

DOI 10.17223/20710410/13/7

УДК 519.1+519.8

**ИНТЕРВАЛЬНАЯ НА ОДНОЙ ДОЛЕ ПРАВИЛЬНАЯ РЕБЕРНАЯ
5-РАСКРАСКА ДВУДОЛЬНОГО ГРАФА¹**

А. М. Магомедов, Т. А. Магомедов

*Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Россия***E-mail:** magomedtagirl@yandex.ru

Пусть в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ степень каждой вершины в X равна 2, наибольшая степень вершины в Y равна 5. Найдены условия существования правильной рёберной 5-раскраски графа G , интервальной на множестве X .

Ключевые слова: *двудольный граф, NP-полнота, рёберная раскраска.*

Введение

В работе приняты обозначения и терминология [1].

Рёберной p -раскраской графа G в цвета $1, 2, \dots, p$ называется сюръекция

$$\varphi: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}.$$

Количество рёбер i -го цвета, инцидентных вершине v , обозначается $\varphi(v, i)$; говорят, что в вершине v цвет i *представлен* $\varphi(v, i)$ раз. *Присутствие* или *отсутствие* цвета i в вершине v означает, что $\varphi(v, i) > 0$ или $\varphi(v, i) = 0$ соответственно. Если $\varphi(v, i) \leq 1$ для каждого цвета i , то рёберная раскраска φ называется *правильной в вершине v* ; если φ является правильной в каждой вершине $v \in V(G)$, то φ называется *правильной рёберной раскраской* графа G . Наименьшее p , такое, что существует правильная рёберная p -раскраска графа G , принято обозначать $\chi'(G)$. Напомним, что через $\Delta(G)$ обозначается наибольшая степень вершины графа G (если граф G однозначно определяется из контекста, обычно применяется сокращенное обозначение Δ).

В [2] доказано, что для простого графа G значение $\chi'(G)$ равно Δ или $\Delta + 1$. Для графа G без петель $\chi'(G) \leq \Delta + k$, где k — максимальное число параллельных ребер; для непустого однородного графа с нечётным числом вершин $\chi'(G) = \Delta + 1$ [1, с. 191]. Из работ [3, 4] и знаменитой теоремы о четырех красках следует, что для всякого 2-связного планарного кубического графа G выполняется равенство $\chi'(G) = 3$. В общем случае для кубического графа G задача уточнения: $\chi'(G) = 3$ или $\chi'(G) = 4$ — является NP-полной [5] (соответствующая гипотеза была выдвинута ранее в [6]). Теорема Кенига о рёберной раскраске [7, с. 80] утверждает, что для двудольного графа G справедливо равенство $\chi'(G) = \Delta$.

Для заданных целочисленных a и b , $a \leq b$, множество $\{a, a + 1, \dots, b\}$ будем называть *интервалом*. Рёберную раскраску, правильную в вершине $v \in V$, называют *интервальной в вершине v* , если цвета рёбер, инцидентных вершине v , заполняют некоторый интервал. Рёберную раскраску графа G называют *интервальной*, если она является интервальной в каждой вершине графа, и *интервальной на множестве $V' \subseteq V(G)$* , если она является интервальной в каждой вершине из V' .

Задача существования правильной рёберной Δ -раскраски двудольного графа $G = (X, Y, E)$, интервальной на множестве X , рассмотрена в работе [8] в связи с прикладной задачей устранения «окон» преподавателей в расписании учебных занятий;

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 2010–1.3.2–111–017–12.

