# ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/14/5

УДК 519.17

## О МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ 1-РАСШИРЕНИЯХ СОЕДИНЕНИЙ ГРАФОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

М. Б. Абросимов

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*

**E-mail:** mic@rambler.ru

В 2001 г. была высказана гипотеза, что минимальное вершинное 1-расширение графа вида $G+G^*$, где $G$ — произвольный граф, а $G^*$ — некоторое его минимальное вершинное 1-расширение, единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид $G^*+G^*$. В работе строится два контрпримера к этой гипотезе, которые показывают, что в общем случае она неверна. Доказывается также, что для многих графов утверждение гипотезы справедливо.

**Ключевые слова:** *граф, минимальное вершинное 1-расширение, точное вершинное 1-расширение, предполный граф, оптимальная отказоустойчивая реализация.*

### Введение

*Графом* (неориентированным) называется пара $G = (V, \alpha)$, где $\alpha$ — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин $V$. Отношение $\alpha$ называется *отношением смежности.* Степенью вершины $v$ в графе $G$ будем называть количество вершин в $G$, смежных с данной, и обозначать через $\mathrm{d}(v)$. Вектор, составленный из степеней вершин графа $G$ в порядке убывания, будем называть *вектором степеней.* Здесь и далее определения даются по [1].

Подграфом графа $G = (V, \alpha)$ называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \subseteq V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$. Подграф графа $G$ называется *максимальным*, если он получается из $G$ удалением одной вершины и всех связанных с нею ребер.

*Вложением* графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, что для любых вершин $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: $(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$.

Назовем граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ *вершинным $k$-расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф $G$ вкладывается в каждый подграф графа $G^*$, получающийся удалением любых его $k$ вершин и всех связанных с ними ребер.

*Соединением* двух графов $G_1 = (V_1,\ \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2,\ \alpha_2)$, не имеющих общих вершин, называется граф $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2,\ \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1)$.

Из определения видно, что соединение графов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Граф $G_t = (V_t, \alpha_t)$ называется *тривиальным $k$-расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф $G_t$ получается из графа $G$ добавлением $k$ вершин, соединением их со всеми вершинами графа $G$ и друг с другом, то есть граф $G_t$ есть соединение графа $G$ и полного графа $K_k = (V_k, V_k \times V_k \setminus \Delta)$:

$$G_t = (V_t, \alpha_t) = (V \cup V_k, \alpha \cup (V_k \times V_k \setminus \Delta) \cup V \times V_k \cup V_k \times V).$$

Очевидно, что тривиальное $k$-расширение графа является и его вершинным $k$-расширением, причем $|V_t| = |V| + k$. В самом деле, любую вершину тривиального $k$-расширения можно заменить на одну из добавленных вершин.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным $k$-расширением* ($k$ натуральное) $n$-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) $G^*$ является вершинным $k$-расширением $G$, то есть граф $G$ вкладывается в каждый подграф графа $G^*$, получающийся удалением любых его $k$ вершин;

2) $G^*$ содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;

3) $\alpha^*$ имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Понятие минимального вершинного $k$-расширения введено на основе понятия оптимальной $k$-отказоустойчивой реализации, которое предложено Дж. П. Хейзом в работе [2] при построении модели отказоустойчивости, основанной на графах. С вычислительной точки зрения задача является сложной: в работе [3] доказывается, что соответствующая задача распознавания является NP-полной. В общем случае граф может иметь много минимальных вершинных $k$-расширений. Введем частичную операцию получения минимального вершинного 1-расширения графа, считая ее неопределенной для графов, которые имеют более одного минимального вершинного 1-расширения.

Пусть $G$ — некоторый граф, а $G^*$ — его минимальное вершинное 1-расширение. Обозначим через $(G)^*$ результат операции получения минимального вершинного 1-расширения графа $G$. Тогда если граф $G$ имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение, то $(G)^* = G^*$. В противном случае результат операции получения минимального вершинного 1-расширения считается неопределенным для графа $G$.

