

**КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ СВЯЗНОСТНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ¹**

А. А. Кочкаров*, Л. И. Сенникова**

* *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия,*** *Ставропольский институт управления, г. Ставрополь, Россия***E-mail:** akochkar@gmail.com, s-ludhen@yandex.ru

Работа посвящена исследованию связностных характеристик предфрактальных графов. Получены достижимые оценки для числа точек сочленения и числа мостов предфрактального графа. Свойство самоподобия определяет получение прогнозируемых диапазонов количественных оценок для перечисленных связностных характеристик.

Ключевые слова: самоподобные графы, фрактальные (предфрактальные) графы, сетевые системы, точки сочленения, мосты.

Введение

Развитие глобальных сетей (информационных, социальных, технических) и накопление за последние десятилетия эмпирического материала спровоцировали новый виток изучения сложных многоэлементных сетевых систем [1, 2] и предопределили появление так называемой «сетевой науки» (Network Science) [1].

Если формализовать структуру сетевой системы в виде графа [3], то изменения, происходящие в ее структуре, могут быть описаны простейшими теоретико-графовыми операциями: стягивание ребра, удаление (добавление) ребра, удаление (добавление) вершины. Изменения структуры системы могут быть разовыми, а могут быть постоянными. Для второго случая принято использовать понятие *структурной динамики* [4]. Несомненно, для описания структурной динамики лучше всего подходит аппарат теории графов.

Одним из наиболее распространенных сценариев структурной динамики является *рост структуры*. Рост структуры — это регулярное появление новых элементов и связей в структуре системы. Рост структуры может происходить по строго сформулированным правилам, не исключая наличия в них фактора случайности.

Исследование структурной динамики как модели изменчивости связей многоэлементных сетевых систем представляется актуальной задачей.

В работе рассматривается одно из возможных правил, задающих структурную динамику сложных многоэлементных сетевых систем. Формальным представлением изменения структур сетевых систем по этому правилу являются масштабно-инвариантные, или самоподобные [5], графы большой размерности, называемые *фрактальными (предфрактальными)* [6]. Правила порождения предфрактального графа позволяют прогнозировать его качественные и количественные характеристики, а также оценивать изменение этих характеристик в процессе роста структуры сетевой системы. Доказанные в работе теоремы устанавливают зависимость характеристик всего

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00786-а.

предфрактального графа от характеристик его самой меньшей несамоподобной части — затравки, что позволяет оценить диапазон изменения важных характеристик, относящихся к структурной стойкости сетевых систем [7].

1. Фрактальные и предфрактальные графы

Фрактальные графы [8] используются для моделирования структур, растущих по одним и тем же правилам независимо от точки роста. Не исключается множественный одновременный рост во всей структуре системы. Формальным отражением этих правил является операция *замены вершины затравкой* (ЗВЗ) [8], она же лежит в основе определения фрактальных графов.

Термином «затравка» условимся называть какой-либо связный граф $H = (W, Q)$. Суть операции ЗВЗ заключается в следующем. В данном графе $G = (V, E)$ у намеченной для замещения вершины $\tilde{v} \in V$ выделяется множество $\tilde{V} = \{\tilde{v}_j : j = 1, 2, \dots, |\tilde{V}|\}$ смежных ей вершин. Далее из графа G удаляется вершина $\tilde{v}$ и все инцидентные ей ребра. Затем каждая вершина $\tilde{v}_j \in \tilde{V}$, $j = 1, 2, \dots, |\tilde{V}|$, соединяется ребром с одной из вершин затравки $H = (W, Q)$. Вершины соединяются произвольно (случайным образом) или по определенному правилу при необходимости.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L — множество вершин графа; E_L — множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = 1, 2, \dots, L - 1$ графе $G_l = (V_l, E_l)$ каждую его вершину затравкой $H = (W, Q)$. На этапе $l = 1$ предфрактальному графу соответствует затравка $G_1 = H$. Об описанном процессе говорят, что *предфрактальный граф G_L порожден затравкой H* . Процесс порождения предфрактального графа G_L по существу есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1, G_2, \dots, G_l, \dots, G_L$, называемой *траекторией*. Фрактальный граф $G = (V, E)$, порожденный затравкой H , определяется бесконечной траекторией. Ранг L фактически определяет «возраст» (число этапов порождения) и размер (число вершин) предфрактального графа.

