

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

DOI 10.17223/20710410/13/10

УДК 519.168

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДООПРЕДЕЛЕНИЯ КРАТНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ В МАТРИЦЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

И. С. Киселев

*Петербургский государственный университет путей сообщения, г. Санкт-Петербург,
Россия*

E-mail: igor@kiselev.spb.ru

Предложен аналитический метод доопределения кратных предпочтений в матрице парных сравнений, имеющий полиномиальную сложность от размерности матрицы и количества доопределяемых элементов, не ухудшающий показатель согласованности исходной матрицы.

Ключевые слова: матрица парных сравнений, согласованность.

Введение

Матрица парных сравнений получила широкое применение для вычисления приоритетов сущностей на основе предпочтений экспертов. Одним из распространенных типов предпочтений является кратность превосходства. Рассмотрим матрицу кратности парных сравнений A . В ней элемент a_{ij} определяет, во сколько раз сущность x_i предпочтительнее сущности x_j . Данный тип предпочтения лег в основу метода анализа иерархий (МАИ) Т. Саати [1]. Для получения вектора весов оцениваемых объектов в МАИ находится нормированный собственный вектор матрицы парных сравнений, соответствующий ее максимальному собственному числу. В идеально согласованной матрице экспертных предпочтений для каждой тройки элементов выполняется равенство $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$. Функция оценивания согласованности предпочтений убывает с увеличением числа троек, для которых это условие не выполняется, и с ростом разности $|a_{ij} \cdot a_{jk} - a_{ik}|$.

Трудоёмкость формирования матрицы кратности предпочтений быстро растёт с ростом её размерности, отсюда возникает задача доопределения элементов матриц при частичном задании предпочтений [2–5]. В. Д. Ногин [2, 3] рассмотрел доопределение идеально согласованных матриц; В. Г. Тоценко [4] — доопределение матриц с внесением изменений в исходно заданные оценки. В работе [5] построение проводится с использованием целевой функции, основанной на индексе согласованности (ИС), предложенном Т. Саати. Однако ИС имеет искусственный характер, и в настоящей работе предлагается аналитическое решение задачи с использованием функции согласованности, имеющей физический смысл.

1. Постановка задачи

В [5] для определения оптимальной величины кратности a_{ij}^{opt} предпочтения $x_i \succ x_j$ используется целевая функция

$$\eta_{\lambda}(a_{ij}) = (N - 1 + a_{ii}) / \lambda_{\max} \rightarrow \max. \quad (1)$$

В качестве ограничений задачи оптимизации принимаются все известные значения предпочтений из матрицы A . Формула (1) связывает максимальное собственное число $\lambda_{\max}$ с размерностью матрицы $N \times N$ согласно введённому Саати индексу согласованности ИС [1]

$$\text{ИС} = \frac{\lambda_{\max} - N}{N - 1}.$$

Незаполненные клетки в предъявленной для доопределения матрице кратности предпочтений заполняются единицами. Установлено, что функция $\eta_{\lambda}(a_{ij})$ дифференцируема и имеет единственный максимум в диапазоне $(0, \infty)$. Оптимальное значение кратности a_{ij}^{opt} находится путем итеративного пересчёта по формуле

$$a_{ij}^* = \arg(\max(\eta_{\lambda}(a_{ij}))). \quad (2)$$

Нахождение максимального собственного числа матрицы является трудоёмким процессом, поэтому была предложена целевая функция $\eta_D(a_{ij}) \rightarrow \max$, основанная на нахождении определителя D матрицы A . Однако в работе [6] на основе имитационного моделирования показано, что определитель матрицы даёт решение задачи оптимизации не во всех случаях.

Для сравнения оценок согласованности матриц различных размерностей вводится отношение согласованности (ОС), рассчитываемое как отношение ИС к случайной согласованности (СС) ($\text{ОС} = \text{ИС}/\text{СС}$). СС — это математическое ожидание ИС для матрицы требуемой размерности, заполненной случайными величинами. Для практических расчетов СС берется из таблицы, приведенной в [1]. Показано [7], что определение ИС через соотношение максимального положительного собственного числа матрицы с её размерностью имеет искусственный характер. Это подтверждается ограниченной областью использования вычисляемого на его основе ОС, поскольку для плохо согласованной матрицы значение ОС выходит за рамки шкалы $[0, 1]$.

Таким образом, с одной стороны, определение оптимальных значений неизвестных предпочтений по формуле (2) является трудоёмким процессом, а с другой — сама целевая функция (1) имеет искусственный характер.

