

КРАТНОСТИ СУММ В ЯВНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ПОДСЧЁТА ЦИКЛОВ ФИКСИРОВАННОЙ ДЛИНЫ В НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

А. Н. Воропаев

Петрозаводский государственный университет, г. Петрозаводск, Россия

E-mail: voropaev@psu.karelia.ru

Явные формулы для подсчёта циклов длиной k представляют собой комбинации сумм, соответствующих формам замкнутых маршрутов длиной k . Ранее было показано, что наибольшая кратность суммы в формуле равна $\lfloor k/2 \rfloor$, начиная с $k = 8$. В данной работе исследуется вопрос, каких значений могут достигать кратности сумм для частных семейств графов: двудольных, без треугольников, планарных, с ограниченными степенями вершин, а также их пересечений. Оказалось, что при больших значениях k только для двудольных графов и для графов со степенями вершин не более трёх наибольшая кратность суммы уменьшается на 1, если $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$. В случае $k \leq 20$ возникает ряд исключений, когда для некоторых семейств графов наибольшая кратность уменьшается на 1 или 2.

Ключевые слова: подсчёт циклов в графах, формы замкнутых маршрутов, призматические графы.

Введение

Количество циклов заданной длины — важная числовая характеристика структуры графа. Например, одно из отличительных свойств реальных сетей, называемое кластеризацией, состоит в том, что вершины, имеющие общую смежную вершину, часто сами оказываются смежны. Мерой этого свойства служит коэффициент кластеризации $C = 3c_3/p_3 \in [0; 1]$, где c_3 и p_3 — числа циклов и цепей с тремя вершинами [1, 2]. Двудольные графы, для которых всегда $C = 0$, характеризуют двудольным коэффициентом кластеризации, вычисляемым по формуле $C_b = 4c_4/p_4$.

Более полную информацию о сети даёт статистика циклов по длинам. Однако всю статистику находить крайне затруднительно, поэтому обычно ограничиваются подсчётом коротких циклов. Например, авторы [1] вывели формулы для степени баланса знакового графа, основанные на подсчёте циклов длиной 3 и 4. В [3] числа циклов длиной 3, 4 и 5 используются при исследовании схем городских улиц. С помощью статистики коротких циклов можно оценивать качество кодов с низкой плотностью проверок на чётность [4].

Вычислительная сложность подсчёта циклов заданной длины малоизучена. Известно, что задача подсчёта гамильтоновых циклов является $\#P$ -полной [5], причём остаётся таковой даже в случае планарных регулярных графов степени три [6]. В рамках теории параметрической сложности авторы [7] показали, что задача подсчёта циклов длиной k в произвольном графе $\#W[1]$ -полна, когда параметром является длина цикла k . Другими словами, не существует $f(k) \cdot n^{\text{const}}$ -алгоритма решения этой задачи, где n — порядок графа. При этом, очевидно, перебор всех циклов длиной k в графах со степенями вершин не более фиксированного значения d можно осуществлять со сложностью $O((d-1)^k \cdot n)$.

Результат [7] означает, что порядок сложности подсчёта циклов длиной k в произвольных графах неизбежно растёт вместе с k , но не даёт информации о характере этого роста. В литературе не встречаются и оценки сложности данной задачи в случае частных семейств графов. Многие известные универсальные алгоритмы — для произвольных графов и произвольных значений длины цикла — характеризуются сложностью $O(n^k)$ или $O(n^{k-1})$ (при фиксированном k), что сопоставимо с ростом самого количества циклов длиной k . Ряд таких методов перечислен в [8].

Среди универсальных алгоритмов подсчёта циклов длиной k наиболее эффективны явные формулы, известные для небольших значений длины [8–11]. При $k \leq 7$ вычисления по этим формулам выполняются с тем же порядком сложности, что умножение $n \times n$ -матриц (n — порядок графа) [12]. Начиная с $k = 8$, вычислительная сложность явных выражений оценивается величиной $O(n^{\lfloor k/2 \rfloor})$ [8, 11], которая связана с появлением $\lfloor k/2 \rfloor$ -кратных сумм. Сами формулы выведены до значения $k = 13$ [8].

Способ вывода явных выражений [8] интересен также и тем, что позволяет легко учитывать некоторые структурные свойства графов при выводе формул. В результате получаются более компактные и, возможно, более эффективные выражения. Например, учёт двудольности в случаях $k = 8, 10, 14$ уменьшает порядок сложности на 1, а при подсчёте циклов длиной не более удвоенного обхвата в двудольных графах наиболее трудоёмкой операцией является умножение матриц [11, 13].

В данной работе исследуется зависимость наибольшей кратности суммы в явных формулах от длины цикла k для нескольких частных семейств графов. Рассматриваются множества двудольных графов, графов без треугольников, планарных графов, графов со степенями вершин не более 3 и их различные пересечения (12 семейств).

В п. 2 представлена структура явных выражений на примере случая $k = 7$, в п. 3 приведены правила упрощения сумм (уменьшения их кратностей). Именно в рамках этих правил в п. 4 выполняются оценки наибольших кратностей сумм. В большинстве случаев верхняя оценка равна $\lfloor k/2 \rfloor$, как для произвольных графов. Только для двудольных графов и для графов со степенями вершин не более 3 оценка снижается на 1 при $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$.

В п. 5 приводятся параметрические семейства форм для значений $k \geq 16$, на которых достигаются оценки, выведенные в п. 4. Для меньших значений k в п. 6 указаны отдельные примеры «тяжёлых» форм — таких, которые приводят к суммам наибольшей кратности. При $10 \leq k \leq 20$ возникают 15 исключений, когда наибольшие кратности сумм отклоняются от общих закономерностей на 1 или 2 в меньшую сторону. Все эти случаи отмечены в Приложении А, которое содержит таблицы со значениями наибольшей кратности и количеством сумм наибольшей кратности. В Приложении Б приводится список всех 18 «тяжёлых» форм для $k = 8, 9, 10, 11$.

1. Основные определения

В работе используется в основном терминология [14] и рассматриваются неориентированные конечные графы без петель и кратных рёбер.