Для предфрактального графа G_L ребра, появившиеся на l -м, $l \in \{1, 2, \dots, L\}$, этапе порождения, будем называть *ребрами ранга l* . *Новыми ребрами* предфрактального графа G_L назовем ребра ранга L , а все остальные ребра назовем *старыми*.

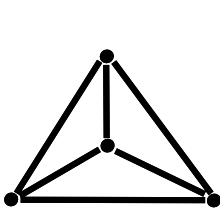
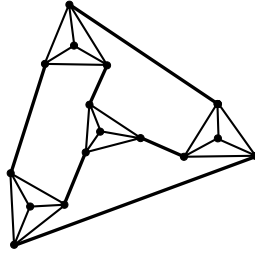
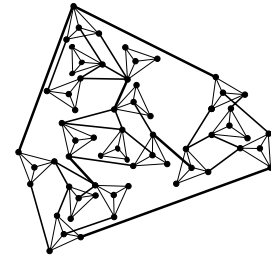
Если из предфрактального графа G_L , порожденного n -вершинной затравкой H , последовательно удалить все старые ребра (ребра ранга l , $l = 1, 2, \dots, L - 1$), то исходный граф распадется на множество связных компонент $\{B_L^{(1)}\}$, каждая из которых изоморфна затравке H . Компоненты $B_L^{(1)}$ будем называть *блоками первого ранга*. Аналогично при удалении из предфрактального графа G_L всех старых ребер рангов $l = 1, 2, \dots, L - 2$ получим множество блоков $\{B_L^{(2)}\}$ *второго ранга*. Обобщая, скажем, что при удалении из предфрактального графа G_L всех ребер рангов $l = 1, 2, \dots, L - r$ получим множество $\{B_{L,i}^{(r)}\}$, $r \in \{1, 2, \dots, L - 1\}$, блоков r -го ранга, где $i = 1, 2, \dots, n^{L-r}$ — порядковый номер блока. Блоки $B_L^{(1)}$ первого ранга будем называть также *подграф-затравками H* предфрактального графа G_L . Очевидно, что всякий блок $B_L^{(r)} = (U_L^{(r)}, M_L^{(r)})$, $r \in \{1, 2, \dots, L - 1\}$, является предфрактальным графом $B_r = (U_r, M_r)$, порожденным затравкой H .

Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа G_L является случай, когда вместо единственной затравки H используется множество затравок $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_T\}$, $T \geq 2$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина замещается некоторой затравкой $H_t \in \mathcal{H}$,

которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры.

Термином *подграф-затравка* $z_s^{(l)}$ будем называть блок $B_{l,s}^{(1)}$, $s = 1, \dots, n^{l-1}$, первого ранга предфрактального графа G_l , $l = 1, \dots, L$, из траектории. Подграф-затравки $z_s^{(l)}$ графов $G_1, G_2, \dots, G_L$ из траектории предфрактального графа G_L объединим в множество $Z(G_L) = \{z_s^{(l)} : l = 1, \dots, L, s = 1, \dots, n^{l-1}\}$. В траектории переход от графа G_{l-1} к G_l осуществляется $|V_{l-1}| = n^{l-1}$ операциями ЗВЗ, поэтому общее число использованных затравок в порождении предфрактального графа G_L равно $1 + n + n^2 + \dots + n^{L-1} = (n^L - 1)/(n - 1)$. Тогда мощность множества всех подграф-затравок из траектории графа G_L также равна $|Z(G_L)| = (n^L - 1)/(n - 1)$.

На рис. 1–3 показана траектория G_1, G_2, G_3 предфрактального графа $G_3 = (V_3, E_3)$, порожденного затравкой $H = (W, Q)$ — полным 4-вершинным графом (рис. 1). Самыми «жирными» линиями на представленных рисунках изображены ребра подграф-затравки $z_1^{(1)}$. Линиями средней «жирности» (рис. 2) нарисованы ребра подграф-затравок $z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, z_3^{(2)}$ и $z_4^{(2)}$. И наконец, тонкими линиями (рис. 3) нарисованы новые ребра предфрактального графа G_3 , которые образуют подграф-затравки $z_s^{(3)}$, $s = 1, \dots, 16$.

Рис. 1. $H = (W, Q)$ Рис. 2. $G_2 = (V_2, E_2)$ Рис. 3. $G_3 = (V_3, E_3)$

2. Оценка числа точек сочленения предфрактального графа

Число точек сочленения графа $H = (W, Q)$ обозначим через $m(H)$.