Граф, матрица связности которого совпадает с рассматриваемой матрицей парных сравнений, будем называть графом, соответствующим матрице. Для оценки качественной несогласованности достаточно подсчитать количество циклов в этом графе. В случае количественных предпочтений для получения оценки их несогласованности этого недостаточно, так как каждая тройка сущностей содержит не только факт согласованности, но и ее меру. Для получения соответствующего показателя s матрицы парных сравнений будем суммировать меру согласованности всех троек сущностей [7]:

$$s = \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N f(a_{ij}, a_{jk}, a_{ki}). \quad (3)$$

За меру согласованности предпочтений тройки сущностей примем отклонение от условия идеальной согласованности $a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ik}^{-1} = a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ki} = 1$. Для перехода от мультипликативной к аддитивной форме представления условия согласованности воспользуемся логарифмической шкалой, а для получения неотрицательного значения меры согласованности возьмём квадрат от логарифма произведения. В результате функция (3) примет следующий вид:

$$s = \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \ln^2(a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ki}). \quad (4)$$

Данный показатель позволяет заменить трудоемкий процесс вычисления максимального собственного числа более простым расчётом.

Решим задачу доопределения одного или нескольких элементов матрицы кратности предпочтений аналитически, используя функцию (4) для вычисления оптимальных значений неизвестных предпочтений, и оценим вычислительную сложность полученного решения.

2. Доопределение одного элемента матрицы

Примем за целевую функцию минимизацию коэффициента несогласованности (4). Коэффициент несогласованности s , являясь функцией от матрицы, является также функцией от всех элементов матрицы. При решении задачи доопределения матрицы все известные элементы являются константами. Тогда можно рассматривать s как функцию только от неизвестных элементов матрицы, а в случае единственного неизвестного элемента — как функцию от одного аргумента. Оптимальное значение неизвестного элемента a_{vw} определяется как $a_{vw}^* = \arg(\min(s(a_{vw})))$. Экстремальное значение функции несогласованности предпочтений имеет место при равенстве её производной нулю: $s' = 0$.

Функция $s(a_{vw})$ на области определения $(0, \infty)$ дифференцируема и имеет единственный экстремум в своей минимальной точке. Значит, для поиска оптимального значения элемента необходимо решить уравнение $\frac{\partial s(a_{vw})}{\partial a_{vw}} = 0$. Возьмем производную от s (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \ln^2(a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ki})}{\partial a_{vw}} &= \frac{\partial \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq v, w}}^N \ln^2(a_{vw} \cdot a_{wk} \cdot a_{kv})}{\partial a_{vw}} = \\ &= \frac{2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq v, w}}^N \ln(a_{vw} \cdot a_{wk} \cdot a_{kv})}{a_{vw}} = \frac{2 \ln \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v, w}}^N (a_{vw} \cdot a_{wk} \cdot a_{kv})}{a_{vw}} = 0. \end{aligned}$$

Найдем положительное решение данного уравнения относительно a_{vw} :

$$a_{vw} = \sqrt[N-2]{\frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v, w}}^N (a_{wk} \cdot a_{kv})}}.$$

Так как для матрицы парных сравнений кратности предпочтений $a_{vw} = a_{wv}^{-1}$, то

$$a_{wv} = \sqrt[N-2]{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v, w}}^N (a_{wk} \cdot a_{kv})}.$$

Таким образом, оптимальное значение предпочтения a_{vw} в матрице является средним геометрическим всех путей длины 2 из вершины w в вершину v на графе, соответствующем оптимизируемой матрице.

3. Доопределение нескольких элементов матрицы

Введем сквозную нумерацию элементов верхнего треугольника матрицы слева направо по столбцам с помощью функции нумерации

$$r(i, j) = (j(j-3))/2 + i + 1, \quad i < j.$$

Например, для матрицы порядка 5 нумерация будет следующей:

	1	2	3	4	5
1	—	1	2	4	7
2	—	—	3	5	8
3	—	—	—	6	9
4	—	—	—	—	10
5	—	—	—	—	—

Будем решать задачу доопределения M элементов матрицы. Пусть неизвестными являются элементы $a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_M j_M}$, где $i_l < j_l$ для всех $l = 1, 2, \dots, M$.

Для нахождения оптимальных значений нескольких элементов матрицы следует найти экстремум функции согласованности матрицы от всех оптимизируемых элементов. Необходимым условием экстремума является равенство нулю всех частных производных функции. Задача оптимизации M элементов сводится к решению системы из M уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{\partial s(a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_M j_M})}{\partial a_{i_1 j_1}} = 0, \\ \frac{\partial s(a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_M j_M})}{\partial a_{i_2 j_2}} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial s(a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_M j_M})}{\partial a_{i_M j_M}} = 0, \end{cases}$$

где s — показатель несогласованности (4).