в [8], в частности, показано, что если в графе $G = (X, Y, E)$ степени вершин X «преобладают» (над вершинами Y) в следующем смысле:

$$\min_{x \in X} d_G x \geq \max_{y \in Y} d_G y \quad \text{или} \quad \forall (x, y) \in E \quad (d_G x \geq d_G y),$$

то G допускает правильную рёберную Δ -раскраску, интервальную на X (с дополнительным свойством: цвет 1 представлен в каждой вершине X). Задача представляется более содержательной, когда в определённом смысле «преобладают» степени вершин множества Y ; в [9] доказано, что задача о существовании правильной рёберной Δ -раскраски, интервальной на X , NP-полна, даже если

$$\forall x \in X \quad (d_G x \leq \lceil \Delta/2 \rceil); \quad \forall y \in Y \quad (d_G y = \Delta).$$

Иногда в прикладных задачах требуется, чтобы тот или иной цвет присутствовал лишь в определенных вершинах. Рёберную раскраску графа $G = (X, Y, E)$ будем называть *раскраской с ограничением на цвет k* , если цвет k присутствует лишь в вершинах наибольшей степени. Пусть двудольный граф $G = (X, Y, E)$ задает учебные нагрузки к расписанию: количество ребер, соединяющих вершины $x_i \in X$ и $y_j \in Y$, равно количеству уроков, предписанных учителю x_i провести в классе y_j . Тогда, рассматривая цвета $1, 2, \dots, \Delta$ в качестве номеров академических часов, получим, что требование планировать урок учителю x_i в академический час с номером Δ лишь в том случае, когда учебная нагрузка учителя x_i содержит Δ уроков, равносильно условию ограничения на цвет Δ .

Двудольный граф $G = (X, Y, E)$, в котором $d_G x = a$ для всех $x \in X$, будем называть (a, b) -графом, $(a, \hat{b})$ -графом, $(a, \bar{b})$ -графом или (a) -графом, если соответственно $d_G y = b$ для всех $y \in Y$; $d_G y \leq b$ для всех $y \in Y$; $\max_{y \in Y} d_G y = b$ или значения степеней вершин Y безразличны.

Докажем, что задача о существовании у заданного $(2, \bar{5})$ -графа $G = (X, Y, E)$ правильной рёберной 5-раскраски, интервальной на X и с ограничением на произвольно выбранный цвет $k = 1, 3$ или 5, разрешима за полиномиальное время. Известно, что задача о существовании интервальной Δ -раскраски у двудольного графа G с $\Delta = 5$ NP-полна [10].

Отметим также следующие результаты. Впервые вопрос об интервальной раскрашиваемости двудольных графов, видимо, сформулировал Н. М. Hansen [11]. Он, в частности, доказал, что в следующих случаях двудольный граф G интервально раскрашиваем: 1) G — полный граф, 2) G является $(2, 2b)$ -графом, 3) степени вершин в графе G не превышают трёх. Если G является $(2, \Delta)$ -графом, то при чётном Δ существует рёберная интервальная Δ -раскраска [12], а при нечётном $\Delta \geq 3$ — рёберная интервальная раскраска в Δ или $(\Delta + 1)$ цветов [13]. В [14] доказана NP-полнота задачи о существовании интервальной Δ -раскраски для $(4, 3)$ -графа (соответствующая гипотеза была сформулирована в [15]); NP-полнота аналогичной задачи для $(6, 3)$ -графа установлена в [16].

Представляют интерес контрпримеры, уточняющие значения Δ и n (количество вершин), для которых можно указать графы, не обладающие рёберной интервальной раскраской: $\Delta = 14$ и $n = 21$ (С. В. Севастьянов); $\Delta = 13$ и $n = 27$ (Р. Erdős); $\Delta = 15$ и $n = 19$ (М. Malafiejski). С привлечением компьютерных вычислений К. Giaro установил, что при $n \leq 14$ любой двудольный граф допускает рёберную интервальную раскраску.