Теорема 1. Для всякого предфрактального графа G_L , порожденного n -вершинной затравкой H с сохранением смежности старых ребер одного ранга, справедливы верхняя и нижняя оценки числа точек сочленения

$$m(H)n^{L-1} \leq m(G_L) \leq m(H)n^{L-1} + |Z(G_L)|,$$

где $Z(G_L)$ — множество всех подграф-затравок предфрактального графа G_L .

Доказательство. Рассмотрим траекторию предфрактального графа G_L , порожденного затравкой H , имеющей $m(H)$ точек сочленения. Точкой пересечения старых ребер одного ранга будем называть вершину, в которой сохраняется их смежность. На втором этапе порождения все точки пересечения старых ребер (первого ранга) могут совпасть с точками сочленения затравок и в этом случае $m(G_2) = m(H)n$, где n — число затравок графа G_2 . При выполнении условий теоремы меньше чем $m(H)n$ точек сочленения быть не может. В случае же несовпадения всех точек пересечения старых ребер с точками сочленения затравок число точек сочленения графа G_2 определяется равенством $m(G_2) = m(H)n + n$, поскольку каждая точка пересечения старых ребер является точкой сочленения графа G_2 . При произвольном размещении смежных старых ребер число точек сочленения графа G_2 ограничивается неравенствами $m(H)n \leq m(G_2) \leq m(H)n + n$.

Продолжая рассуждения аналогичным образом, на l -м этапе, $l = 3, \dots, L$, порождения в траектории графа G_L получим, что число точек сочленения графа G_l равно $m(G_l) = m(H)n^{l-1}$ при совпадении точек пересечения старых ребер с точками сочленения затравок. В противном случае, если никакая точка пересечения старых ребер одного ранга не совпадает ни с одной из точек сочленения затравок, а значит, каждая из точек пересечения старых ребер дает по одной точке сочленения для графа G_l , то достигается верхняя оценка, которая равна $m(G_l) = m(H)n^{l-1} + (n^l - n)/(n - 1)$.

При произвольной инцидентности старых ребер с точками сочленений затравок или другими точками сочленения, полученными в результате смежности старых ребер одного ранга, число точек сочленения графа G_l оценивается двойным неравенством $m(H)n^{l-1} \leq m(G_l) \leq m(H)n^{l-1} + |Z(G_l)|$, $l = 1, \dots, L$. ■

3. Оценка числа мостов предфрактального графа

Число мостов графа $H = (W, Q)$ обозначим через $k(H)$.

Теорема 2. Для всякого предфрактального графа G_L , порожденного затравкой H , справедливы верхняя и нижняя оценки числа мостов

$$k(H) \leq k(G_L) \leq k(H)|Z(G_L)|,$$

где $Z(G_L)$ — множество всех подграф-затравок предфрактального графа G_L .

Доказательство. Рассмотрим траекторию предфрактального графа G_L , порожденного затравкой $H = (W, Q)$. На затравке $H = (W, Q)$ выделим мост $e = \{v_1, v_2\} \in Q$, удаление которого приводит к разделению затравки на две компоненты. На втором этапе порождения предфрактального графа G_L , после замещения всех вершин затравки, выделенное ребро (уже старое ребро 1-го ранга) $e = \{v'_1, v'_2\} \in E_2$ случайным образом соединит вершины двух подграф-затравок предфрактального графа $G_2 = (V_2, E_2)$. Но удаление ребра e приведет к разделению графа G_2 на компоненты, поскольку мост $e \in E_2$ — единственная цепь, соединяющая концы ребра e , независимо от того, какие вершины ($v_1 \in W$ и $v_2 \in W$ или же $v'_1 \in V_2$ и $v'_2 \in V_2$) она соединяет. Из этих рассуждений вытекает, что все мосты затравки H остаются мостами на всей траектории графа G_L , поэтому число мостов предфрактального графа G_L не меньше числа мостов затравки H : $k(G_L) \geq k(H)$.