Вершина называется *полной*, если она смежна со всеми остальными вершинами графа. Граф называется *предполным*, если у него есть хотя бы одна полная вершина. Граф, все вершины которого полные, называется *полным* и обозначается $K_n$. Граф с пустым отношением смежности называется *вполне несвязным* и обозначается $O_n$. Предполный граф можно записать в виде $K_1 + G$ или $O_1 + G$. Класс предполных графов является достаточно большим: $n$-вершинных предполных графов столько же, сколько всего неизоморфных $(n-1)$-вершинных графов. Интересны эти графы тем, что в работе [4] удалось найти полное аналитическое решение задачи описания всех минимальных вершинных $k$-расширений предполных графов. Приведем один из результатов этой работы для случая $k = 1$.

**Теорема 1.** Относительно предполных графов справедливы следующие утверждения.

1. При четном $n$ любой $n$-вершинный предполный граф $K_1 + G$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение — тривиальное, то есть $(K_1 + G)^* = K_1 + (K_1 + G) = K_2 + G$.

2. При нечетном $n$:

а) При $n \leqslant 3$ существует один и только один $n$-вершинный предполный граф $G_{np1}$, для которого тривиальное расширение не является минимальным. Граф $G_{np1}$ может быть представлен в виде $O_1 + O_2 + ... + O_2$. При этом граф $G_{np1}$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение, и оно содержит $n - 1$ дополнительных ребер: $(O_1 + O_2 + ... + O_2)^* = O_2 + O_2 + ... + O_2$.

б) При $n \leqslant 5$ существует один и только один $n$-вершинный предполный граф $G_{np2}$, имеющий два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения: вида $O_2 + O_2 +$

$+ ... + O_2$ и тривиальное $O_1 + G_{np2}$. Граф $G_{np2}$ получается из графа $G_{np1}$ удалением любого ребра, соединяющего две вершины степени $n-2$.

в) Любой $n$-вершинный предполный граф $G$, не изоморфный $G_{np1}$ и $G_{np2}$, имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение — тривиальное: $(K_1 + G)^* = K_1 + (K_1 + G) = K_2 + G$.

Минимальный по числу вершин граф вида $G_{np1}$ при $n = 3$ представляет собой 3-вершинную цепь $O_1 + O_2$, а его минимальное вершинное 1-расширение — 4-вершинный цикл $O_2 + O_2$ (рис. 1). Минимальный по числу вершин граф вида $G_{np2}$ при $n = 5$ и два его минимальных вершинных 1-расширения изображены на рис. 2.

Рис. 1. Цепь $P_3$ и ее единственное минимальное вершинное 1-расширение — цикл $C_4$

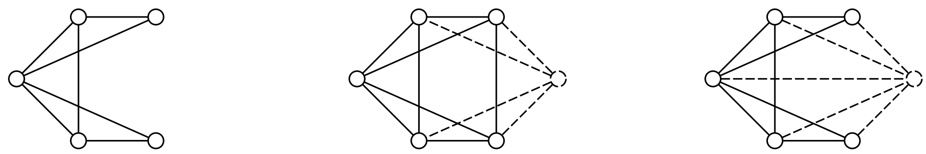

Рис. 2. Граф $G_{5p2}$ и два его минимальных вершинных 1-расширения

Этот результат можно переформулировать следующим образом: почти все графы вида $K_r + G$, где $r \in N$, а $G$ — произвольный граф, имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение, которое имеет вид $K_{r+1} + G$. Заметим, что $K_{r+1}$ является минимальным вершинным 1-расширением графа $K_r$. Таким образом, для графа, представляющего собой соединение полного графа с произвольным графом, можно указать все минимальные вершинные 1-расширения. Возможна ли подобная ситуация для соединений еще каких-либо графов? Сформулируем этот вопрос в виде задачи.

**Задача.** Даны два графа $G_1$ и $G_2$ и их минимальные вершинные $k$-расширения. Найти все минимальные вершинные $k$-расширения графа $G_1 + G_2$.

В общем случае решение задачи получить не удается, и результат для предполных графов пока является наилучшим. Рассмотрим еще несколько частных случаев, когда поставленная задача имеет решение.

Далее нас будут интересовать минимальные вершинные 1-расширения графов вида $G + G^*$ и $G + G^* + ... + G^* = G + (G^*)^m$, где $G^*$ — минимальное вершинное 1-расширение графа $G$.

