда предикат q можно представить в виде

$$q = (Bq) \cap q_1 \cap \dots \cap q_l$$

для некоторого целого положительного числа l , где каждый из предикатов $q_1, \dots, q_l$ зависит от m переменных и перестановочно эквивалентен некоторому предикату из Y .

Доказательство. Нетривиальная часть леммы состоит в том, что каждый из предикатов $q_1, \dots, q_l$ зависит от всех переменных предиката q . Для доказательства этого достаточно убедиться, что для любого набора X_0 , удовлетворяющего предикату $Bq \setminus q$, найдётся предикат q^{X_0} , перестановочно эквивалентный некоторому предикату из множества Y , такой, что $q \subseteq q^{X_0}$ и набор X_0 не удовлетворяет предикату q^{X_0} .

Действительно, тогда в качестве предикатов $q_1, \dots, q_l$ можно выбрать всевозможные предикаты q^{X_0} .

Итак, пусть набор X_0 удовлетворяет предикату $Bq \setminus q$, а наборы $X_1, \dots, X_n$ составляют область истинности предиката q . Заметим, что в этом случае в силу B -предельности предиката q по отождествлению матрица $X = (X_1^T, \dots, X_n^T)$ не содержит повторяющихся строк. Рассмотрим частичную n -местную функцию f , определённую соотношением

$$f^{[m]}(X_1, \dots, X_n) = X_0$$

и принимающую неопределённое значение $*$ в остальных случаях — на наборах, не являющихся строками матрицы X . Функция f определена корректно и имеет доопределение в клоне B в силу выбора набора X_0 , удовлетворяющего предикату Bq . Она не сохраняет предикат q также в силу выбора набора X_0 , не удовлетворяющего q , в отличие от наборов $X_1, \dots, X_n$. С использованием включения $K \subseteq B \cap \text{pol}_E(q)$ получаем соотношение

$$B^* \cap \text{pol}_E^*(Y) = K^* \subseteq (B \cap \text{pol}_E(q))^* \subseteq B^* \cap \text{pol}_E^*(q),$$

в силу которых частичная функция f вслед за предикатом q не сохраняет некоторый предикат из множества Y . Выберем такой не сохраняемый функцией f предикат q' в множестве Y с минимальным возможным числом m' переменных. Так как функция f не сохраняет предикат q' , ему удовлетворяют некоторые наборы $Z_1, \dots, Z_n$, в отличие от набора $Z_0 = f^{[m]}(Z_1, \dots, Z_n)$, не удовлетворяющего ему. Поскольку набор Z_0 не содержит неопределённой компоненты, равной $*$, строки матрицы $Z = (Z_1^T, \dots, Z_n^T)$ являются одновременно строками матрицы X . Более того, каждая строка матрицы X присутствует в матрице Z , иначе предикат q можно спроектировать по переменным, соответствующим тем строкам матрицы X , которые отсутствуют в матрице Z , и снова получить предикат, не сохраняемый функцией f и, следовательно, неинвариантный для клона B , что противоречит B -предельности предиката q по проектированию. Заметим также, что матрица Z не содержит повторяющихся строк (как и матрица X), так как в противном случае можно отождествить пару переменных у предиката q' и получить предикат с меньшим числом переменных, не сохраняемый функцией f и принадлежащий (вслед за предикатом q') и-описанию Y в силу расширенности последнего; это противоречит минимальности числа m' . Таким образом, $m' = m$ и для некоторой подстановки α на множестве чисел $1, \dots, m$ i -я строка матрицы Z является $\alpha(i)$ -й строкой матрицы X . Тогда $(Z_j)_\alpha = X_j$ для любого j , $0 \leq j \leq l$ (здесь для набора $z = (z_1, \dots, z_m)$ через z_α обозначается набор $(z_{\alpha(1)}, \dots, z_{\alpha(m)})$). Таким образом, для предиката q'_α , перестановочно эквивалентного предикату q' из множества Y , выполняется условие $q \subseteq q'_\alpha$, и набор $(Z_0)_\alpha = X_0$ не удовлетворяет предикату q'_α . Так что в качестве предиката q^{X_0} можно взять q'_α . Тем самым лемма доказана. ■

Следствием леммы 3 является следующая

Теорема 1. Пусть K и B — клоны функций из P_E , такие, что $K \subset B$, а множество Y предикатов из $\text{inv}_E(K)$ является расширенным и-описанием клона K в клоне B . Тогда равносильны следующие условия:

- 1) клон K не является максимальным подклоном клона B ;
- 2) включения $K \subset B \cap \text{pol}_E(q) \subset B$ выполняются для некоторого предиката

$$q = q_0 \cap q_1 \cap \dots \cap q_l,$$

где предикат q_0 инвариантен для клона B , а каждый из предикатов $q_0, \dots, q_l$ перестановочно эквивалентен некоторому предикату из Y .

