

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФАМИ С КОМПОНЕНТАМИ СВЯЗНОСТИ ОГРАНИЧЕННОГО РАЗМЕРА

В. П. Ильев, А. А. Навроцкая

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, г. Омск, Россия

E-mail: iljev@mail.ru, nawrocki@ya.ru

Рассматриваются новые варианты задачи аппроксимации графа, в которых имеются ограничения на размер компонент связности аппроксимирующих графов. Доказано, что если в качестве последних допускаются графы с компонентами связности мощностей $1, 2, \dots, p \geq 3$, то задача аппроксимации графа является NP -трудной, а в случае $p = 2$ она полиномиально разрешима.

Ключевые слова: *аппроксимация графа, полиномиально разрешимая задача, NP -трудная задача.*

Введение

Задачи аппроксимации графов возникают при анализе систем взаимосвязанных объектов, в частности в задачах классификации. При этом минимизируется число связей между классами и число недостающих связей внутри классов. В литературе рассматривались задачи, в которых количество классов не ограничено, ограничено сверху или равно наперед заданному числу. Постановки и различные интерпретации этих задач можно найти в [1–5]. В настоящей работе рассматриваются варианты задачи, в которых имеются ограничения на мощности классов.

Граф без петель и кратных ребер называется M -графом, если каждая его компонента связности есть полный граф. Обозначим через $\mathcal{M}(V)$ множество всех M -графов на множестве вершин V , а через $\mathcal{M}^p(V)$ — множество всех M -графов на множестве V , в которых мощность каждой компоненты связности равна p , $2 \leq p \leq |V|$. Будем говорить, что M -граф принадлежит множеству $\mathcal{M}^{\leq p}(V)$, если мощность каждой его компоненты не превышает целого числа p , $2 \leq p \leq |V|$.

Пусть $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ — помеченные графы, тогда *расстояние* между ними определяется следующим образом: $\rho(G_1, G_2) = |E_1 \Delta E_2|$, где $E_1 \Delta E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$, т. е. $\rho(G_1, G_2)$ равно числу несовпадающих ребер в графах G_1, G_2 .

ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ ГРАФА (A). Дан произвольный n -вершинный граф $G = (V, E)$. Найти такой M -граф $M^* \in \mathcal{M}(V)$, что $\rho(G, M^*) = \min_{M \in \mathcal{M}(V)} \rho(G, M)$.

ЗАДАЧА $A^{\leq p}$. Дан n -вершинный граф $G = (V, E)$ и целое число p , $2 \leq p \leq n$. Найти такой граф $M^* \in \mathcal{M}^{\leq p}(V)$, что $\rho(G, M^*) = \min_{M \in \mathcal{M}^{\leq p}(V)} \rho(G, M)$.

ЗАДАЧА A^p . Дан граф $G = (V, E)$, такой, что $|V| = pq$, где p, q — целые положительные числа. Найти такой граф $M^* \in \mathcal{M}^p(V)$, что $\rho(G, M^*) = \min_{M \in \mathcal{M}^p(V)} \rho(G, M)$.

В работе [6] показано, что задача **A** NP -трудна. Задачи $A^{\leq p}$ и A^p ранее не рассматривались. В настоящей работе доказано, что задачи $A^{\leq 2}$ и A^2 полиномиально разрешимы, а для любого фиксированного $p \geq 3$ задачи $A^{\leq p}$ и A^p являются NP -трудными.

1. Полиномиально разрешимые случаи

Лемма 1. Для любого графа $G = (V, E)$ существует такое оптимальное решение $M^* = (V, E^*)$ задачи $\mathbf{A}^{\leq p}$ при $2 \leq p \leq 3$, что $E^* \subseteq E$.

Доказательство. При $p = 2$ утверждение леммы верно для любого из оптимальных M -графов, т.е. для любого M -графа, являющегося оптимальным решением задачи $\mathbf{A}^{\leq 2}$. Действительно, допустим, что существует оптимальный M -граф $M' = (V, E') \in \mathcal{M}^{\leq 2}(V)$, для которого утверждение леммы неверно. Значит, в нем найдется компонента связности, состоящая из двух вершин u и v , таких, что $uv \notin E$. Тогда рассмотрим M -граф $M^* = (V, E' \setminus \{uv\})$. Получаем, что $\rho(G, M^*) = \rho(G, M') - 1$, что противоречит оптимальности M -графа M' .