Аналогично случаю оптимизации одного элемента каждое из M уравнений системы примет вид

$$\frac{\partial \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_l \\ k \neq j_l}}^N \ln^2(a_{i_l j_l} \cdot a_{j_l k} \cdot a_{k i_l})}{\partial a_{i_l j_l}} = 0, \quad l = 1, \dots, M. \quad (5)$$

Преобразуем систему (5):

$$a_{i_l j_l}^{N-2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i_l \\ k \neq j_l}}^N (a_{j_l k} \cdot a_{k i_l}) = 1, \quad l = 1, \dots, M. \quad (6)$$

Левая часть каждого из уравнений системы является произведением степеней элементов матрицы. Используя равенство $a_{ij} = a_{ji}^{-1}$, перейдем к элементам только верхней треугольной матрицы. Степени элементов для l -го уравнения будут равны:

- $N - 2$ для $a_{i_l j_l}$;
- 1 для $a_{j_l k}$, $k > j_l$, и для $a_{k i_l}$, $k < i_l$;
- -1 для $a_{k j_l}$, $k < j_l$, $k \neq i_l$, и для $a_{i_l k}$, $k > i_l$, $k \neq j_l$;
- 0 в остальных случаях.

Пусть матрица D содержит степени элементов a_{ij} в уравнениях (6), а именно: элемент матрицы d_{st} , где $s = r(i_l, j_l)$, $t = r(i, j)$, равен степени, в которой a_{ij} входит в l -е уравнение системы.

Перенесем все известные элементы a_{ij} в правые части уравнений (6) и заменим элементы нижней треугольной матрицы их парами из верхней:

$$\prod_{t=1}^M a_{i_t j_t}^{d_{r(i_l, j_l) r(i_t, j_t)}} = \prod_{\substack{(i, j) \neq (i_t, j_t), \\ i < j, t=1, \dots, M}} a_{ij}^{-d_{r(i_l, j_l) r(i, j)}}, \quad l = 1, \dots, M.$$

Для решения этой системы составим матрицу P , состоящую из степеней неизвестных: $p_{st} = d_{r(i_s, j_s) r(i_t, j_t)}$, $s = 1, \dots, M$, $t = 1, \dots, M$.

Тогда решением системы является

$$a_{i_l j_l} = \prod_{k=1}^M \left(\prod_{\substack{(i, j) \neq (i_t, j_t), \\ i < j, t=1, \dots, M}} a_{ij}^{-d_{r(i_k, j_k) r(i, j)}} \right)^{(P^{-1})_{lk}}, \quad l = 1, \dots, M. \quad (7)$$

Пример. Метод будем иллюстрировать на матрице порядка 5 с тремя неизвестными элементами ($N = 5$, $M = 3$):

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & a_{13} & 2 & 6 \\ 1/4 & 1 & a_{23} & 1/2 & 4/3 \\ a_{13}^{-1} & a_{23}^{-1} & 1 & 1/5 & a_{35} \\ 1/2 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1/6 & 3/4 & a_{35}^{-1} & 1/3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица D имеет следующий вид:

$$D = \begin{array}{c|cccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 14 & 24 & 34 & 15 & 25 & 35 & 45 \\ \hline 12 & 3 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 23 & 1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 14 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 24 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 34 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 15 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 25 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 35 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 45 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}.$$

Здесь индексы за границей матрицы D соответствуют номерам элементов исходной матрицы.

Далее получим

$$\begin{cases} a_{13}^3 a_{23}^{-1} a_{35}^1 = 4^1 \cdot 2^1 \cdot (1/2)^0 \cdot (1/5)^{-1} \cdot 6^1 \cdot (4/3)^0 \cdot 3^0 = 240, \\ a_{13}^{-1} a_{23}^3 a_{35}^1 = 4^{-1} \cdot 2^0 \cdot (1/2)^1 \cdot (1/5)^{-1} \cdot 6^0 \cdot (4/3)^1 \cdot 3^0 = 5/6, \\ a_{13}^1 a_{23}^1 a_{35}^3 = 4^0 \cdot 2^0 \cdot (1/2)^0 \cdot (1/5)^1 \cdot 6^1 \cdot (4/3)^1 \cdot 3^1 = 24/5; \end{cases}$$

$$P = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{35} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 240^{1/2} \cdot (5/6)^{1/4} \cdot (24/5)^{-1/4} \\ 240^{1/4} \cdot (5/6)^{1/2} \cdot (24/5)^{-1/4} \\ 240^{-1/4} \cdot (5/6)^{-1/4} \cdot (24/5)^{1/2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ 5/\sqrt[4]{18} \\ \sqrt[4]{72}/5 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 10 \\ 2,43 \\ 0,58 \end{vmatrix}.$$