1. Вспомогательные утверждения

Для $(2, \bar{5})$ -графа $G = (X, Y, E)$ примем следующие определения:

- 1) множество $E' \subseteq E$, такое, что порожденный на E' подграф графа G является $(1, \bar{2})$ -графом, называется *рёберным 2-каркасом* графа G ;
- 2) рёберная 2-раскраска φ графа G называется *выровненной*, если выполнены следующие условия:
 - а) $\varphi(x, 1) = \varphi(x, 2) = 1$ для всех $x \in X$;
 - б) для каждой вершины $y \in Y$, такой, что $d_G y \geq 3$, справедливо неравенство $|\varphi(y, 1) - \varphi(y, 2)| \leq 1$; другими словами, для любого $i = 1, 2$ $\varphi(y, i) \leq 3$ для всех $y \in Y$ и равенство $\varphi(y, i) = 3$ возможно тогда и только тогда, когда $d_G y = 5$, что равносильно $\varphi(y, 3 - i) = 2$;
- 3) набор (φ, E') из рёберной 2-раскраски φ и рёберного 2-каркаса E' графа G будем называть *2-каркас-раскраской*, если ни одной вершине из множества Y не инцидентны два ребра одного цвета из множества E' .

Далее понадобятся следующие обозначения для графа $G = (V, E)$: $\Gamma(S)$ — множество рёбер, смежных вершинам $S \subseteq V$; $\text{density}(G) = |E|/|V|$.

В [17] доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $M(v, e)$ — время, требуемое для вычисления минимального разреза сети с v вершинами и e ребрами. Тогда в графе, состоящем из n вершин и m ребер, подграф G' с наибольшим значением $\text{density}(G')$ может быть найден за время $O(M(n, n + m) \log n)$.

Утверждение 2. Если $(2, \bar{5})$ -граф $G = (X, Y, E)$ обладает правильной рёберной 5-раскраской φ , интервальной на X , то

$$\forall S \subseteq X \quad |S| \leq 2|\Gamma(S)|. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $S \subseteq X$; $G_s = (S, \Gamma(S), E_s)$ — подграф графа G , порожденный множеством S . Поскольку раскраска φ является интервальной на S , то цвета рёбер, инцидентных произвольной вершине $x \in S$, образуют одну из пар

$$1 \text{ и } 2; \quad 2 \text{ и } 3; \quad 3 \text{ и } 4 \quad \text{или} \quad 4 \text{ и } 5.$$

Таким образом, в вершине $x \in S$ представлен один и только один из цветов 2 и 4. Тогда можно указать цвет $i_0 \in \{2, 4\}$, который представлен хотя бы в половине вершин из S ; следовательно, не менее $|S|/2$ рёбер множества E_s закрашены в цвет i_0 . Отсюда и из правильности раскраски φ следует, что цвет i_0 представлен в не менее чем $|S|/2$ вершинах множества $\Gamma(S)$. Следовательно, $|S|/2 \leq |\Gamma(S)|$. ■

Далее покажем, что условия (1) являются и достаточными для существования в $(2, \bar{5})$ -графе $G = (X, Y, E)$ правильной рёберной 5-раскраски φ , интервальной на X . Отметим аналогию условий (1) с условиями теоремы Холла [1, с. 164] о существовании в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ полного паросочетания множества X с множеством Y . Естественно, следует рассмотреть вопрос эффективной проверки условий (1).

Утверждение 3. Проверка условий (1) выполнима за полиномиальное время.

Доказательство. Заменим в графе $G = (X, Y, E)$ каждую вершину $x \in X$ и рёбра (x, y') и (x, y'') одним ребром (y', y'') ; полученный граф обозначим через $H = (Y, Z)$, где Z — множество рёбер. Условия (1), очевидно, равносильны следующим: для любого $Z' \subseteq Z$ и подграфа $H' = (Y', Z')$ графа H , порожденного множеством Z' , выполняется неравенство $|Z'|/|Y'| \leq 2$.

Воспользуемся утверждением 1: найдем в графе H подграф G' с наибольшим значением $\text{density}(G')$ и заметим, что проверка условий (1) сводится к проверке неравенства $\text{density}(G') \leq 2$. ■

Результат работы [18] удобно привести в следующем виде.

Утверждение 4. Если $(2, \bar{5})$ -граф $G = (X, Y, E)$ удовлетворяет условиям (1), то G обладает рёберным 2-каркасом.

