

ГОМОМОРФНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПАР ГРУПП МАЛОГО ПОРЯДКА¹

И. А. Шилин^{*,**}, В. В. Китюков^{*}

^{*}Московский авиационный институт, г. Москва, Россия

^{**}Московский государственный гуманитарный
университет им. М. А. Шолохова, г. Москва, Россия

E-mail: ilyashilin@li.ru, atum89@gmail.ru

Для каждой пары групп порядка не выше 12 с помощью составленной авторами компьютерной программы изучается алгебраическое строение объединения образов гомоморфизмов одной группы в другую.

Ключевые слова: гомоморфная устойчивость пары групп, конечная группа.

Введение

Изучению групп гомоморфизмов отдельных групп, классов групп или алгебраических систем, а также алгебраического строения образов гомоморфизмов в последнее время уделяется много внимания. Например, оказалось, что в некоторых случаях из существования изоморфизма между группами $\text{Hom}(G, G)$ и $\text{Hom}(\tilde{G}, \tilde{G})$ следует, что группы G и $\tilde{G}$ тоже изоморфны [1]. Важные результаты о гомоморфизмах абелевых групп получены С. Я. Гриншпоном [2] и Д. Валканом [3], а для случая прямого произведения бесконечных циклических групп Дж. О'Нейлом [4]. Свойства разрешимых групп, вытекающие из строения их конечных гомоморфных образов, рассматриваются в работе [5]. Интересные результаты о конечных образах гомоморфизмов мультипликативных групп алгебр с делением содержатся в [6]. В настоящей работе рассматриваются гомоморфизмы между конечными группами G и H и объединение образов гомоморфизмов $G \rightarrow H$.

Упорядоченную пару (G, H) групп G и H назовем парой класса 1, если группа H абелева. В противном случае пару (G, H) будем называть парой класса 2. Известно, что для пар класса 1 множество $\mathfrak{H}(G, H)$ гомоморфизмов $G \rightarrow H$ относительно операции

$$\mathfrak{H}(G, H) \times \mathfrak{H}(G, H) \rightarrow H^G, (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \bullet \psi, [\varphi \bullet \psi](a) = \varphi(a)\psi(a) \quad (1)$$

является группой, а для пар класса 2 это происходит не всегда. Для пар класса 1 обозначение группы $\mathfrak{H}(G, H)$ будем заменять стандартным обозначением $\text{Hom}(G, H)$. Нейтральный элемент группы $\text{Hom}(G, H)$ будем обозначать ε ($\text{Ker } \varepsilon = G$).

Пару (G, H) назовем гомоморфно устойчивой, если множество $\bigcup_{\varphi \in \mathfrak{H}(G, H)} \text{Im } \varphi$ является подгруппой в H . Будем называть гомоморфную устойчивость сильной, если подгруппа $\bigcup_{\varphi \in \mathfrak{H}(G, H)} \text{Im } \varphi$ является нормальным делителем.

В [2] определение гомоморфной устойчивости сформулировано для пар (G, H) , в которых обе группы абелевы. Там же доказана гомоморфная устойчивость таких пар в случае периодической группы G . Это утверждение распространяется на все пары

¹Работа поддержана грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (проект № 586Р-30).

класса 1 с периодической группой G . Следовательно, все пары конечных групп класса 1 гомоморфно устойчивы.

В настоящей работе с помощью программ, составленных на языке Турбо Паскаль, для пар групп порядка не выше 12 получены следующие результаты: 1) для пар класса 1 вычислены группы $\text{Hom}(G, H)$; 2) для пар класса 1 вычислены группы $\bigcup_{\varphi \in \text{Hom}(G, H)} \text{Im } \varphi$; 3) для пар класса 2 проверено, является ли множество $\mathfrak{H}(G, H)$ группой относительно операции (1), и в случае положительного ответа эта группа вычислена; 4) для каждой пары класса 2 проверено, является ли пара гомоморфно устойчивой, и в случае положительного ответа вычислена группа $\bigcup_{\varphi \in \mathfrak{H}(G, H)} \text{Im } \varphi$. Все группы найдены с точностью до изоморфизма.