Докажем утверждение для $p = 3$. Пусть $M' = (V, E')$ — оптимальное решение задачи $\mathbf{A}^{\leq 3}$, не удовлетворяющее утверждению леммы. Значит, $E' \setminus E \neq \emptyset$. Допустим, в M' существует компонента связности, содержащая более одного ребра из множества $E' \setminus E$, т.е. существуют такие вершины u, v, w , что $uv, vw \in E' \setminus E$. Рассмотрим M -граф $M = (V, E' \setminus \{uv, vw\})$, тогда $\rho(G, M) = \rho(G, M') - 2$, что противоречит оптимальности M -графа M' .

Аналогично доказывается, что в графе M' нет компонент связности, содержащих ребро из $E' \setminus E$ и состоящих из двух вершин.

Таким образом, в графе M' существует ровно $|E' \setminus E|$ компонент связности, в каждой из которых есть три вершины u, v, w , таких, что $uv, vw \in E$, $uw \in E' \setminus E$. Тогда рассмотрим граф $M^* = (V, E^*)$, в котором все такие компоненты разделены на две: смежные вершины u, v составляют отдельную компоненту связности, а вершина w — другую. Так как удалены все ребра множества $E' \setminus E$, то $E^* \subseteq E$. Очевидно, что $\rho(G, M^*) = \rho(G, M')$. Следовательно, граф M^* также является оптимальным и удовлетворяет условию леммы. ■

Теорема 1. Задача $\mathbf{A}^{\leq 2}$ полиномиально разрешима.

Доказательство. Докажем, что задача $\mathbf{A}^{\leq 2}$ эквивалентна задаче о наибольшем паросочетании. Пусть дан граф $G = (V, E)$. Из леммы 1 следует, что задача $\mathbf{A}^{\leq 2}$ сводится к отысканию M -графа $M^* = (V, E^*) \in \mathcal{M}^{\leq 2}(V)$, являющегося подграфом графа $G = (V, E)$, в котором множество ребер E^* имеет максимальную мощность. Так как $M^* \in \mathcal{M}^{\leq 2}(V)$, то никакие два ребра из $E^* \subseteq E$ не имеют общей вершины; другими словами, E^* — паросочетание графа G . Таким образом, найдя наибольшее паросочетание в графе G , мы получим оптимальное решение $M^* = (V, E^*)$ задачи $\mathbf{A}^{\leq 2}$ на графе G , и наоборот. Хорошо известно, что задача поиска наибольшего паросочетания в произвольном графе полиномиально разрешима [7]. ■

Следствие 1. Задача $\mathbf{A}^{\leq 3}$ на графах, не содержащих полных трехвершинных подграфов, полиномиально разрешима.

Доказательство. Пусть дан граф $G = (V, E)$, не содержащий полных трехвершинных подграфов. Из леммы 1 следует, что существует такое оптимальное решение $M^* = (V, E^*)$ задачи $\mathbf{A}^{\leq 3}$ на графе G , что M^* является подграфом графа G , а так как G не содержит треугольников, то $M^* \in \mathcal{M}^{\leq 2}(V)$. Значит, задача $\mathbf{A}^{\leq 3}$ на графах, не содержащих полных трехвершинных подграфов, эквивалентна задаче $\mathbf{A}^{\leq 2}$. ■

Теорема 2. Задача $\mathbf{A}^2$ полиномиально разрешима.

Доказательство. Фиксируем такой граф $G = (V, E)$, что $|V| = 2q$. Рассмотрим M -граф $M^* = (V, E^*)$ — произвольное допустимое решение задачи $\mathbf{A}^2$. Из того, что

$M^* \in \mathcal{M}^2(V)$, следует $|E^*| = q$. Вычислим расстояние между графами G и M^* :

$$\rho(G, M^*) = |E \triangle E^*| = |E| + |E^*| - 2|E \cap E^*| = |E| + q - 2|E \cap E^*|.$$

Поскольку $|E|$ и q фиксированы, то $\rho(G, M^*)$ тем меньше, чем $|E \cap E^*|$ больше. Очевидно, что $E \cap E^*$ — паросочетание в графе G . Таким образом, задача $\mathbf{A}^2$ сводится к нахождению наибольшего паросочетания в графе G . ■

2. NP -трудные задачи

Докажем, что задачи $\mathbf{A}^{\leq p}$ и $\mathbf{A}^p$ являются NP -трудными для любого фиксированного $p \geq 3$.