Нам понадобится также следующее утверждение из [19].

Утверждение 5. Если в связном (2) -графе G существует некоторый 2-каркас, то граф G обладает 2-каркас-раскраской.

Утверждение 6. Если связный (2) -граф $G = (X, Y, E)$ обладает полным паросочетанием X с Y , то G содержит не более одного цикла.

Доказательство. Пусть G содержит два различных цикла: C_1 и C_2 . Обозначим через $G' = (X', Y', E')$ минимальный по числу рёбер связный подграф графа G , включающий C_1 и C_2 . Тогда $\Gamma(X') = Y'$; $d_{G'}x = 2$ для всех $x \in X$; $d_{G'}y \geq 2$ для всех $y \in Y'$; для некоторого $y \in Y'$ выполняется условие $d_{G'}y > 2$.

Отсюда получаем $|X'| > |\Gamma(X')|$. Но это противоречит упомянутой выше теореме Холла, согласно которой $G = (X, Y, E)$ содержит полное паросочетание X с Y тогда и только тогда, когда для любого $X' \subseteq X$ выполняется неравенство $|X'| \leq |\Gamma(X')|$. ■

Следствие 1. Если $G = (X, Y, E)$ — связный (2) -граф, обладающий полным паросочетанием X с Y , то G — либо дерево, либо цикл, либо состоит из простого цикла и набора деревьев, «прикрепленных» к циклу в некоторых вершинах из Y .

Утверждение 7. Пусть $(2, \bar{5})$ -граф $G = (X, Y, E)$ обладает 2-каркас-раскраской (φ, E') . Тогда каждый подграф $G_i = (X_i, Y_i, E_i)$, $i = 1, 2$, графа G , порожденный множеством $E_i = \{e \in E : \varphi(e) = i\}$, допускает интервальную раскраску φ' в три цвета — $2i - 1$, $2i$ и $2i + 1$, такую, что в вершине $y \in Y_i$ цвет 3 представлен тогда и только тогда, когда $d_{G_i}y = 3$.

Доказательство. По определению 2-каркас-раскраски (φ, E') , каждый из подграфов $G_i = (X_i, Y_i, E_i)$ является $(2, \bar{3})$ -графом, который обладает полным паросочетанием X_i с Y_i . Исходная раскраска φ более не потребуется; удалим цвета всех рёбер.

Покажем сначала, что G_1 допускает интервальную раскраску в три цвета — 1, 2 и 3, такую, что цвет 3 представлен только в вершине $y \in Y$ степени 3. Вершины множества X_1 (Y_1) будем называть « X_1 -вершинами» (соответственно « Y_1 -вершинами»).

Рассмотрим случай, когда граф G_1 содержит некоторый цикл C . Выберем одно из направлений обхода цикла C и, начиная с произвольной Y_1 -вершины цикла, выполним обход, поочерёдно закрашивая рёбра C в цвета 1, 2, 1, 2, ..., 1, 2 (любой цикл в двудольном графе имеет чётную длину).

Если граф G_1 состоит только из цикла C , то закрашивание завершено.

Пусть G_1 , кроме цикла C , содержит (см. следствие 1) и некоторые деревья, «прикреплённые» к C . Для каждой Y_1 -вершины y цикла C , к которой «прикреплено» некоторое дерево F , выполним следующую процедуру.

Процедура закрашивания дерева. Сориентируем рёбра F так, чтобы получить ориентированное корневое дерево F' с корнем в вершине y , и закрасим дуги дерева F' в цвета множества $\{1, 2, 3\}$ по следующему правилу:

- 1) дугу с началом в корневой вершине y закрасим в цвет 3; теперь в вершине y представлены цвета 1, 2 и 3;

- 2) для каждой Y_1 -вершины y' дерева F' закрасим дугу с концом в y' в цвет 2; теперь в каждой Y_1 -вершине дерева (независимо от степени вершины) точно один раз представлен цвет 2;
- 3) **если** из некорневой Y_1 -вершины y' дерева F' выходят две дуги, **то** одну из них закрасим в цвет 1, другую — в цвет 3; теперь в каждой Y_1 -вершине дерева, степень которой равна 3, представлены цвета 1, 2 и 3; **иначе** закрасим дугу с началом в y' в цвет 1; теперь в каждой Y_1 -вершине степени 2 представлены цвета 1 и 2.