Маршрутом длиной k называется упорядоченный набор $(v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ вершин графа, такой, что вершины v_i и v_{i+1} смежны. Цепь — это маршрут, в котором все вершины различны, а цикл есть маршрут длиной не менее 3, в котором все вершины, исключая последнюю, различны, а последняя вершина совпадает с первой. При подсчёте циклы, отличающиеся только выбором начальной вершины или направления обхода вершин, рассматриваются как один.

Гомоморфизм графа $G_1 = (V_1; E_1)$ на граф $G_2 = (V_2; E_2)$ — это сюръективное отображение $f : V_1 \rightarrow V_2$, такое, что $E_2 = \{\{f(u), f(v)\} : \{u, v\} \in E_1\}$. Другими словами, граф G_2 получается из G_1 путём ряда отождествлений пар несмежных вершин. Сам граф G_2 называют гомоморфным образом G_1 .

В п. 2–4 и 7 символ n закреплён за количеством вершин (порядком) графа, в котором подсчитываются циклы. Граф, состоящий из одного простого цикла с k вершинами, обозначается символом C_k , а из одной простой цепи с k вершинами — P_k .

Для записи элементов матрицы смежности графа будем использовать обозначение a_{ij} , а для элементов её l -х степеней — обозначение $a_{ij}^{(l)}$. Диагональ квадрата матрицы смежности состоит из степеней вершин графа, поэтому вместо $a_{ii}^{(2)}$ обычно применяется символ d_i .

2. Структура формул

Сопоставим с маршрутом подграф, состоящий из вершин и рёбер, по которым проходит маршрут. Например, циклу длиной k соответствует подграф, изоморфный C_k , а замкнутому маршруту чётной длины k , проходящему по единственному ребру, — подграф, изоморфный P_2 . При этом один и тот же подграф может соответствовать нескольким маршрутам. Так, для каждого подграфа, изоморфного C_k , существует $2k$ циклов длиной k , а для всякого подграфа, изоморфного P_2 , — только два замкнутых маршрута чётной длины k . Отвлекаясь от обозначений вершин, будем говорить о графе, соответствующем маршруту, как о форме этого маршрута. На рис. 1 изображены всевозможные формы замкнутых маршрутов длиной 7. Номера вершинам графов H_1 , H_5 и H_6 приписаны в целях составления сумм, рассматриваемых ниже.

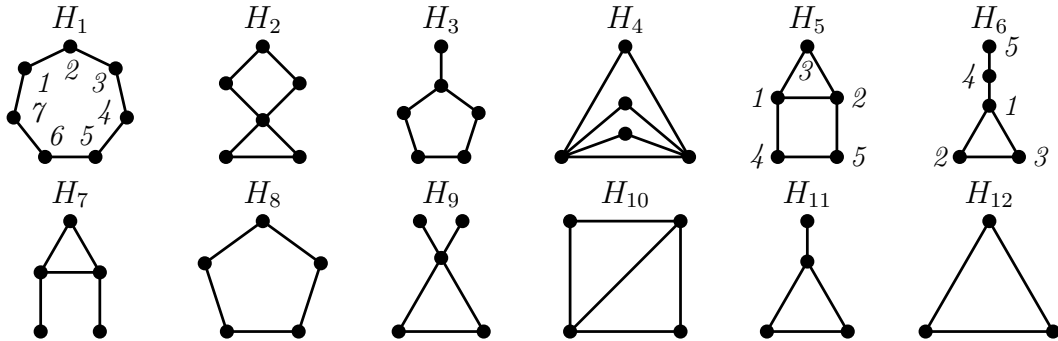


Рис. 1. Всевозможные формы замкнутых маршрутов длиной 7

Каждая форма замкнутых маршрутов длиной k является гомоморфным образом цикла C_k и наоборот. Гомоморфные образы самих форм для заданного значения k также являются формами замкнутых маршрутов длиной k .

Для подсчёта подграфов, изоморфных форме $G = (\{1, \dots, l\}; E)$, удобно воспользоваться суммой

$$\alpha(G) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_l=1}^n \prod_{\{u,v\} \in E} a_{i_u i_v}. \quad (1)$$

Количество индексов, по которым выполняется суммирование, будем называть кратностью суммы. В (1) каждый индекс соответствует вершине формы, а каждый множитель — элемент матрицы смежности — ребру формы. Например, формам H_1 и H_5

(рис. 1) соответствуют суммы

$$\begin{aligned}\alpha(H_1) &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_7=1}^n a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_7 i_1} = \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 i_1}^{(7)}, \\ \alpha(H_5) &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_5=1}^n a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_3} a_{i_3 i_2} a_{i_1 i_4} a_{i_4 i_5} a_{i_5 i_2} = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1 i_2} \left(\sum_{i_3=1}^n a_{i_1 i_3} a_{i_3 i_2} \right) \left(\sum_{i_4=1}^n \sum_{i_5=1}^n a_{i_1 i_4} a_{i_4 i_5} a_{i_5 i_2} \right) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2}^{(2)} a_{i_1 i_2}^{(3)}.\end{aligned}$$

Сама по себе величина $\alpha(G)$ не равна количеству подграфов, изоморфных G , так как за счёт совпадения значений индексов в сумму вносят вклад и формы меньшего порядка. Например, при вычислении суммы $\alpha(H_8)$ учитываются подграфы, изоморфные как форме H_8 , так и формам H_{11} и H_{12} . Кроме того, один и тот же подграф может встречаться несколько раз. Так, в сумме $\alpha(C_k)$ каждый цикл учитывается $2k$ раз, по числу способов выбора начальной вершины и направления обхода вершин.