Абсолютное значение показателя согласованности полученной матрицы, рассчитанное по формуле (4), равно 0,035. Для сравнения показателей согласованности матриц удобнее использовать не абсолютные значения, а относительные, нормированные в диапазоне $[0, 1]$. Нормировать показатель согласованности будем с учётом порядка матрицы N и максимально допустимой кратности предпочтений $a_{\max}$. В работе [7] предложено рассчитывать нормированный показатель согласованности по формуле

$$C = 1 - \frac{s}{s_{\max}(a_{\max}, N)},$$

$$\text{где } s_{\max}(a_{\max}, N) = \begin{cases} \frac{N^3 - N^2}{2} \cdot \ln^2(a_{\max}), & \text{если } N \text{ нечетно,} \\ \left(\frac{N^3 - N^2}{2} - N \right) \cdot \ln^2(a_{\max}), & \text{если } N \text{ четно.} \end{cases}$$

Пусть в нашем примере $a_{\max} = 10$. Тогда $s_{\max}(10, 5) = 265,09$; $C = 0,9999$.

Для сравнения рассчитаем индекс и коэффициент согласованности (КС) по Саати: ИС = 0,0003; КС = 0,9997.

Полученная матрица имеет высокий показатель согласованности. Согласованность не идеальна ввиду изначально содержавшейся в матрице несогласованности.

В рассмотренном примере оптимизируемой матрице соответствует связный граф. Для матрицы парных сравнений, которой соответствует несвязный граф, будет получено семейство решений.

Результаты доопределения зависят от выбранной целевой функции (функции согласованности). Результаты расчета по формуле (7) с использованием целевой функции согласованности (4) могут отличаться от результатов, полученных при оптимизации с использованием собственного числа (см. формулу (2) и работу [5]), в частности при наличии в графе доопределяемой матрицы хотя бы двух несогласованных не имеющих общих ребер троек предпочтений. Различие элементов доопределенных разными способами матриц в серии проведенных экспериментов не превышало 5 %.

Определим вычислительную сложность полученного алгоритма. Формулу (7) перепишем в виде

$$a_{i_l j_l} = \prod_{k=1}^M (q_k)^{(P^{-1})_{lk}}, \quad q_l = \prod_{\substack{(i,j) \neq (i_t, j_t), \\ i < j, t=1, \dots, M}} a_{ij}^{-d_{r(i_l, j_l) r(i, j)}}, \quad l = 1, \dots, M.$$

Сложность построения матрицы P равна $O(M^2)$; вычисления $P^{-1} - O(M^3)$. Для вычисления каждого q_l используется произведение не больше чем $N(N-1)/2$ элементов, и количество q_l равно M . Сложность построения вектора решений по известным P^{-1} и $q_l - O(M^2)$, так как его размер равен M и каждый элемент равен произведению M сомножителей. Тогда общая сложность алгоритма равна $O(M^2) + O(M^3) + O(M \cdot N^2) + O(M^2) = O(M^3 + M \cdot N^2)$. С учетом того, что число неизвестных элементов матрицы M не может превышать общего числа пар элементов матрицы $N(N-1)/2$, получим оценку вычислительной сложности сверху $O(N^6)$.

Заключение

Предложен способ доопределения матриц парных сравнений кратности предпочтений, вычислительная сложность которого равна $O(N^6)$, где N — порядок матрицы. Для выбранной функции оценки согласованности доопределенная матрица имеет максимально возможное значение показателя согласованности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991.
2. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2004. 176 с.
3. Ногин В. Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // ЖВМиМФ. 2004. Т. 44. № 7. С. 1259–1268.
4. Тоценко В. Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Киев: Наукова думка, 2002. 381 с.
5. Микони С. В., Киселев И. С. Приближенный метод доопределения матрицы парных сравнений с кратными предпочтениями // Труды конф. IEEE AIS'07 и CAD-2007, Дивноморское, 3–10.09.2007. М.: Наука, Физматлит, 2007. С. 330–333.
6. Микони С. В., Киселев И. С. Экспериментальное доказательство достоверности метода доопределения матриц предпочтений // Материалы IV науч.-практич. конф. ИММОД-2009, 21–23.10.2009. СПб.: ФГУП ЦНИИТС, 2009. Т. 2. С. 109–112.
7. Киселев И. С. Показатель согласованности количественных предпочтений в матрице парных сравнений // Изв. Томского политехнического университета. 2011. № 5. С. 22–24.