## 1. Соединение графа с его точным вершинным 1-расширением

*Дополнением* графа $G = (V, \alpha)$ называется граф $G' = (V, \alpha')$, где $\alpha' = (V \times V)/(\alpha \cup \cup \Delta)$. Будем говорить, что граф $G$ обладает свойством *дополнительности 1-расши-*

*рения*, если дополнение хотя бы одного его минимального вершинного 1-расширения является минимальным вершинным 1-расширением дополнения графа $G$.

Граф $H$ называется *точным вершинным $k$-расширением* графа $G$, если любой граф, получающийся удалением произвольных $k$ вершин графа $H$, изоморфен графу $G$. Понятие точного вершинного $k$-расширения было введено Ф. Харари и Дж. П. Хейзом в работе [5]. В работе [6] доказывается, что минимальное вершинное 1-расширение графа тогда и только тогда является его точным вершинным 1-расширением, когда граф обладает свойством дополнительности 1-расширения. Более того, если число вершин графа больше 1, то точное вершинное 1-расширение является единственным минимальным вершинным 1-расширением. Там же доказывается, что среди однородных графов свойством дополнительности 1-расширения обладают только полные и вполне несвязные графы. Для остальных графов результат формулируется следующим образом.

**Теорема 2.** Для того чтобы граф $G$ обладал свойством дополнительности 1-расширения, необходимо и достаточно, чтобы граф $G$ имел степенное множество вида $\{b, b-1\}$, причем число вершин степени $b-1$ в точности равнялось $b$, а его минимальное вершинное 1-расширение было однородным графом порядка $b$. При этом и граф $G$, и его дополнение имеют единственные с точностью до изоморфизма минимальные вершинные 1-расширения.

**Теорема 3.** Единственное минимальное вершинное 1-расширение графа $K_n + (K_n)^*$ имеет вид $(K_n)^* + (K_n)^*$, причем

$$(K_n + (K_n)^*)^* = (K_n + K_{n+1})^* = (K_{2n+1})^* = K_{2n+2} = K_{n+1} + K_{n+1} = (K_n)^* + (K_n)^*.$$

***Доказательство.*** Граф $K_{n+1}$ является по теореме 1 единственным минимальным вершинным 1-расширением графа $K_n$ и $K_n + K_m = K_{n+m}$, таким образом, все преобразования в формулировке теоремы корректны. ■

**Теорема 4.** Единственное минимальное вершинное 1-расширение графа $O_n + (O_n)^*$ имеет вид $O_n^* + (O_n)^*$, причем

$$(O_n + (O_n)^*)^* = (O_n + O_{n+1})^* = (O_{2n+1})^* = O_{2n+2} = O_{n+1} + O_{n+1} = O_n^* + O_n^*.$$

***Доказательство.*** Заметим, что граф $O_{n+1}$ является точным вершинным 1-расширением графа $O_n$, а следовательно, граф $O_{n+1}$ является единственным минимальным вершинным 1-расширением графа $O_n$. Таким образом, все преобразования в условии теоремы корректны. ■

*Цепью* $P_n$ называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i-j| = 1\}$, а *циклом* $C_n$ — граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i-j| = 1\} \cup \{(v_1, v_n), (v_n, v_1)\}$. Легко убедиться (см. [2]), что цикл $C_{n+1}$ является минимальным вершинным 1-расширением цепи $P_n$.

**Теорема 5.** Единственное минимальное вершинное 1-расширение графа $P_n + P_n^*$ имеет вид $P_n^* + P_n^*$, причем $(P_n + P_n^*)^* = (P_n + C_{n+1})^* = C_{n+1} + C_{n+1} = P_n^* + P_n^*$.

***Доказательство.*** Аналогично предыдущей теореме, цикл $C_{n+1}$ является точным вершинным 1-расширением цепи $P_n$, а следовательно, граф $C_{n+1}$ является единственным минимальным вершинным 1-расширением графа $P_n$, и все преобразования в условии теоремы корректны. ■

Теоремы 3–5 подсказывают более общее утверждение.