Обозначим символом $\beta(G)$ количество подграфов, изоморфных G . Располагая совокупностью сумм $\alpha(G)$, можно составить треугольную систему линейных уравнений с неотрицательными целыми коэффициентами для величин $\beta(G)$:

$$\alpha(G) = \sum_H \gamma_G(H) \beta(H).$$

Здесь G пробегает множество всех гомоморфных образов цикла C_k ; H пробегает множество всех гомоморфных образов графа G ; $\gamma_G(H)$ равно числу гомоморфизмов графа G на граф H . Решение этой системы даёт выражения величин $\beta(G)$ в виде комбинаций сумм $\alpha(H)$ с рациональными коэффициентами. Например, для количества циклов длиной 7, равного $\beta(C_7)$, получается следующая формула:

$$\begin{aligned}c_7 &= \frac{1}{14} \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(7)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(-a_{ii}^{(4)} a_{ii}^{(3)} - a_{ii}^{(5)} d_i + a_{ii}^{(5)} + 2 a_{ii}^{(3)} d_i^2 - 11 a_{ii}^{(3)} d_i + 8 a_{ii}^{(3)} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\left(a_{ij}^{(2)} \right)^3 a_{ij} + 3 a_{ij}^{(3)} a_{ij}^{(2)} a_{ij} + a_{ij}^{(2)} a_{ii}^{(3)} + a_{ij}^{(2)} a_{ij} d_i d_j - 4 \left(a_{ij}^{(2)} \right)^2 a_{ij} \right).\end{aligned}\quad (2)$$

Соотношения, подобные (2), в которых количество циклов напрямую представлено через элементы матрицы смежности и вспомогательных матриц (например, степеней матрицы смежности), будем называть явными формулами. Структура явных формул и их вывод подробно обсуждаются в [8].

3. Уменьшение кратностей сумм

В исходном виде сумма (1) имеет кратность, равную порядку формы l . Однако за счёт использования вспомогательных матриц (например, степеней матрицы смежности, как в (2)) и векторов кратность суммы может быть уменьшена. Если какой-либо индекс h встречается в парах ровно с одним другим индексом i , то суммирование по h можно выполнить отдельно и сохранить результат в векторе (v_i) для дальнейших расчётов. Аналогично исключается индекс h , встречающийся в парах с двумя другими индексами i и j . Тогда возникает матрица (b_{ij}) . Например, для формы H_6 (рис. 1) можно выполнить следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\alpha(H_6) &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_5=1}^n a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} a_{i_3 i_1} a_{i_1 i_4} a_{i_4 i_5} = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} a_{i_3 i_1} \right) \left(\sum_{i_4=1}^n \sum_{i_5=1}^n a_{i_1 i_4} a_{i_4 i_5} \right) = \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 i_1}^{(3)} v_{i_1}, \quad \text{где } v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(2)}.\end{aligned}$$

Если достигнута кратность три, то каждый индекс заведомо встречается в парах не более чем с двумя другими индексами, и возможно дальнейшее уменьшение кратности. При условии $k \leq 7$ кратности всех сумм, входящих в формулу для подсчёта циклов длиной k , понижаются до значений менее трёх, как, например, в (2). Наиболее трудоёмкой операцией при этом оказывается умножение матриц.

Начиная со значения $k = 8$, появляются суммы кратностью более трёх, в которых каждый индекс встречается в парах более чем с двумя другими индексами. К таким суммам описанные выше правила понижения кратности неприменимы. В результате сложность вычисления всего выражения для количества циклов определяется наибольшей кратностью суммы, входящей в него. Например, в формуле для подсчёта циклов длиной 8 участвует четырёхкратная сумма, соответствующая форме K_4 (это единственная «тяжёлая» сумма во всём выражении).

4. Верхние оценки кратностей сумм

Правила понижения кратности суммы, представленные выше, применимы, пока остаётся хотя бы один индекс, встречающийся в парах не более чем с двумя другими индексами. Очевидно, что в результате каждого применения данных правил число «парных» индексов для всякого индекса не увеличивается. Следовательно, кратность суммы после упрощения не превосходит количества индексов исходной суммы (1), каждый из которых встречается в парах не менее чем с тремя другими индексами. Иными словами, кратность суммы $\alpha(G)$ после упрощения оценивается числом вершин формы G со степенями не менее трёх. Оценим число таких вершин.

Утверждение 1. Пусть G — форма замкнутых маршрутов длиной k . Тогда количество вершин формы G со степенями не менее трёх не превосходит $[k/2]$.

Доказательство. Обозначим I множество всех вершин формы G , а $I' \subset I$ — множество всех вершин со степенями не менее трёх. Поскольку форма G является образом цикла C_k при некотором гомоморфизме f , то каждая вершина $i \in I'$ имеет по крайней мере два прообраза в C_k при f . Следовательно,

$$k = \sum_{i \in I} |f^{-1}(i)| \geq \sum_{i \in I'} |f^{-1}(i)| \geq 2 |I'|, \quad (3)$$

откуда $|I'| \leq [k/2]$. ■

Замечание 1. На основе соотношения (3) можно сделать вывод о структуре формы, содержащей $[k/2]$ вершин степени не менее трёх. При чётном k такая форма имеет $k/2$ вершин, и их степени равны 3 или 4. Если же k нечётно, то возможны два варианта:

- 1) $[k/2]$ вершин степени 3 или 4 и одна вершина степени 1 или 2;
- 2) $([k/2] - 1)$ вершин степени 3 или 4 и одна вершина степени 3, 4, 5 или 6.

Оценка, сформулированная в утверждении 1, встречается в [8, 11]. В [8] также приводится класс форм, которым соответствуют $[k/2]$ -кратные суммы, начиная с $k = 8$. Данная работа посвящена изучению наибольших кратностей сумм, соответствующих формам с определёнными свойствами: двудольным, без треугольников, планарным, со степенями вершин не более трёх. Оказывается, что для перечисленных множеств форм, а также их пересечений достигаются почти те же значения кратности, что и в общем случае. Только для двудольных графов и для графов со степенями вершин не более трёх оценка снижается на 1 при $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$.

Утверждение 2. Пусть G — двудольная форма замкнутых маршрутов длины k . Тогда количество вершин формы G со степенями не менее трёх не превосходит $2[k/4]$.

Доказательство. При $k \equiv 0 \pmod{4}$ значение $2[k/4]$ совпадает с общей оценкой $[k/2]$. Покажем, что в случае $k \equiv 2 \pmod{4}$ всякая форма H с $k/2$ вершинами степени не менее трёх недвудольна.

Согласно замечанию 1 и соотношению (3), каждая вершина формы H является образом ровно двух вершин графа C_k при гомоморфизме f . Следовательно, множество вершин C_k можно разбить на пары $\{i, j\}$, такие, что $f(i) = f(j)$. Пусть вершины цикла C_k пронумерованы числами от 1 по k в некотором направлении обхода.