Рассмотрим произвольный предфрактальный граф $G_l^* = (V_l^*, E_l^*)$, $l = 2, \dots, L$, выделим на нем подграф-затравку $H = (W, Q)$, которая, в отдельном от графа виде, имеет $k(H)$ мостов. Возникает вопрос, останутся ли мостами для графа G_l^* ребра, являющиеся мостами в отдельно взятой затравке H ? Пусть при удалении моста $e^* = \{v_1^*, v_2^*\} \in Q$ затравка H распадается на две компоненты $H' = (W', Q')$ и $H'' = (W'', Q'')$. Значит, для того чтобы ребро $e^* \in Q$ перестало быть мостом в графе G_l^* , достаточно, чтобы подграфам H' и H'' были инцидентны хотя бы по одному старому ребру $(l-1)$ -го ранга, тем самым нейтрализуя мост e^* и сохраняя связность графа G_l^* при удалении ребра e^* .

Если старые ребра $(l-1)$ -го ранга сохраняют смежность, то ребро e^* будет мостом и для всего графа G_l^* , поскольку при его удалении связность предфрактального графа G_l^* нарушается.

Теперь ясно, что число мостов $k(G_L)$ предфрактального графа G_L , порожденного затравкой H , зависит от того, как часто сохраняется смежность старых ребер графа G_L . Если старые ребра $(l-1)$ -го ранга предфрактального графа G_l , $l = 2, \dots, L$, из траектории предфрактального графа G_L подходят к подграф-затравкам таким образом, что каждый из $k(H)$ мостов образует с какими-либо двумя из старых ребер одного

ранга простую цепь, то мосты отдельно взятой затравки не будут мостами графа G_l , так как при их удалении из подграф-затравки H компоненты, на которые должна была бы распасться отдельная затравка, будут инцидентными старым ребрам, сохраняя этим связность самого графа G_l . В случае выполнения этого правила для всех графов G_l , $l = 2, \dots, L$, из траектории предфрактального графа G_L получим, что все мосты затравок, появляющихся в процессе порождения графа G_L , нейтрализуются старыми ребрами, кроме тех $k(H)$ мостов, которые существовали изначально в графе $G_1 = H$, поскольку для этих мостов не существует старых ребер меньшего ранга. Отсюда следует, что нижняя граница числа мостов графа G_L определяется неравенством $k(G_L) \geq k(H)$.

Для нахождения верхней границы достаточно рассмотреть случай, когда в предфрактальном графе G_L сохраняется смежность старых ребер любого ранга. Действительно, при сохранении смежности старых ребер $(l-1)$ -го ранга предфрактального графа G_l , $l = 2, \dots, L$, все старые ребра, подходящие к затравке H , будут смежны одной из компонент, полученных при удалении одного из мостов. Следовательно, все $k(H)$ мостов затравки H останутся мостами и в графе G_l . Учитывая, что в G_l число затравок равно n^{l-1} (n — число вершин затравки H), замечаем, что число его мостов по сравнению с графом G_{l-1} увеличится на $n^{l-1}k(H)$:

$$k(G_1) = k(H), \quad k(G_2) = k(H) + nk(H), \quad \dots, \quad k(G_l) = k(H)(n^l - 1)/(n - 1).$$

При произвольном построении фрактального графа G_L число его мостов ограничивается неравенствами $k(H) \leq k(G_L) \leq k(H)|Z(G_L)|$. ■

Заключение

Для проведения анализа работоспособности всякой сетевой системы, имеющей сложную изменяющуюся структуру, необходимо моделировать динамику самих изменений в структуре. Это позволяет анализировать изменения важных для сетевой системы связностных характеристик, к которым относятся число точек сочленения и число мостов. В качестве инструментария моделирования структурной динамики можно рассмотреть многие подходы. Процесс порождения предфрактальных графов, несомненно, является сильно ограниченным с точки зрения описания всех возможных сценариев роста структуры сетевой системы, но обладает возможностью прогнозирования изменений характеристик. Основная цель настоящей работы — продемонстрировать возможность получения прогнозируемых диапазонов количественных оценок для различных характеристик предфрактальных графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евин И. А. Введение в теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т. 2. № 2. С. 121–141.
2. Newman M. E. J. Networks: an introduction. New York: Oxford University Press, 2010.
3. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
4. Охтилев М. Ю., Соколов Б. В., Юсупов Р. М. Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных технических объектов. М.: Наука, 2006.
5. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.
6. Мелроуз Дж. Иерархические фрактальные графы и блуждания на них // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 519–523.

7. Кочкаров А. А., Малинецкий Г. Г. Моделирование распространения внешних воздействий по структуре сложной системы // Матем. моделирование. 2006. Т. 18. № 2. С. 51–60.
8. Кочкаров А. А., Кочкаров Р. А. Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 6. С. 1157–1162.