Доказательство. Подклон K , не являющийся максимальным в клоне B , можно расширить до клона $B \cap \text{pol}_E(q)$, где q — некоторый B -предельный по проектированию и отождествлению предикат. Лемма 3 устанавливает для предиката q возможность представления и включений, указанных во втором пункте доказываемой теоремы. Таким образом из первого условия следует второе. Обратная импликация очевидна. Следствие доказано. ■

Лемма 3 и теорема 1 дают условия, при которых подклон, заданный своим расширенным и-описанием, является максимальным. Такие условия позволяют судить о максимальной подклона, исходя из свойств его инвариантных предикатов, и в некоторых случаях позволяет выделять максимальные подклоны. В связи с этим будем называть лемму 3 и теорему 1 *леммой о выделении* и *теоремой о выделении* соответственно. Проиллюстрируем возможности использования этих утверждений, а заодно и леммы о доопределении, следующим примером.

Пример 1. Предикаты

$$s_m(x_1, \dots, x_{2m}) \equiv x_1 + \dots + x_{2m} = 0 \pmod{2}, \quad m \geq 1,$$

инвариантны для клона L_2 линейных булевых функций. Такие предикаты составляют его и-описание в клоне P_2 всех булевых функций. Это следует в силу леммы 1 о доопределении из того, что всякая не полностью определённая булева функция f от n переменных, сохраняющая эти предикаты, допускает дальнейшее доопределение

$$f(x) = f(x_1) + \dots + f(x_{2m-1}) \pmod{2}$$

на любом наборе x из множества $\{0, 1\}^n$, являющемся для некоторого $m \geq 1$ покомпонентной суммой $x = x_1 + \dots + x_{2m-1} \pmod{2}$ каких-то $2m - 1$ не обязательно различных наборов $x_1, \dots, x_{2m-1}$ из области определения функции f . Функция f допускает дальнейшее доопределение произвольным значением из множества $\{0, 1\}$ на любом другом наборе x , не являющемся суммой наборов, выбранных из области определения в нечётном количестве. Непосредственно проверяется, что в результате подобного доопределения получается функция, также сохраняющая предикаты s_m при $m \geq 1$, которые, следовательно, составляют и-описание клона L_2 , причём расширенное, как несложно понять.

На основании теоремы 1 о выделении теперь легко проверить максимальность подклона L_2 в клоне P_2 булевых функций. Для этого нужно рассмотреть предикат $q = q_0 \cap s_m$, где q_0 — инвариантный для P_2 предикат, то есть диагональ. В результате такого пересечения после удаления фиктивных переменных получается предикат $s_{m'}$, где $1 \leq m' \leq m$, в силу чего строгие включения $K \subset B \cap \text{pol}_E(q) \subset B$ не могут выполняться одновременно. Отсюда, на основании теоремы 1, клон L_2 — максимальный в P_2 .

B -простые предикаты. Отметим некоторые частные случаи, когда на основании леммы о выделении удаётся легко судить о максимальной подклонов.

B -предельный по проектированию, отождествлению, симметризации и сужению предикат назовём B -простым, если он один составляет и-описание некоторого подклона в клоне B , очевидно, расширенное и-описание. Иначе, B -простой предикат можно определить как B -предельный по симметризации и сужению, составляющий расширенное и-описание некоторого подклона в клоне B (в этом случае B -предельность по отождествлению следует из расширенности и-описания, а B -предельность по проектированию следует из леммы 3).

Лемма 4. Если предикат p — B -простой, а предикат q — B -предельный по проектированию и отождествлению, то строгое включение $B \cap \text{pol}_E(p) \subset B \cap \text{pol}_E(q)$ невозможно, а равенство $B \cap \text{pol}_E(p) = B \cap \text{pol}_E(q)$ выполняется тогда и только тогда, когда предикаты p и q перестановочно эквивалентны.