**Теорема 6.** Пусть $G$ — граф, обладающий свойством дополнительности 1-расширения, а $G^*$ — его точное вершинное 1-расширение. Тогда граф $G_+ = G + G^* + ... + G^* = G + (G^*)^m$ также обладает свойством дополнительности 1-расширения, причем его точное вершинное 1-расширение имеет вид $G_+^* = G^* + G^* + ... + G^* = (G^*)^{m+1}$:

$$(G + G^* + ... + G^*)^* = G^* + G^* + ... + G^*.$$

***Доказательство.*** Пусть $n$-вершинный граф $G$ обладает свойством дополнительности 1-расширения, $G^*$ — его точное вершинное 1-расширение, а граф $G_+$ получается соединением графа $G$ и $m$ графов $G^*$.

Заметим, что максимальный подграф графа $G_+^* = G^* + G^* + ... + G^*$ есть граф $G_+ = G + G^* + ... + G^*$, поэтому граф $G_+^*$ является точным вершинным 1-расширением графа $G_+$, а следовательно, и единственным его минимальным вершинным 1-расширением, что доказывает корректность формулы в условии теоремы. ■

Следующий результат, являющийся усилением предыдущей теоремы, связывает операции соединения и дополнения с конструкцией минимального вершинного 1-расширения.

**Теорема 7.** Граф $G_+ = G + G^* + ... + G^* = G + (G^*)^m$, где $G$ — произвольный граф, а $G^*$ — его минимальное вершинное 1-расширение, тогда и только тогда обладает свойством дополнительности 1-расширения, когда граф $G^*$ является точным вершинным 1-расширением графа $G$. При этом граф $G_+^* = G^* + G^* + ... + G^* = (G^*)^{m+1}$ является точным вершинным 1-расширением графа $G_+$.

***Доказательство.*** Необходимость. Пусть $G$ — $n$-вершинный граф, $G^*$ — его минимальное вершинное 1-расширение, а граф $G_+ = G + G^* + ... + G^* = G + (G^*)^m$ обладает свойством дополнительности 1-расширения.

Введем обозначения: $a = \max\limits_{v \in V(G)} \mathrm{d}(v)$, $b = \min\limits_{v \in V(G)} \mathrm{d}(v)$;
аналогично для графа $G^*$: $a^* = \max\limits_{v \in V(G^*)} \mathrm{d}(v)$, $b^* = \min\limits_{v \in V(G^*)} \mathrm{d}(v)$.

Очевидно, что $a \leqslant a^*$ и $b \leqslant b^*$.

Определим наибольшие и наименьшие степени вершин в графе $G_+$.

Вершины, имеющие в графе $G$ степени $a$ и $b$, в графе $G_+$ будут иметь степени $a + m(n+1) = a + mn + m$ и $b + m(n+1) = b + mn + m$ соответственно.

Вершины, имеющие в графе $G^*$ степени $a^*$ и $b^*$, в графе $G_+$ будут иметь степени $a^* + (m-1)(n+1) + n = a^* + mn + m - 1$ и $b^* + (m-1)(n+1) + n = b^* + mn + m - 1$.

По условию граф $G_+$ обладает свойством дополнительности 1-расширения, тогда, как было указано выше, либо граф $G_+$ является однородным и в этом случае он является вполне несвязным или полным и

$$\min\{a + mn + m, a^* + mn + m - 1\} = \max\{b + mn + m, b^* + mn + m - 1\},$$

то есть $\min\{a, a^* - 1\} = \max\{b, b^* - 1\}$, либо он попадает под действие теоремы 2:

$$\min\{a + mn + m, a^* + mn + m - 1\} = \max\{b + mn + m, b^* + mn + m - 1\} - 1,$$

или

$$\min\{a, a^* - 1\} = \max\{b, b^* - 1\} - 1. \tag{1}$$

Рассмотрим четыре случая.

1) $a = a^*,\ b = b^*$. Тогда из соотношения (1) получаем $a = a^* = b = b^*$, что возможно лишь тогда, когда $G$ и $G^*$ являются вполне несвязными графами, то есть $G^*$ является точным вершинным 1-расширением графа $G$.

2) $a = a^*,\ b < b^*$. Из соотношения (1) получаем $a-1 = b^*-2 > b-2$, откуда $a > b-1$, что возможно лишь при $a = b$. Поскольку $a = a^*$, то граф $G$ содержит изолированные вершины, значит, $a = b = 0$ и граф $G$ является вполне несвязным. Однако минимальное вершинное 1-расширение вполне несвязного графа является также вполне несвязным графом, то есть $a^* = b^* = 0$, что противоречит условию $a = a^*$, $b < b^*$. Следовательно, случая 2 быть не может.