В силу $k \equiv 2 \pmod{4}$ множество $\{1, \dots, k\}$ содержит нечётное количество чётных чисел и нечётное количество нечётных чисел. Это означает, что в любом разбиении этого множества на пары обязательно найдётся пара чисел разной чётности. Но тогда в форме H существует замкнутый маршрут нечётной длины и, следовательно, нечётный цикл. По теореме Кёнига заключаем, что форма H недвудольна.

Таким образом, при $k \equiv 2 \pmod{4}$ форма G содержит не более $k/2 - 1$ вершин степени не менее трёх. ■

Утверждение 3. Пусть G — форма замкнутых маршрутов длиной k , вершины которой имеют степени два или три. Тогда количество вершин формы G степени три не превосходит $2[k/4]$.

Доказательство. Когда $k \equiv 0, 1 \pmod{4}$, значение $2[k/4]$ совпадает с общей оценкой $[k/2]$. Рассмотрим случай $k \equiv 2 \pmod{4}$. Предположим, что форма G содержит $k/2$ вершин степени три. В силу замечания 1 форма G является кубическим графом. При этом число вершин формы нечётно, что противоречит лемме о рукопожатиях. Следовательно, форма G содержит не более $k/2 - 1$ вершин степени три.

В случае $k \equiv 3 \pmod{4}$ форма G также не может содержать $[k/2]$ вершин степени три. Иначе, согласно условию данного утверждения и замечанию 1, сумма степеней всех вершин снова оказалась бы нечётной. ■

Замечание 2. В условии утверждения 3 исключены формы с висячими вершинами. Среди них можно отыскать формы, имеющие $[k/2]$ вершин степени три при $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Например, одной из форм замкнутых маршрутов длиной 11 является граф, изображённый на рис. 2.

Однако для всех таких форм кратности соответствующих сумм заведомо уменьшаются до значения менее $[k/2]$. Индексы, соответствующие висячей вершине и смежной с ней вершине (в примере — 6 и 5), в совокупности встречаются в парах только с двумя другими индексами. Следовательно, оба этих индекса можно исключить, используя

вспомогательную матрицу с элементами $b_{ij} = \sum a_{ik} d_k a_{kj}$. Так, для формы, указанной на рис. 2, получаем сумму

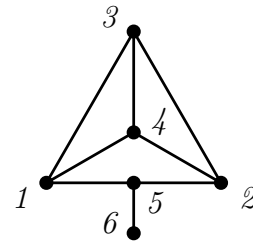


Рис. 2. Форма замкнутых маршрутов длиной 11, содержащая 5 вершин степени 3

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_6=1}^n \left(a_{i_1 i_5} a_{i_5 i_6} a_{i_5 i_2} \right) a_{i_2 i_3} a_{i_3 i_1} a_{i_1 i_4} a_{i_2 i_4} a_{i_3 i_4} = \\ & = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n b_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} a_{i_3 i_1} a_{i_1 i_4} a_{i_2 i_4} a_{i_3 i_4}. \end{aligned}$$

Далее приводятся параметрические классы форм и отдельные формы, на которых достигаются установленные выше верхние оценки (за исключением нескольких случаев). При этом, в отличие от примера из замечания 2, в соответствующих суммах не исключается ни один индекс, «смежный», по крайней мере, с тремя другими индексами. Таким образом, представленные ниже примеры форм обеспечивают наибольшие кратности сумм в выражениях для подсчёта циклов; такие формы будем называть «тяжёлыми».

Частные «тяжёлые» формы для значений $k \leq 20$ (см. Приложение А, табл. 1 и 2) были найдены в ходе анализа списков всех форм, сгенерированных в системе компьютерной алгебры [15]. Параметрические семейства построены путём «экстраполяции» ряда частных форм. Далее обоснуем, что предъявленные графы являются формами замкнутых маршрутов определённой длины.

5. Примеры «тяжёлых» форм для значений $k \geq 16$

Начиная со значения длины 16, удобно определить параметрические классы «тяжёлых» форм, одновременно обладающие многими свойствами. Под свойствами подразумеваются двудольность, отсутствие треугольников, планарность, ограниченность степеней вершин значением три. Само число 16 — это наименьшее значение длины, для которого существует форма, обеспечивающая наибольшую возможную кратность суммы $[k/2]$ и обладающая всеми перечисленными свойствами (см. табл. 1). Кроме того, при $k > 16$ возникают всего два исключения, когда наибольшие кратности оказываются меньше верхних оценок.

Основу примеров составляют призматические графы (рис. 3).

Определение 1. Призматическим графом называется граф $C_n \times P_2$, $n \geq 3$.

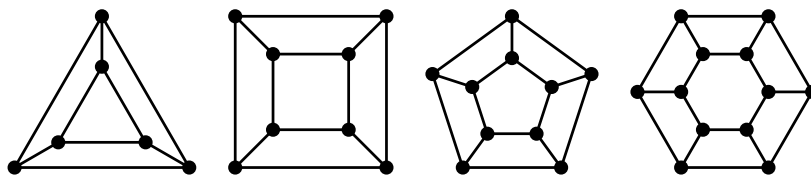


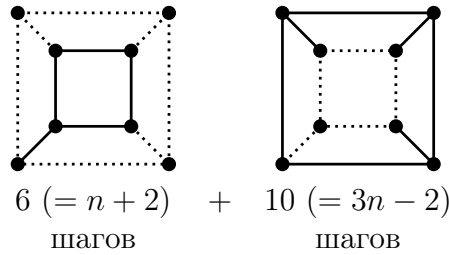
Рис. 3. Примеры призматических графов

Призматический граф является планарным регулярным графом степени 3, а при чётном значении n также двудольным. При $n > 3$ граф $C_n \times P_2$ не содержит треугольников. Именно наличие данных свойств в совокупности и простота структуры призматических графов послужили причиной их выбора в качестве примеров «тяжёлых» форм.

Утверждение 4. Призматический граф $C_n \times P_2$ является формой замкнутых маршрутов длиной $4n$.