Доказательство. Пусть выполняется включение $B \cap \text{pol}_E(p) \subseteq B \cap \text{pol}_E(q)$. Тогда по лемме 3 предикат q можно представить в виде $q = q_0 \cap \dots \cap q_l$, где предикат q_0 принадлежит множеству $\text{inv}_E(B)$, а предикаты $q_1, \dots, q_l$ перестановочно эквивалентны предикату p и тогда попарно перестановочно эквивалентны между собой. Пересечение любых двух предикатов q_i и q_j , $1 \leq i < j \leq l$, является тогда симметризацией каждого из них, а в силу их B -предельности по симметризации (это свойство переносится на них от перестановочно эквивалентного им предиката p) либо совпадает с некоторым из них (и тогда с каждым), либо инвариантно для клона B (что невозможно). В силу этого можно ограничиться рассмотрением случая $l = 1$. Тогда предикат $q = q_0 \cap q_1$ является B -сужением предиката q_1 , B -предельного по сужению вслед за перестановочно эквивалентным ему предикатом p . Отсюда, с учётом неинвариантности предиката q для клона B , предикат q совпадает с предикатом q_1 . Тогда предикаты q и p перестановочно эквивалентны, и выполняется равенство $B \cap \text{pol}_E(p) = B \cap \text{pol}_E(q)$. ■

Непосредственным следствием леммы 4 является

Теорема 2. Пусть предикат p является B -простым. Тогда подклон $B \cap \text{pol}_E(p)$ является максимальным в B . В этом случае также для любого B -предельного предиката q равенство $B \cap \text{pol}_E(p) = B \cap \text{pol}_E(q)$ означает перестановочную эквивалентность предикатов p и q и, в частности, B -простоту предиката q .

Часть клонов, максимальных в P_E в силу теорем Э. Поста и Розенберга, описываются P_E -простыми предикатами. Это видно из рассматриваемых ниже примеров.

Пример 2. Предикат $\neq$ составляет i -описание клона самодвойственных булевых функций (и тогда, очевидно, составляет расширенное i -описание), так как частичную булеву функцию, сохраняющую этот предикат, можно доопределить до самодвойственной булевой функции противоположными значениями на противоположных наборах. Непосредственно проверяются различные свойства P_2 -предельности этого предиката (где P_2 — клон всех булевых функций). Таким образом, предикат $\neq$ является P_2 -простым.

Пример 3. Пусть $\preceq$ — решёточное упорядочение множества E .

Всякую частичную функцию f , сохраняющую предикат $\preceq$, можно доопределить до функции F из клона $\text{pol}_E(\preceq)$, положив

$$F(x) = \vee f(x'),$$

где точная верхняя грань $\vee$ вычисляется в решётке E по всем наборам x' из области определения функции f , таким, что $x' \preceq x$. В силу леммы о доопределении предикат $\preceq$ один составляет i -описание клона $\text{pol}_E(\preceq)$ функций из P_E , монотонных относительно решёточного упорядочения $\preceq$.

Несложно проверить свойства P_E -предельности предиката $\preceq$. Действительно, как видно, P_E -сужение предиката $\preceq$ (то есть его пересечение с диагональю) либо совпадает с ним, либо является диагональю. А в результате отождествления переменных, проектирования и симметризации с нетождественной подстановкой из предиката $\preceq$ получаются только диагонали.

В силу сказанного, предикат $\preceq$ является P_E -простым.

Пример 4. Пусть p — центральный вполне рефлексивный симметричный предикат из Π_E , зависящий от $m \geq 1$ переменных и отличающийся от полной диагонали E^m . Напомним, что *центральность* предиката p означает существование для него *центрального элемента* c в множестве E , такого, что предикату p удовлетворяет всякий набор из E^m , имеющий компоненту, равную c . *Полная рефлексивность* означает, что предикату удовлетворяет всякий набор из E^m , имеющий равные компоненты. *Симметричность* означает, что предикат совпадает с любым перестановочно эквивалентным ему предикатом.

Непосредственно проверяется, что частичную функцию из P_E^* , сохраняющую предикат p , можно доопределить до функции из клона $\text{rol}_E(p)$ значением c . В силу леммы о доопределении *предикат p составляет и-описание* указанного клона. Это и-описание расширенное, поскольку в результате отождествления любых двух переменных из предиката p получается полная диагональ, инвариантная для P_E .

Далее, *предикат p является P_E -предельным по сужению и симметризации*. Действительно, P_E -сужение (то есть пересечение с диагональю) предиката p либо совпадает с ним (в случае полной диагонали), либо является диагональю (в остальных случаях — в силу полной рефлексивности предиката p) и тогда инвариантно для P_E . При симметризации предикат не изменяется (в силу симметричности).