3) $a < a^*,\ b = b^*$. Из (1) получаем, что $a = b - 1$. Далее $a^* > a = b - 1 = b^* - 1$, но поскольку $a^* \leqslant b^*$, то $a^* = b^*$. Таким образом, $a + 1 = b = a^* = b^*$.

Обозначим через $n_1, n_2$ число вершин степеней $a$, $b$ графа $G$ соответственно. Очевидно, что граф $G_+$ имеет степенное множество $\{a + mn + m, b + mn + m\}$, причем число вершин степени $a + mn + m$ равно $n_1 + (n + 1)m$, а число вершин степени $b+mn+m$ равно $n_2$. По предположению граф $G_+$ обладает свойством дополнительности 1-расширения, причем его степенное множество имеет вид $\{a+mn+m, b+mn+m\}$, где $a + mn + m = b + mn + m - 1$. По теореме 2 число вершин степени $a + mn + m$ должно быть в точности равно $b+mn+m$, то есть $n_1 + (n+1)m = b+mn+m$, откуда $n_1 = b$.

Таким образом, граф $G$ имеет степенное множество вида $\{b - 1, b\}$, число вершин степени $b - 1$ в точности равно $b$, и его минимальное вершинное 1-расширение — граф $G^*$ — является однородным графом порядка $b$. По теореме 2 граф $G$ обладает свойством дополнительности 1-расширения, а граф $G^*$ является его точным вершинным 1-расширением.

4) $a < a^*,\ b < b^*$. Этот случай возможен лишь тогда, когда $G$ и $G^*$ являются полными графами.

Таким образом, в каждом из возможных случаев 1, 3 и 4 граф $G^*$ является точным вершинным 1-расширением графа $G$, что доказывает необходимость. Достаточность следует из теоремы 6. ∎

## 2. Соединение графа с его минимальным вершинным 1-расширением

На основании предыдущих рассуждений представляется разумным высказать предположение (см. [7]).

**Гипотеза 1.** Пусть $G$ — произвольный граф, а $G^*$ — некоторое его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда граф вида $G + G^*$ всегда имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение, и оно может быть представлено в виде $G^* + G^*$, то есть

$$(G + G^*)^* = G^* + G^*.$$

Однако оказалось, что ситуация является более сложной, и удалось найти два контрпримера к этой гипотезе.

Обозначим однородный $n$-вершинный граф порядка $p$ через $R_{n,p}$. В работе [4] доказывается, что при четном $n$ существует единственный с точностью до изоморфизма однородный граф $R_{n,n-2}$, причем он имеет вид $O_2 + \ldots + O_2$, а его единственным минимальным вершинным 1-расширением является тривиальное 1-расширение.

**Теорема 8.** Пусть $G$ — граф вида $R_{n,n-2}$, а $G^*$ — его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда минимальное вершинное 1-расширение графа $G+G^*$ единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид $R_{2n+2,2n}$.

***Доказательство.*** Как было отмечено, граф $R_{n,n-2}$ имеет вид $O_2 + ... + O_2$, а его минимальное вершинное 1-расширение $G^*$ можно записать как $G^* = K_1 + O_2 + ... + O_2$.

Таким образом, граф $G + G^*$ имеет вид

$$G + G^* = (O_2 + ... + O_2) + (K_1 + O_2 + ... + O_2) = K_1 + O_2 + ... + O_2$$

и является графом вида $G_{np1}$. По теореме 1 получаем требуемое утверждение. ■

**Теорема 9.** Пусть $G$ — предполный граф вида $G_{np2}$, а $G^*$ — его минимальное вершинное 1-расширение вида $O_2 + ... + O_2$. Тогда граф $G + G^*$ имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения, одно из которых имеет вид $G^* + G^*$, а второе — $O_2 + ... + O_2$.

***Доказательство.*** По теореме 1 граф $G_{np2}$ имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения: тривиальное 1-расширение и расширение вида $O_2 + ... + O_2$. Если рассматривать первое минимальное вершинное 1-расширение, то утверждение гипотезы, как несложно заметить, справедливо. Рассмотрим соединение графа $G_{np2}$ со вторым его минимальным вершинным 1-расширением $O_2 + ... + O_2$.