Отметим, что нетривиальные группы порядка не выше 12 суть следующие группы [7]: циклические группы $\mathbb{Z}_n$, диэдральные группы $\mathbf{D}_n$ порядка $2n$, прямые произведения $\mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^3$, $\mathbb{Z}_3^2$, $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$, кватернионная группа $\mathbb{Q}_8$ порядка 8, знакопеременная группа $\mathbf{A}_4$ и дициклическая группа

$$\mathbf{T}_{12} = \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4 = \langle a, b, c \mid a^3 = b^2 = c^2 = abc \rangle.$$

1. Группы гомоморфизмов пар класса 1

В частных случаях группы $\text{Hom}(G, H)$ легко вычисляются аналитически (например, $\text{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_{\text{gcd}(n, m)}$, где $\text{gcd}(m, n)$ — наибольший общий делитель чисел m и n). В общем случае вид групп $\text{Hom}(G, H)$ остается неизвестным.

Для вычисления группы $\text{Hom}(G, H)$ среди $|H|^{|G|}$ отображений $G \rightarrow H$ надо выбрать те, которые удовлетворяют определению гомоморфизма. Конструктивное решение задачи, позволяющее существенно сократить вычисления, заключается в предварительном отборе тех отображений, для которых выполняются необходимые условия гомоморфизмов $\varphi(e) = e$ и $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$. Элементы группы обозначаются числами, причем число 1 всегда обозначает нейтральный элемент. Группы задаются в виде двумерных массивов. Например, используя для группы $\mathbf{T}_{12}$ генетический код

$$\langle s, t \mid s^4 = t^3 = e, tst = s \rangle$$

и обозначая ее элементы $e, s, s^2, s^3, t, t^2, st, s^2t, s^3t, st^2, s^2t^2, s^3t^2$ числами 1–12 соответственно, эту группу можно описать массивом

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	4	1	7	10	8	9	5	11	12	6
3	4	1	2	8	11	9	5	7	12	6	10
4	1	2	3	9	12	5	7	8	6	10	11
5	10	8	12	6	1	2	11	4	7	3	9
6	7	11	9	1	5	10	3	12	2	8	4
7	11	9	6	10	2	3	12	1	8	4	5
8	12	5	10	11	3	4	6	2	9	1	7
9	6	7	11	12	4	1	10	3	5	2	8
10	8	12	5	2	7	11	4	6	3	9	1
11	9	6	7	3	8	12	1	10	4	5	2
12	5	10	8	4	9	6	2	11	1	7	3.

Отображения $\varphi \in H^G$ реализуются в виде меняющихся состояний переменного одномерного массива размера $|G|$, в ячейки которого записываются элементы группы G ,

причем в первую ячейку, означающую образ нейтрального элемента, всегда записывается число 1, а остальные ячейки заполняются с учетом равенства $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

Вычисляя периоды получившихся гомоморфизмов, можно прийти к выводу о группе $\text{Hom}(G, H)$. Так, в результате работы программы для пары $(\mathbf{T}_{12}, \mathbb{Z}_8)$ получаем следующие данные:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	5	7	1	1	3	5	7	3	5	7
1	5	1	5	1	1	5	1	5	5	1	5
1	7	5	3	1	1	7	5	3	7	5	3

Здесь 1, 3, 5, 7 обозначают соответственно элементы 0, 2, 4, 6 группы $\mathbb{Z}_8$. Группа $\text{Hom}(\mathbf{T}_{12}, \mathbb{Z}_8)$, таким образом, состоит из четырех элементов; обозначим эти гомоморфизмы (в той последовательности, в которой они перечислены выше) $\varepsilon, \varphi, \psi$ и σ . С точностью до изоморфизма существует две группы четвертого порядка: циклическая группа $\mathbb{Z}_4$, два элемента в которой имеют период 4, и группа $\mathbb{Z}_2^2$, периоды всех элементов которой, за исключением нейтрального, равны 2. Так как $\text{ord } 2 = \text{ord } 6 = 4$ и $\text{ord } 4 = 2$, то $\text{ord } \varphi = \text{ord } \sigma = 4$, $\text{ord } \psi = 2$, то есть $\text{Hom}(\mathbf{T}_{12}, \mathbb{Z}_8) = \mathbb{Z}_4$.