Лемма 2. Пусть $M = (V, E) \in \mathcal{M}^{\leq p}(V)$, где $|V| = pq$. Тогда

$$|E| \leq \frac{p(p-1)}{2}q,$$

причем равенство достигается только для графов из класса $\mathcal{M}^p(V)$.

Доказательство. Пусть M -граф $M \in \mathcal{M}^{\leq p}(V)$ имеет наибольшее количество ребер среди всех графов из $\mathcal{M}^{\leq p}(V)$. Докажем, что число его ребер равно $\frac{p(p-1)}{2}q$. Предположим, что граф M содержит компоненту связности мощности меньше p . В таком случае в графе M должна содержаться еще хотя бы одна компонента мощности меньше p . Обозначим эти компоненты связности M_1 и M_2 , пусть их мощности соответственно равны p_1 и p_2 , причем $p_1 \leq p_2 < p$. В графе M переместим вершину v из компоненты M_1 в компоненту M_2 , т. е. удалим все ребра, инцидентные вершине v , и добавим все ребра между вершиной v и всеми вершинами компоненты M_2 ; полученный граф обозначим через $M' = (V, E') \in \mathcal{M}^{\leq p}(V)$. Так как изменения производились только в компонентах связности M_1 и M_2 , то

$$|E'| - |E| = p_2 - (p_1 - 1) = p_2 - p_1 + 1 \geq 1.$$

Следовательно, $|E'| > |E|$, но это противоречит тому, что граф M имеет наибольшее число ребер. Значит, все компоненты графа M имеют мощность p , поэтому число ребер в каждой компоненте равно $\frac{p(p-1)}{2}$, а число компонент равно q . ■

Обозначим через $\mathcal{K}$ класс таких графов $G = (V, E)$, что $|V| = pq$ и $|E| \geq \frac{p(p-1)}{2}q$, где p, q — целые положительные числа и $p \geq 3$.

Лемма 3. Пусть $G = (V, E) \in \mathcal{K}$, $M = (V, E') \in \mathcal{M}^{\leq p}(V)$ — произвольное допустимое решение задачи $\mathbf{A}^{\leq p}$ на графе G . Тогда верно неравенство

$$\rho(G, M) \geq |E| - \frac{p(p-1)}{2}q.$$

При этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда $M \in \mathcal{M}^p(V)$ и M — подграф графа G .

Доказательство. Сначала докажем неравенство. По определению расстояния

$$\rho(G, M) = |E \setminus E'| + |E' \setminus E| \geq |E \setminus E'| = |E| - |E \cap E'|.$$

Так как $|E| \geq \frac{p(p-1)}{2}q$, а $|E'| \leq \frac{p(p-1)}{2}q$ (по лемме 2), то

$$|E \cap E'| \leq |E'| \leq \frac{p(p-1)}{2}q.$$

Таким образом,

$$\rho(G, M) \geq |E| - \frac{p(p-1)}{2}q \geq 0.$$

Докажем вторую часть утверждения леммы. Пусть $M = (V, E') \in \mathcal{M}^{\leq p}(V)$, причем $\rho(G, M) = |E| - \frac{p(p-1)}{2}q$. Покажем, что $M \in \mathcal{M}^p(V)$. Компоненты связности графа M обозначим через $M_1, M_2, \dots, M_l$. Пусть $p_i = |M_i| \leq p$ для всех $i \in \{1, \dots, l\}$, где $l \geq q$.

Заметим, что $|E \cap E'| \leq |E'|$. Рассмотрим расстояние между графами G и M :

$$\rho(G, M) = |E \setminus E'| + |E' \setminus E| = |E| + |E'| - 2|E \cap E'| \geq |E| - |E'|.$$

Если найдется такое i , что $p_i < p$, то $|E'| < \frac{p(p-1)}{2}q$ по лемме 2, поэтому

$$\rho(G, M) > |E| - \frac{p(p-1)}{2}q,$$

что противоречит равенству $\rho(G, M) = |E| - \frac{p(p-1)}{2}q$. Следовательно, $p_i = p$ для любого $i \in \{1, \dots, l\}$.