Конец процедуры.

Если G_1 состоит из единственного дерева F , то выберем любую его висячую вершину y и выполним описанную выше процедуру закрашивания дерева с заменой п. 1 на следующий: «дугу с началом в y закрасим в цвет 1».

Полученную рёберную раскраску графа G_1 в цвета 1, 2 и 3 обозначим через φ' и подытожим свойства φ' :

- 1) в каждой X_1 -вершине представлен цвет 2 и один из цветов 1 или 3 (следовательно, раскраска φ' интервальна на X_1);
- 2) в каждой Y_1 -вершине y степени 1, 2 и 3 представлены цвета 2; 1 и 2; 1, 2 и 3 соответственно (следовательно, раскраска φ' интервальна на Y_1).

Таким образом, для G_1 требуемая раскраска построена. Аналогично построим раскраску для G_2 , после чего перекрасим в G_2 рёбра цвета 1 в цвет 5, а рёбра цвета 2 — в цвет 4. ■

2. Условия существования правильной рёберной 5-раскраски, интервальной на X

Теорема 1. Пусть $\Delta = 5$; k — произвольный элемент множества $\{1, 3, 5\}$. Тогда $(2, \overline{\Delta})$ -граф $G = (X, Y, E)$ обладает правильной рёберной Δ -раскраской, интервальной на X и с ограничением на цвет k , если и только если выполнены условия (1).

Доказательство. Необходимость доказана в утверждении 2.

Достаточность. Пусть (1) выполнено и, согласно утверждениям 4, 5 и 7, для графа G существует рёберная раскраска φ и разбиение на два $(2, \hat{3})$ -графа $G_1 = (X_1, Y_1, E_1)$ и $G_2 = (X_2, Y_2, E_2)$, таких, что: 1) $d_{G_i}y = 3$ тогда и только тогда, когда $d_{G_{3-i}}y = 2$; 2) сужение φ' раскраски φ на G_1 является интервальной раскраской графа G_1 в цвета 1, 2, 3, такой, что в Y_1 -вершине y цвет 3 присутствует тогда и только тогда, когда $d_{G_1}y = 3$; 3) сужение φ' раскраски φ на G_2 является интервальной раскраской графа G_2 в цвета 3, 4, 5, такой, что в Y_2 -вершине y цвет 3 представлен тогда и только тогда, когда $d_{G_2}y = 3$.

Поэтому в вершине $y \in Y$ цвет 3 представлен тогда и только тогда, когда $d_G y = 5$, и точно один раз. Поэтому φ является правильной рёберной 5-раскраской графа G в цвета множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, интервальной на X . Ясно, что в вершине $y \in Y$ цвет 3 представлен в том и только в том случае, когда $d_G y = 5$. Для $k = 3$ теорема доказана.

Ввиду симметрии случаев $k = 1$ и 5 ограничимся доказательством для случая $k = 5$. Покажем, как преобразовать φ в правильную рёберную 5-раскраску в цвета множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, интервальную на X и такую, что цвет 5 представлен в вершине $y \in Y$ тогда и только тогда, когда $d_G y = 5$.

Пусть $y \in Y$, $\varphi(y, 5) = 1$, $d_G y < 5$.

В цвет 5 закрашены только рёбра графа G_2 , пусть ребро $e = (x, y) \in E_2$ имеет цвет 5; другое ребро из E_2 , инцидентное вершине x , обозначим (x, y') . Так как $d_G y < 5$, то $d_{G_1} y < 3$ и $d_{G_2} y < 3$; поэтому $\varphi(y, 3) = 0$. Перекрасим ребро (x, y) в цвет 3.