Полученные результаты содержатся в табл. 1.

Таблица 1

Группы $\text{Hom}(G, H)$

GH	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_{11}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_3$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_4$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$
$\mathbb{Z}_5$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_5$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_5$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_6$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$
@ $\mathbf{D}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_7$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_7$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$
$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^4$
$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\mathbb{Z}_2^9$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^6$
$\mathbf{D}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$
$\mathbf{Q}_8$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$
$\mathbb{Z}_9$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_3^4$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_{10}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbf{D}_5$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_{11}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_{11}$	$\{\varepsilon\}$
$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_6$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$
$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2^4\mathbb{Z}_3$
$\mathbf{A}_4$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbf{D}_6$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$
$\mathbf{T}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{\varepsilon\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$

2. Объединение образов групп гомоморфизмов пар класса 1

Информация о гомоморфизмах $G \rightarrow H$ позволяет вручную вычислить группы

$\bigcup_{\varphi \in \text{Hom}(G, H)} \text{Im } \varphi$. Сведения об этих группах содержатся в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Группы $\bigcup_{\varphi \in \text{Hom}(G, H)} \text{Im } \varphi$

GH	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_{11}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_5$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_5$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_5$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_6$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$
$\mathbf{D}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_7$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_7$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$
$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbf{D}_4$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbf{Q}_8$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_9$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Z}_3^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_{10}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbf{D}_5$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_{11}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_{11}$	$\{e\}$	$\{e\}$
$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_6$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$
$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_6$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$
$\mathbf{A}_4$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3^2$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbf{D}_6$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbf{T}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$

3. Множества гомоморфизмов пар класса 2

Алгоритм вычисления множеств $\mathfrak{H}(G, H)$ ничем не отличается от алгоритма вычисления групп $\text{Hom}(G, H)$. Проверка выполнимости аксиом группы для множеств $\mathfrak{H}(G, H)$ выполняется вручную. Получившиеся результаты содержатся в табл. 3, где для каждой пары (G, H) либо указана группа $\mathfrak{H}(G, H)$, либо отмечено, что множество $\mathfrak{H}(G, H)$ не является группой.

Т а б л и ц а 3

Множества $\mathfrak{H}(G, H)$ как группы

GH	$\mathbf{D}_3$	$\mathbf{D}_4$	$\mathbf{Q}_8$	$\mathbf{D}_5$	$\mathbf{D}_6$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{T}_{12}$
$\mathbb{Z}_2$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Z}_2^2$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbf{D}_3$	нет	$\mathbb{Z}_2$	нет	$\mathbf{D}_3$	нет	$\mathbb{Z}_6$
$\mathbb{Z}_{10}$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbf{D}_5$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_{12}$	нет	нет	$\mathbf{Q}_8$	нет	нет	нет	нет
$\mathbf{A}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	нет	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbf{T}_{12}$	нет	$\mathbf{D}_4$	$\mathbf{Q}_8$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	нет

4. Гомоморфная устойчивость пар класса 2

Полученные сведения о множествах $\mathfrak{H}(G, H)$ дают информацию о множествах $\bigcup_{\varphi \in \mathfrak{H}(G, H)} \text{Im } \varphi$. Проверка гомоморфной устойчивости выполняется вручную. В итоге получаем результаты, представленные в табл. 4, где для каждой пары (G, H) либо указана группа $\bigcup_{\varphi \in \mathfrak{H}(G, H)} \text{Im } \varphi$, либо отмечено, что это множество не является группой.

Т а б л и ц а 4
Множества $\bigcup_{\varphi \in \mathfrak{H}(G, H)} \text{Im } \varphi$ как группы

GH	$\mathbf{D}_3$	$\mathbf{D}_4$	$\mathbf{Q}_8$	$\mathbf{D}_5$	$\mathbf{D}_6$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{T}_{12}$
$\mathbb{Z}_2$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	нет	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Z}_2^2$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbf{D}_3$	нет	$\mathbb{Z}_2$	нет	$\mathbf{D}_6$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbb{Z}_6$
$\mathbb{Z}_{10}$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbf{D}_5$	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbf{D}_5$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbf{D}_5$	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbf{D}_3$	$\mathbf{D}_4$	$\mathbf{Q}_8$	нет	$\mathbf{D}_6$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{T}_{12}$
$\mathbf{A}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbb{Z}_3$
$\mathbf{T}_{12}$	$\mathbf{D}_3$	$\mathbf{D}_4$	$\mathbf{Q}_8$	нет	нет	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbf{T}_{12}$

Проверим сильную устойчивость пар из этой таблицы.