Доказательство. Укажем пример замкнутого маршрута длиной $4n$, проходящего по всем рёбрам призматического графа. Из какой-либо вершины «внешнего» цикла можно попасть во «внутренний» цикл и, обойдя его, вернуться в исходную вершину (рис. 4). Затем остаётся пройти по «внешнему» циклу, включая рёбра, которые соединяют его с «внутренним» циклом. В результате на $2n$ рёбер обоих циклов затрачивается по одному шагу, а на остальные n рёбер — по два. Следовательно, длина маршрута в точности равна $4n$. ■

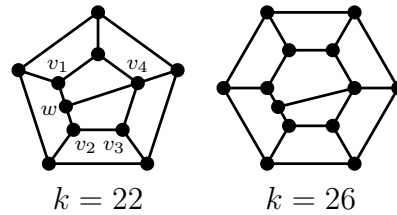
Призматические графы образуют бесконечную последовательность «тяжёлых» форм, но лишь для значений длины маршрута $k \equiv 0 \pmod{4}$, без соблюдения двудоль-

Рис. 4. Построение замкнутого маршрута в призматическом графе $C_4 \times P_2$

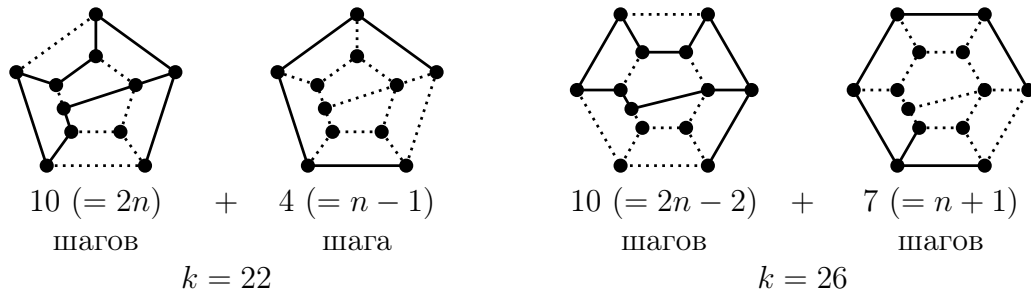
ности, и $k \equiv 0 \pmod{8}$, с соблюдением двудольности. Путём незначительной модификации призматических графов можно получить примеры «тяжёлых» форм для остальных случаев. Утверждения 5 и 6, а также их доказательства сформулированы в терминах плоского изображения призматического графа, как на рис. 3.

В следующем утверждении указан класс «тяжёлых» форм замкнутых маршрутов длиной $k \equiv 2 \pmod{4}$, $k \geq 22$. Формы из этого класса не двудольны и имеют по одной вершине степени четыре, но они планарны и не содержат треугольников.

Утверждение 5. Пусть $G = C_n \times P_2$, $n \geq 5$, а (v_1, v_2, v_3, v_4) — цепочка во «внутреннем» цикле графа G (рис. 5). Тогда граф, получаемый из G удалением ребра $\{v_1, v_2\}$ и добавлением вершины w и рёбер $\{v_1, w\}$, $\{w, v_2\}$, $\{w, v_4\}$, является формой замкнутых маршрутов длиной $4n + 2$.

Рис. 5. Примеры «тяжёлых» форм без треугольников для случая $k \equiv 2 \pmod{4}$

Доказательство. На рис. 6 показана структура одного из замкнутых маршрутов длиной $4n + 2$ в построенном графе. Начальные участки маршрутов длиной $n + 3$ соответствуют обходу «внутреннего» цикла (рис. 4) и здесь не приводятся. ■

Рис. 6. Построение замкнутых маршрутов в «тяжёлых» формах без треугольников (случай $k \equiv 2 \pmod{4}$)

В утверждении 6 определён класс «тяжёлых» двудольных форм замкнутых маршрутов длиной $k \equiv 4 \pmod{8}$, $k \geq 28$. Формы из этого класса планарны и являются регу-

лярными графами степени три. Благодаря последнему свойству, построенные графы также служат примерами «тяжёлых» форм со степенями вершин не более трёх.

Утверждение 6. Пусть $G = C_n \times P_2$, $n \geq 6$, $\{u_1, v_1\}$ и $\{u_2, v_2\}$ — два «параллельных» ребра «внутреннего» цикла графа G , а u'_1, v'_1, u'_2, v'_2 — вершины «внешнего» цикла, смежные с вершинами u_1, v_1, u_2, v_2 соответственно (как на рис. 7). Тогда граф, получаемый из G

- 1) удалением рёбер $\{u_1, v_1\}$, $\{u_2, v_2\}$ и добавлением вершин u_3, v_3 и рёбер $\{u_3, v_3\}$, $\{u_1, u_3\}$, $\{u_3, u_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_3, v_2\}$ в случае $n \equiv 2 \pmod{4}$;
- 2) удалением рёбер $\{u_1, v_1\}$, $\{u_2, v_2\}$, $\{u'_1, v'_1\}$, $\{u'_2, v'_2\}$ и добавлением вершин w_1, w_2 и рёбер $\{w_1, w_2\}$, $\{u_1, w_1\}$, $\{v_1, w_1\}$, $\{u_2, w_2\}$, $\{v_2, w_2\}$ в случае $n \equiv 0 \pmod{4}$,

является формой замкнутых маршрутов длиной $4n + 4$.

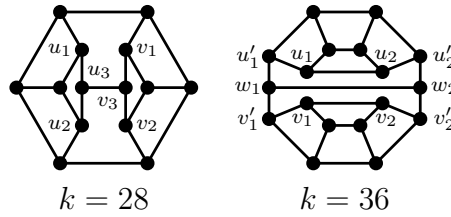


Рис. 7. Примеры «тяжёлых» двудольных форм для случая $k \equiv 4 \pmod{8}$

Доказательство. В первом случае маршрут можно составить как для призматического графа (рис. 4). При этом на обход «внутренней» части затрачивается на четыре шага больше (рис. 8). В итоге длина всего маршрута равна $4n + 4$. Пример маршрута для второго случая указан на рис. 8. ■