Во-первых, цвета ребер, инцидентных вершине y , различны и после перекраски ребра (x, y) . Во-вторых, поскольку до перекраски цвета ребёр, инцидентных вершине x , образовывали интервал и цвет ребра (x, y) был равен 5, то цвет ребра (x, y') равен 4. Поэтому после перекраски ребра (x, y) в вершине x присутствуют цвета 3 и 4, следовательно, раскраска остается интервальной в вершине x . В вершине y , $d_G y < 5$, цвет 5 теперь отсутствует; таким образом, количество вершин множества Y , степени которых меньше 5 и в которых присутствовал цвет 5, уменьшилось на единицу. ■

Заключение

Доказано, что правильная рёберная раскраска $(2, \bar{5})$ -графа $G = (X, Y, E)$, интервальная на X и с ограничением на любой из цветов множества $\{1, 3, 5\}$, существует тогда и только тогда, когда выполнены условия (1). Из утверждений 1 и 3 видно, что проверка условий (1) достигается за полиномиальное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984.
2. *Визинг В. Г.* Об оценке хроматического класса p -графа // Дискретный анализ. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1964. Вып. 3. С. 25–30.
3. *Tait P. G.* Remarks on the previous communication // Proc. Roy. Soc. Edin. 1880. V. 10. P. 729.
4. *Tait P. G.* Note on a theorem in the geometry of position // Trans. Roy. Soc. Edin. 1880. V. 29. P. 657–660.
5. *Holyer J.* The NP-completeness of edge-coloring // Siam J. Comput. 1981. V. 10. No. 4. P. 718–720.
6. *Garey M. R. and Johnson D. S.* Computers and Intractability. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1979.
7. *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии: пер. с англ. М.: Мир, 1998.
8. *Асратян А. С., Камалян Р. Р.* Интервальные раскраски рёбер мультиграфа // Прикладная математика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1987. Вып. 5. С. 25–34.
9. *Магомедов А. М.* Непрерывное расписание для специализированных процессоров без отношения предшествования // Вестник Московского энергетического института. 2009. № 5. С. 14–17.
10. *Giaco K.* The complexity of consecutive Δ -coloring of bipartite graphs: 4 is easy, 5 is hard // Ars Combin. 1997. V. 47. P. 287–298.
11. *Hansen H. M.* Scheduling with minimum waiting periods (in Danish) // Master Thesis. Odense University. Odense, Denmark, 1992.
12. *Магомедов А. М., Рашидова А.* Матрица расписания с двумя ненулевыми элементами в строке // Вестник Дагестанского госуниверситета. 1999. Вып. 4. С. 12–15.
13. *Hanson D., Loten C. O. M., and Toft B.* On interval colourings of bi-regular bipartite graphs // Ars Combinat. 1998. V. 4. P. 23–32.
14. *Pyatkin A. V.* Interval coloring of $(3, 4)$ -biregular bipartite graphs having large cubic subgraphs // J. Graph Theory. 2004. V. 47. No. 2. P. 122–128.
15. *Jensen T. R. and Toft B.* Graph coloring problems. New York: Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization, 1995.
16. *Asratian A. S. and Casselgren C. J.* Some results on interval edge colorings of (α, β) -biregular bipartite graphs // Department of Mathematics, Linköping University S-581 83. Linköping, Sweden, 2007.

17. *Goldberg A. V.* Finding a maximum density subgraph. Berkeley: University of California / Technical Report UCB/CSD 84/171, CA. 1984.
18. *Магомедов А. М.* Два частичных паросочетания в двудольном графе специального вида // Материалы X Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) / под ред. О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во мехмата МГУ, 2010. С. 312–313.
19. *Магомедов А. М.* Об одной специальной рёберной 2-раскраске // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Информатика. Телекоммуникации. Управление. Раздел «Математическое моделирование: методы, алгоритмы, технологии». 2011. № 2(120). С. 156–159.