Обозначим $|G : \hat{G}|$ индекс подгруппы $\hat{G}$ группы G . Так как $|\mathbf{D}_n : \mathbb{Z}_n| = 2$, $|\mathbf{Q}_8 : \mathbb{Z}_2^2| = 2$ и $|\mathbf{T}_{12} : \mathbb{Z}_6| = 2$, то пары $(\mathbb{Z}_3, \mathbf{D}_3)$, $(\mathbf{A}_4, \mathbf{D}_3)$, $(\mathbb{Z}_2^2, \mathbf{Q}_8)$, $(\mathbb{Z}_3, \mathbf{D}_6)$, $(\mathbf{A}_4, \mathbf{D}_6)$ и $(\mathbb{Z}_6, \mathbf{T}_{12})$ сильно гомоморфно устойчивы.

Подгруппа $\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbf{U}_2 \equiv \{1, -1\}$ в группе $\mathbf{Q}_8$ является центром и, следовательно, гомоморфная устойчивость пары $(G, \mathbf{Q}_8)$ при $G \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbf{D}_5\}$ сильная.

Так как группа $\mathbf{A}_4$ является нормализатором подгруппы Клейна $\mathbb{Z}_2^2$ [8, с. 136], то последняя есть нормальный делитель в $\mathbf{A}_4$ [8, с. 131], поэтому устойчивость пар $(G, \mathbf{A}_4)$ в случае $G \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_{10}, \mathbf{D}_5, \mathbf{T}_{12}\}$ сильная.

В некоторых случаях сильную гомоморфную устойчивость целесообразно проверить с помощью компьютерных вычислений. Для этого моделируются внутренние автоморфизмы группы H и проверяется, является ли ее подгруппа $\hat{H}$ неподвижной точкой любого внутреннего автоморфизма. В работе [9] показано, что подгруппы $\mathbb{Z}_2 \simeq \{e, s^2\}$ и $\mathbb{Z}_3 \simeq \{e, t, t^2\}$ в группе $\mathbf{T}_{12}$ являются нормальными делителями, поэтому в случае $G \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_{10}, \mathbf{D}_5, \mathbf{A}_4\}$ пара $(G, \mathbf{T}_{12})$ сильно гомоморфно устойчива.

С учетом того, что несобственные подгруппы являются нормальными делителями, приходим к выводу, что для всех пар из табл. 4 гомоморфная устойчивость сильная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Себельдин А. М., Сморгалова А. Е. Определяемость абелевых групп группами гомоморфизмов и полугруппами автоморфизмов // Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 4. С. 595–601.
2. Гриншпон С. Я. Гомоморфная устойчивость абелевых групп // Фундам. и прикл. мат. 2008. Т. 14. № 5. С. 67–76.
3. Valkan D. On some homomorphisms of direct sums of modules // Proc. Razmodze Math. Inst. 2000. V. 121. P. 151–162.
4. O'Neill J. D. On homomorphisms between direct products of infinite cyclic groups // Commun. Algebra. 2000. V. 28. No. 11. P. 5047–5052.

5. Тушев А. В. О разрешимых группах, чьи конечные гомоморфные образы имеют ограниченный ранг // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 5. С. 136–139.
6. Segev Y. On finite homomorphic images of the multiplicative group of a division algebra // Ann. Math. 1999. V. 149. No. 1. P. 219–251.
7. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., et al. Atlas of Finite Groups. Oxford: University Press, 1985. 252 p.
8. Шилин И. А. Введение в алгебру. Часть первая. М.: МГСГИ, 2010. 160 с.
9. Александров А. А., Нижников А. И., Шилин И. А. Компьютерное вычисление подгрупп и нормальных делителей неабелевых групп порядка не выше 20 // Преподаватель XXI века. 2011. № 1. Ч. 2. С. 214–220.