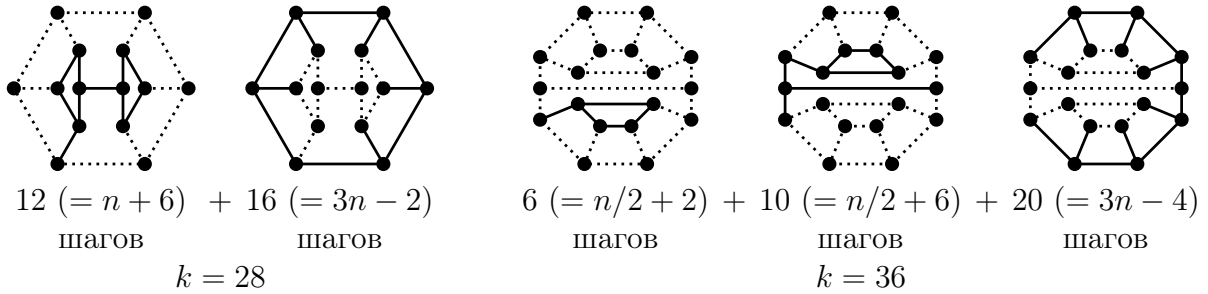


Рис. 8. Построение замкнутых маршрутов в «тяжёлых» двудольных формах (случай $k \equiv 4 \pmod{8}$)

Обе формы, изображённые на рис. 7, выходят за рамки сгенерированных наборов форм [15] и были найдены с помощью программы **geng** из пакета **nauty** [16].

При увеличении $k \equiv 0, 2 \pmod{4}$ на 1 значение оценки $\lfloor k/2 \rfloor$ не изменяется, как и значение оценки $2\lfloor k/4 \rfloor$ при увеличении $k \equiv 0, 4 \pmod{8}$ на 2. Данные соотношения и утверждение 7 позволяют получить примеры «тяжёлых» форм для случаев $k \equiv 1, 3 \pmod{4}$, без соблюдения двудольности, и $k \equiv 2, 6 \pmod{8}$, с соблюдением двудольности, из перечисленных выше графов (призматических и их модификаций).

Утверждение 7.

- 1) Форма замкнутых маршрутов длиной k является также формой замкнутых маршрутов длиной $k + 2$.

- 2) Пусть граф G является формой замкнутых маршрутов длиной k , $\{u, v\}$ — ребро этого графа. Тогда граф, получаемый из G удалением ребра $\{u, v\}$ и добавлением вершины w и рёбер $\{u, w\}$, $\{w, v\}$ (другими словами, ребро $\{u, v\}$ «разбивается» на два ребра), есть форма замкнутых маршрутов длиной $k + 1$.

Доказательство. В первом случае маршрут можно «удлинить» на два шага, пройдя, например, по какому-либо ребру, инцидентному начальной вершине маршрута. Во втором случае новый маршрут получается заменой участка (u, v) или (v, u) в старом маршруте на участок (u, w, v) или (v, w, u) соответственно. ■

Утверждения 4–7 в совокупности обеспечивают примеры «тяжёлых» планарных форм без треугольников, начиная с $k = 16$, кроме 18 и 19; примеры «тяжёлых» планарных двудольных форм со степенями вершин не более трёх, начиная с $k = 16$, кроме 20 и 22; примеры «тяжёлых» планарных форм без треугольников со степенями вершин не более трёх, начиная с $k = 16$. Данные формы также являются «тяжёлыми» в более широких семействах форм. В первом случае — вплоть до множества всех форм, во втором случае — вплоть до множества всех двудольных форм, а в третьем случае — вплоть до множества всех форм со степенями вершин не более трёх.

Путём вычислительных экспериментов, выполненных в рамках данной работы, установлено, что при $k = 18$ нет «тяжёлых» форм, которые и планарны, и не содержат треугольников. Примеры планарной формы и формы без треугольников изображены на рис. 9. В случае $k = 19$ существует единственная «тяжёлая» форма, которая планарна и не содержит треугольников (рис. 9). Похожая ситуация сложилась со значениями $k = 20, 22$ для «тяжёлых» двудольных форм. При $k = 20$ существуют единственная планарная форма, но она содержит вершину степени четыре, и формы со степенями вершин не более трёх, но они непланарны (рис. 9). Если же $k = 22$, то среди «тяжёлых» двудольных форм можно отыскать планарные формы со степенями вершин не более трёх. Пример одной из них представлен на рис. 9.

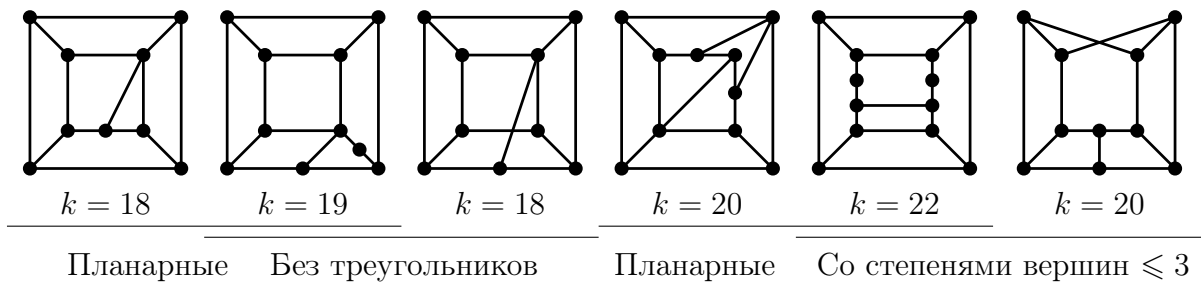


Рис. 9. Примеры «тяжёлых» форм ($k = 18, 19$) и «тяжёлых» двудольных форм ($k = 20, 22$) с разными свойствами

6. Примеры «тяжёлых» форм для значений $k < 16$

При небольших значениях k возникает ряд исключений, когда наибольшие кратности сумм оказываются меньше по сравнению с общими закономерностями. Все такие исключения отмечены в табл. 1 (Приложение А). Два из них уже рассмотрены в предыдущем пункте. Приложение Б содержит списки всех «тяжёлых» форм для значений $k = 8, 9, 10, 11$.

Рассмотрим оставшиеся случаи $k = 12, 13, 14, 15$. С учётом утверждения 7, для заданного набора свойств (строки табл. 1 и 2) и значения кратности достаточно указать форму маршрута наименьшей длины, на которой достигается эта кратность. Так, од-

ной из «тяжёлых» форм со степенями вершин не более трёх при $k = 12$ является призматический граф $C_3 \times P_2$ (см. рис. 3). Поскольку для следующих трёх значений длины (13, 14 и 15) достигается та же наибольшая кратность суммы, утверждение 7 позволяет «экстраполировать» данный пример на эти случаи.