Легко увидеть, что это соединение снова является предполным графом вида $G_{(2n+2)p2}$ и, следовательно, по теореме 1 имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения. ■

Таким образом, в общем виде гипотеза 1 является ошибочной. Однако для большого числа графов ее утверждение является справедливым, что в дополнении к предыдущим теоремам показывает и следующая

**Теорема 10.** Пусть $G$ — граф, неизоморфный графу вида $R_{n,n-2}$, а его тривиальное 1-расширение $G^*$ является и его минимальным вершинным 1-расширением. Тогда минимальное вершинное 1-расширение графа $G + G^*$ единственно с точностью до изоморфизма и имеет вид $G^* + G^*$, то есть $(G + G^*)^* = G^* + G^*$.

***Доказательство.*** Так как $G^*$ является тривиальным 1-расширением графа $G$, то $G^* = K_1 + G$ и в $G^*$ есть хотя бы одна полная вершина. Граф $G + G^* = G + (K_1 + G) = K_1 + (G + G)$ также является предполным. По теореме 1 если граф $G + G^*$ не является графом вида $G_{np1}$ или $G_{np2}$, то он имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение, которым является его тривиальное 1-расширение, то есть получаем утверждение теоремы. В самом деле, тривиальное 1-расширение графа $G + G^*$ можно записать так: $K_1 + (G + G^*) = (K_1 + G) + G^* = G^* + G^*$.

Вспомним, что граф вида $G_{np1}$ — это граф вида $K_1 + O_2 + ... + O_2$, и поэтому нужно исключить графы $G$ вида $R_{n,n-2}$.

Граф вида $G_{np2}$ — это граф вида $K_1 + (O_2 + ... + O_2 - e)$, где $e$ — некоторое ребро. В нашем случае граф $G + G^*$ не может быть изоморфен графу $G_{np2}$, так как, исключив из рассмотрения полную вершину, нужно подобрать граф $G$ таким образом, чтобы выполнялось $G + G = O_2 + ... + O_2 - e$, что невозможно. ■

Много ли графов попадает под действие этой теоремы? Как показывает следующее утверждение, это почти все предполные графы, но и кроме них многие графы имеют минимальное вершинное 1-расширение, которым является их тривиальное 1-расширение. Так, например, по материалам работы [8] из 1043 7-вершинных графов 405 имеют минимальным вершинным 1-расширением тривиальное 1-расширение. Для 6-вершинных — 65 из 155; для 5-вершинных — 10 из 33.

**Следствие 1.** Пусть $G$ — произвольный предполный граф не вида $G_{np2}$, а $G^*$ — его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда граф $G + G^*$ имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение, и оно может быть представлено в виде $G^*+G^*$, то есть $(G+G^*)^* = G^* + G^*$.

***Доказательство.*** По теореме 1 все предполные графы, кроме графов вида $G_{np1}$ и $G_{np2}$, имеют минимальным вершинным 1-расширением тривиальное 1-расширение и, таким образом, попадают под условие теоремы 10. Остается рассмотреть предполные графы вида $G_{np1}$. По теореме 1 минимальное вершинное 1-расширение графа вида $G_{np1}$ является точным вершинным 1-расширением, и по теореме 6 получаем требуемое утверждение. ■

## Заключение

Удалось показать, что гипотеза о том, что граф вида $G+G^*$, где $G$ — произвольный граф, а $G^*$ — некоторое его минимальное вершинное 1-расширение, имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение вида $G^* + G^*$, в целом является ложной: такой граф может иметь и более одного минимального вершинного 1-расширения или одно, но иного вида. Тем не менее доказывается, что для многих графов утверждение гипотезы является справедливым.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
2. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
3. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
4. *Абросимов М. Б.* Минимальные $k$-расширения предполных графов // Изв. вузов. Математика. 2003. № 6(493). С. 3–11.
5. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
6. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения дополнений графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 4. С. 11–19.
7. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения графов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 2001. 16 с.
8. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения 4-, 5-, 6- и 7-вершинных графов. Саратов: СГУ, 2000. 26 с. Деп. в ВИНИТИ 06.09.2000, № 2352 В00.