Таким образом, *центральный, вполне рефлексивный и симметричный предикат p из Π_E является P_E -простым*.

Пример 5. Тривиальный пример P_E -простого предиката даёт для любого элемента c из множества E одноместный предикат $x_1 = c$, очевидно, центральный, симметричный и вполне рефлексивный.

Пример 6. Пусть теперь $\leq$ — полурешёточное упорядочение множества E . Точнее, множество E , упорядоченное отношением $\leq$, является верхней полурешёткой, но не решёткой [6]. Иными словами, в множестве E любые два элемента a и b обладают точной верхней гранью $a + b$, а точная нижняя грань $a \cdot b$ существует не для любых элементов a и b . Функции из P_E , сохраняющие упорядочение $\leq$, составляют клон $M_E = \text{rol}_E(\leq)$ *монотонных функций на полурешётке E* . Функция f из P_E , имеющая монотонную миноранту g , принадлежащую клону M_L , такую, что $g(x) \leq f(x)$ для любого набора x из множества E^n , где n — число переменных функций f и g , называется *квазимонотонной на полурешётке E* . Квазимонотонные и монотонные функции на полурешётке введены в [7] для описания асинхронных дискретных управляющих систем. Основные классы квазимонотонных функций изучались также в [8]. Проблема полноты в классе квазимонотонных функций рассматривалась в [9, 10].

В соответствии с тестом квазимонотонности из [7] квазимонотонные функции составляют клон Q_E сохранения предикатов

$$\varepsilon^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists x(x \leq x_1 \wedge \dots \wedge x \leq x_n)$$

и даже клон сохранения единственного такого предиката при $n = q(E)$, где $q(E)$ — максимальная мощность минимального по включению множества элементов из E без общей нижней грани.

В действительности, *предикаты $\varepsilon^{(n)}$, и даже единственный из них при $n = q(E)$, составляют (составляет) и-описание* клона Q_E . Это следует из леммы 1 о доопределении, так как частичную функцию из P_E^* , сохраняющую предикат $\varepsilon^{(q(L))}$, можно доопределить наибольшим значением полурешётки E до квазимонотонной функции из Q_E , сохраняющей его же. Вместе с тем *и-описание клона M_E монотонных функций*

составляют предикаты $\leq \varepsilon^{(q(E))}$, поскольку сохраняющую их частичную функцию f из P_E^* можно доопределить до монотонной функции F из M_E , положив

$$F(x) = \prod f(x'),$$

где произведение вычисляется в полурешётке E по всем наборам x' из области определения функции f , таким, что $x \leq x'$. Из сказанного следует также, что *предикат $\leq$ составляет и-описание клона M_E в клоне Q_E* . Это и-описание — расширенное, так как из предиката $\leq$ проектированием и отождествлением переменных получается только полная одноместная диагональ. Заметим, что предикат $\leq$ обладает свойствами Q_E -предельности по сужению и симметризации. В самом деле, в силу найденного выше и-описания клона Q_E Q_E -сужением предиката $\leq$ может быть только предикат

$$d(x_1, x_2) \wedge \varepsilon^{(2)}(y_1, y_2) \wedge x_1 \leq x_2,$$

где d — диагональ и $\{y_1, y_2\} \subseteq \{x_1, x_2\}$. Всякий такой предикат либо совпадает с предикатом $\leq$, либо является диагональю. В результате симметризации предиката $\leq$ получается либо он же, либо предикат равенства. В силу сказанного, *предикат $\leq$ является Q_E -простым, а описываемый им клон M_E является максимальным в Q_E* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. № 2. С. 5–24.
2. Мальцев А. И. Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.
3. Geiger D. Closed systems of functions and predicates // Pacific journal of mathematics. 1968. V. 27. P. 95–100.
4. Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
5. Ромов Б. А. О продолжении не всюду определённых функций // Кибернетика. 1987. № 3. С. 27–34.
6. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. СПб.: Лань, 2005.
7. Агibalов Г. П. Дискретные автоматы на полурешётках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993.
8. Парватов Н. Г. Об инвариантах некоторых классов квазимонотонных функций на полурешётке // Прикладная дискретная математика. 2009. № 4. С. 21–28.
9. Парватов Н. Г. Функциональная полнота в замкнутых классах квазимонотонных и монотонных трёхзначных функций на полурешётке // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10. № 1. С. 61–78.
10. Парватов Н. Г. Теорема о функциональной полноте в классе квазимонотонных функций на конечной полурешётке // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13. № 3. С. 62–82.