Тот же граф $C_3 \times P_2$ является «тяжёлой» планарной формой для $k = 12$. В случае $k = 14$ достигается кратность на 1 больше. Соответствующий пример указан на рис. 10. «Тяжёлые» планарные формы автоматически являются «тяжёлыми» среди всех форм, так как приводят к суммам той же наибольшей кратности $[k/2]$.

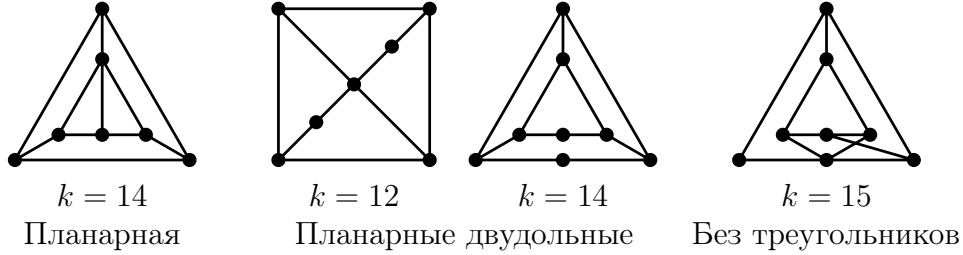


Рис. 10. Примеры «тяжёлых» форм для разных наборов свойств

Среди форм без условия планарности кратность 6 обеспечивает, например, граф $K_{3,3}$. В некоторых случаях это единственная «тяжёлая» форма (табл. 2).

К пятикратной и шестикратной суммам ($k = 12, 14$, с условием планарности) приводят двудольные формы, изображённые на рис. 10. В случае $k = 12$ указанная форма является единственной «тяжёлой» как среди планарных двудольных форм, так и среди планарных форм без треугольников.

Наконец, при $k = 15$ семикратную сумму даёт единственная форма без треугольников (рис. 10).

7. Сложность вычисления значений сумм

Наибольшая кратность суммы является важным, но не абсолютным «показателем» вычислительной сложности формулы. Так, буквальное вычисление суммы

$$\alpha(K_4) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{ik} a_{il} a_{jk} a_{jl} a_{kl} \quad (4)$$

действительно требует времени $O(n^4)$. Принимая во внимание природу множителей, составляющих общий член в (4), данную сумму можно упростить:

$$\alpha(K_4) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in I_i} \sum_{k \in I_i} \sum_{l \in I_i} a_{jk} a_{jl} a_{kl}. \quad (5)$$

Символом I_i в выражении (5) обозначено множество номеров всех вершин, смежных с вершиной, имеющей номер i . Вычислительные затраты на создание списков смежности, причём однократное, пренебрежимо малы на фоне матричных операций.

В виде (5) сумма $\alpha(K_4)$ по-прежнему характеризуется сложностью $O(n^4)$ применительно к случаю произвольных графов. Если же известно, что степени всех вершин ограничены значением d , то оценка становится $O(d^3 \cdot n)$. При достаточно малом значении d может оказаться целесообразным аналогичное преобразование всех сумм (1), входящих в формулу для подсчёта циклов. Эффективность такого подхода затруднительно обсуждать без проведения вычислительных экспериментов.

Авторы [12] заметили, что внутренняя двойная сумма в (5) представляет собой элемент куба подматрицы A_i матрицы смежности, образованной пересечением строк и столбцов с номерами из множества I_i :

$$\alpha(K_4) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{|I_i|} (A_i^3)_{jj}.$$

Вычисление суммы в таком виде имеет сложность $O(n \cdot r(n))$, где $r(n)$ — сложность умножения $n \times n$ -матриц. Однако данная оценка не сильно отличается от $O(n^4)$ и, тем более, не ясно, насколько практически эффективен указанный приём (экспериментальные результаты в литературе не встречаются).

В случае планарных графов расчёт суммы $\alpha(K_4)$ можно заменить перечислением всех подграфов, изоморфных графу K_4 , которое выполняется со сложностью $O(n)$ [17]. Значение самой суммы в 24 раза больше найденного количества подграфов.

Два последних приёма (использование подматриц и учёт планарности) известны только для суммы $\alpha(K_4)$, самой простой из «тяжёлых». Представляет интерес их обобщение и экспериментальное исследование.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Наибольшие кратности сумм

В табл. 1 и 2 пустые клетки соответствуют трём случаям: наиболее трудоёмкой операцией является умножение матриц; графы двудольны, а длина цикла нечётна; множество форм не сгенерировано (по причине больших вычислительных затрат). Курсивом выделены исключения, когда наибольшие кратности сумм меньше значений, получаемых по формулам, указанным в последнем столбце.

Т а б л и ц а 1

Наибольшая кратность суммы в формулах для подсчёта циклов длиной k

Типы графов	k													
	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	≥ 10
Все или планарные	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8				$[k/2]$
Степ. ≤ 3 (все или план.)	4	4	4	4	6	6	6	6	8	8				$2[k/4]$
Без треугольников			4	4	6	6	6	7	8	8	9	9		$[k/2]$
Без треуг., план.			4	4	5	5	6	6	8	8	8	9		$[k/2]$
Без треуг., степ. ≤ 3			4	4	6	6	6	6	8	8	8	8		$2[k/4]$
Без треуг., план., степ. ≤ 3			4	4	4	4	6	6	8	8	8	8		$2[k/4]$
Двуд. (все или ст. ≤ 3)			4		6		6		8		8		10	$2[k/4]$
Двуд., план.			4		5		6		8		8		10	$2[k/4]$
Двуд., план., степ. ≤ 3			4		4		6		8		8		8	$2[k/4]$