Докажем, что каждая компонента связности графа M является подграфом графа G . Пусть найдется компонента графа M , не являющаяся подграфом графа G . Значит, $|E \cap E'| < \frac{p(p-1)}{2}q$ и, следовательно,

$$\rho(G, M) \geq |E| - |E \cap E'| > |E| - \frac{p(p-1)}{2}q.$$

И вновь получаем противоречие. Таким образом, если для M верно равенство $\rho(G, M) = |E| - \frac{p(p-1)}{2}q$, то $M \in \mathcal{M}^p(V)$ и каждая компонента связности является подграфом графа G .

Доказательство в обратную сторону очевидно. Если $M = (V, E') \in \mathcal{M}^p(V)$ — подграф графа G , то он имеет ровно q компонент, поэтому

$$\rho(G, M) = |E| - |E'| = |E| - \frac{p(p-1)}{2}q.$$

Лемма 3 доказана. ■

Теорема 3. Задача $\mathbf{A}^{\leq p}$ NP-трудна при любом фиксированном $p \geq 3$.

Доказательство. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

ЗАДАЧА $\overline{\mathbf{A}}^p$. Дан граф $G = (V, E) \in \mathcal{K}$. Существует ли такой M -граф $M \in \mathcal{M}^{\leq p}(V)$, что $\rho(G, M) = |E| - \frac{p(p-1)}{2}q$?

Из леммы 3 следует, что в случае утвердительного ответа на вопрос, поставленный в задаче $\overline{\mathbf{A}}^p$, граф M принадлежит множеству $\mathcal{M}^p(V)$.

Следующая NP -полная задача распознавания содержится в работе [8] под номером ТГ12.

РАЗБИЕНИЕ НА ИЗОМОРФНЫЕ ПОДГРАФЫ. Заданы графы $G = (V, E)$ и $H = (V', E')$, такие, что для некоторого целого числа q выполнено равенство $|V| = q|V'|$. Можно ли разбить вершины графа G на q непересекающихся множеств $V_1, V_2, \dots, V_q$, таких, что при $1 \leq i \leq q$ подграфы графа G , индуцированные множествами V_i , изоморфны графу H ?

Известно, что эта задача остается NP -полной для любого фиксированного графа H , содержащего по крайней мере 3 вершины.

Используя лемму 3, получаем следующее утверждение:

При $p \geq 3$ задачи $\overline{A}^p$ и РАЗБИЕНИЕ НА ИЗОМОРФНЫЕ ПОДГРАФЫ, когда в качестве графа H берется полный p -вершинный граф, эквивалентны на классе графов $\mathcal{K}$. Значит, задача $\overline{A}^p$ NP -полна при любом фиксированном $p \geq 3$. Задача $\overline{A}^p$ сводится по Тьюрингу к задаче $A^{\leq p}$ на графах из $\mathcal{K}$, поэтому задача $A^{\leq p}$ при $p \geq 3$ NP -трудна уже на классе графов $\mathcal{K}$. ■

Следствием из леммы 3 и доказательства теоремы 3 является следующее утверждение.

Следствие 2. Задача A^p NP -трудна при любом фиксированном $p \geq 3$.

Доказательство. Как уже отмечалось, в случае утвердительного ответа на вопрос, поставленный в задаче $\overline{A}^p$, граф M принадлежит множеству $\mathcal{M}^p(V)$. Поэтому задача $\overline{A}^p$ сводится по Тьюрингу к задаче A^p на графах класса $\mathcal{K}$. Отсюда следует, что задача A^p при $p \geq 3$ NP -трудна. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильев В. П., Фридман Г. Ш. К задаче аппроксимации графами с фиксированным числом компонент // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 3. С. 533–538.
2. Ляпунов А. А. О строении и эволюции управляющих систем в связи с теорией классификации // Проблемы кибернетики. Вып. 27. М.: Наука, 1973. С. 7–18.
3. Фридман Г. Ш. Исследование одной задачи классификации на графах // Методы моделирования и обработки информации. Новосибирск: Наука, 1976. С. 147–177.
4. Tomescu I. La reduction minimale d'un graphe à une reunion de cliques // Discrete Math. 1974. V. 10. No. 1–2. P. 173–179.
5. Zahn C. Approximating symmetric relations by equivalence relations // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1964. V. 12. No. 4. P. 840–847.
6. Агеев А. А., Ильев В. П., Кононов А. В., Талевнин А. С. Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2006. Т. 13. № 1. С. 3–15.
7. Edmonds J. Paths, trees, and flowers // Canad. J. Math. 1965. V. 17. No. 3. P. 449–467.
8. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.