Таблица 2

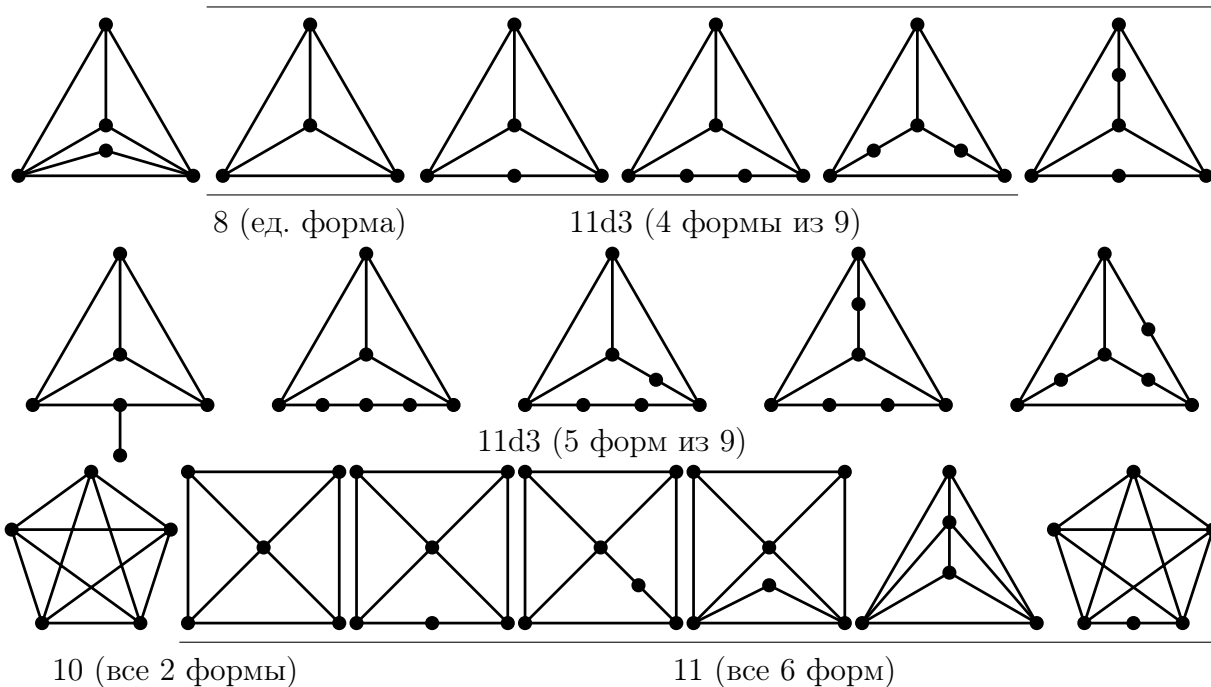
Количество сумм наибольшей кратности в формулах для подсчёта
циклов длиной k

Типы графов	k												
	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Все	1	3	2	6	6	27	14	119	63	712			
Планарные	1	3	1	5	4	19	7	66	28	316			
Со степенями ≤ 3	1	2	5	9	2	4	16	40	5	18			
План., степ. ≤ 3	1	2	5	9	1	3	11	30	3	11			
Без треугольников			1	2	1	1	13	1	5	17	6	71	
Без треуг., план.			1	2	1	4	3	17	1	1	29	1	
Без треуг., степ. ≤ 3			1	2	1	1	7	18	2	5	32	126	
Без треуг., план., степ. ≤ 3			1	2	9	16	2	8	1	1	12	51	
Двудольные			1		1		8		4		60		16
Двуд., план.			1		1		2		1		14		1
Двуд., степ. ≤ 3			1		1		3		1		6		2
Двуд., план., степ. ≤ 3			1		5		1		1		4		37

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Списки «тяжёлых» форм для $k = 8, 9, 10, 11$

Суффикс «d3» указывает на множество форм со степенями вершин не более трёх.
9 (все 3 формы) 10d3 (все 5 форм)



ЛИТЕРАТУРА

1. Harary F. and Kommel H. J. Matrix measures for transitivity and balance // J. Math. Sociol. 1979. V. 6. No. 2. P. 199–210.
2. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks // SIAM Rev. 2003. V. 45. No. 2. P. 167–256.
3. Cardillo A., Scellato S., Latora V., and Porta S. Structural properties of planar graphs of urban street patterns // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. No. 6. P. 066107(8).

4. *Halford T. R. and Chugg K. M.* An algorithm for counting short cycles in bipartite graphs // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. No. 1. P. 287–292.
5. *Valiant L. G.* The complexity of enumeration and reliability problems // SIAM J. Comput. 1979. V. 8. No. 3. P. 410–421.
6. *Liśkiewicz M., Ogihara M., and Toda S.* The complexity of counting self-avoiding walks in subgraphs of two-dimensional grids and hypercubes // Theor. Comput. Sci. 2003. V. 304. No. 1–3. P. 129–156.
7. *Flum J. and Grohe M.* The parameterized complexity of counting problems // SIAM J. Comput. 2004. V. 33. No. 4. P. 892–922.
8. *Воропаев А. Н.* Вывод явных формул для подсчёта циклов фиксированной длины в неориентированных графах // Информационные процессы. 2011. Т. 11. № 1. С. 90–113.
9. *Harary F. and Manvel B.* On the number of cycles in a graph // Matematický časopis. 1971. V. 21. No. 1. P. 55–63.
10. *Chang Y. C. and Fu H. L.* The number of 6-cycles in a graph // The Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications. 2003. V. 39. P. 27–30.
11. *Perepechko S. N. and Voropaev A. N.* The number of fixed length cycles in an undirected graph. Explicit formulae in case of small lengths // Int. Conf. “Mathematical Modeling and Computational Physics” (MMCP’2009). Dubna: JINR, 2009. P. 148–149.
12. *Alon N., Yuster R., and Zwick U.* Finding and counting given length cycles // Algorithmica. 1997. V. 17. No. 3. P. 209–223.
13. *Воропаев А. Н.* Учёт обхвата при подсчёте коротких циклов в двудольных графах // Информационные процессы. 2011. Т. 11. № 2. С. 225–252.
14. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 301 с.
15. flowproblem.ru/cycles/explicit-formulae/ck-graphs — Ck-graphs: FlowProblem. 2011.
16. cs.anu.edu.au/~bdm/nauty — The nauty page. 2011.
17. *Papadimitriou C. H. and Yannakakis M.* The clique problem for planar graphs // Inform. Processing Lett. 1981. V. 13. No. 4, 5. P. 131–133.