2012 Теоретические основы прикладной дискретной математики №1(15)
DOI 10.17223/20710410/15/4
УДК 511+519.1

О СВОЙСТВАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ СУПЕРПОЗИЦИИ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Д. В. Кручинин

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия

E-mail: KruchininDm@gmail.com

Получены свойства коэффициентов суперпозиции производящих функций $\ln\left((1-F(x))^{-1}\right)$, где $F(x)$ — обыкновенная производящая функция с целыми коэффициентами, позволяющие построить вероятностные проверки натурального числа на простоту. Приведена связь этих свойств с существующими проверками на простоту. Получены новые свойства чисел Люка и биномиальных коэффициентов вида $\binom{2n-1}{n-1}$.

Ключевые слова: *производящие функции, суперпозиция производящих функций, композиция натурального числа, тесты на простоту.*

Производящие функции являются мощным инструментом решения задач теории чисел, комбинаторики, алгебры, теории вероятностей. Одним из направлений в теории производящих функций является исследование коэффициентов их суперпозиции. В [1] показаны возможные пути вычисления таких коэффициентов. Данная работа продолжает исследования коэффициентов суперпозиции, при условии, что внешней функцией является производящая функция $\ln(1/(1-x))$, а внутренней — произвольная обыкновенная производящая функция с целыми коэффициентами.

Рассмотрим функции $f(n)$ и $r(n)$ и их производящие функции $F(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1} f(n)x^n$ и $R(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0} r(n)x^n$ соответственно. Тогда для вычисления функции $g(n)$ коэффициентов суперпозиции производящих функций $G(x)=R\left(F(x)\right)$ справедлива формула

$$g(0)=r(0),$$

$$g(n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\lambda_i>0,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=n}} f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_k)r(k). \tag{1}$$

Следует отметить, что суммирование ведется по всем композициям натурального числа n, имеющим ровно k частей.

Определение 1. Композитой производящей функции $F(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1} f(n)x^n$ называется функция

$$F^{\Delta}(n,k)=\sum_{\substack{\lambda_i>0,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=n}} f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_k). \tag{2}$$

Тогда из формулы (1) следует, что для вычисления суперпозиции $G(x)=R\left(F(x)\right)$ справедлива формула [1]

$$g(n)=\sum_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k)r(k). \tag{3}$$

Очевидно, что если $f(n)$, $r(n)$ — целочисленные функции, то и $g(n)$ является целочисленной функцией.

Рассмотрим суперпозицию производящих функций $G(x) = \ln\left((1 - F(x))^{-1}\right)$ и докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть имеется обыкновенная производящая функция с целыми коэффициентами $F(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} f(n)x^n$ и производящая функция $G(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} g(n)x^n$, где $G(x) = \ln\left((1 - F(x))^{-1}\right)$. Тогда для любых значений $n > 0$ значения выражения $ng(n)$ являются целыми числами.

Доказательство. Согласно (3), для суперпозиции производящих функций $G(x) = \ln\left((1 - F(x))^{-1}\right)$ функция коэффициентов имеет следующее выражение:

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k)/k.$$

Рассмотрим производную $G'(x) = [\ln\left((1 - F(x))^{-1}\right)]'$ и получим выражение

$$\left(\frac{F'(x)}{1 - F(x)}\right) = g_1 + 2g_2x^1 + \ldots + ng_nx^{n-1} + \ldots$$

Рассмотрим левую часть как произведение производящих функций $F'(x)$ и $H(x) = (1 - F(x))^{-1}$. Коэффициенты для $F'(x)$ являются целыми числами. Коэффициенты суперпозиции $H(x)$ также являются целыми числами, поскольку $F(x)$ и $R(x) = (1 - x)^{-1}$ — производящие функции с целыми коэффициентами.

Произведение функций с целыми коэффициентами также имеет целые коэффициенты. Следовательно, значения выражения

$$ng(n) = n\sum_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k)/k \tag{4}$$

являются целыми числами. ■

Следствие 1. Для любой целочисленной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сумма

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} \sum_{\substack{\lambda_i > 0,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=n}} a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}\ldots a_{\lambda_k}$$

является целым числом.

Доказательство. Построим производящую функцию $F(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Тогда композитой этой функции по определению [1] будет

$$F^{\Delta}(n,k) = \sum_{\substack{\lambda_i > 0,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=n}} a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}\ldots a_{\lambda_k}.$$

А значение выражения $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{k} F^{\Delta}(n,k)$ является целым числом. ■

Следствие 2. Пусть имеется обыкновенная производящая функция с целыми коэффициентами $F(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} f(n)x^n$. Тогда для любого простого n значения выражения

$$\frac{ng(n) - f(1)^n}{n} \tag{5}$$

являются целыми числами, где $g(n)$ — функция коэффициентов суперпозиции производящих функций $\ln\left((1 - F(x))^{-1}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим выражение (4). Значение n-го слагаемого в сумме (4) равно целому значению $f(1)^n$ [1], т. е. значение выражения

$$ng(n) - f(1)^n = n \sum_{k=1}^{n-1} F^{\Delta}(n,k)/k$$

является целым числом.

Поскольку n простое, то оно не имеет общих делителей с $k < n$. Следовательно, значение выражения (5) является числом целым. ■

Таким образом, значение выражения

$$\sum_{k=1}^{n-1} F^{\Delta}(n,k)/k, \tag{6}$$

тождественного выражению (5), является целым числом для всех простых n. Для составных n значение (6) может быть как целым, так и не целым. Но если оно не целое, то n однозначно составное.

Полученный результат позволяет строить алгоритмы вероятностных проверок натурального числа на простоту на основе суперпозиции производящих функций $\ln\left((1 - F(x))^{-1}\right)$, где $F(x)$ — обыкновенная производящая функция с целыми коэффициентами. Вероятностные проверки позволяют точно установить, что число является составным (если оно не удовлетворяет некоторым условиям). Если же число удовлетворяет всем условиям проверки, то это еще не означает, что оно простое; в этом случае говорят, что «n — простое число с некоторой вероятностью».

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Пусть задана производящая функция $F(x) = \beta x/(1 - \alpha x)$, где α и β — любые целые числа, не равные 0, и ее композита, согласно [1]:

$$F^{\Delta}(n,k,\alpha) = \binom{n-1}{k-1} \alpha^{n-k} \beta^k.$$

Тогда коэффициенты суперпозиции

$$G(x) = \ln\left((1 - \beta x/(1-\alpha x))^{-1}\right) = \ln\left((1-\alpha x)/(1-(\alpha+\beta)x)\right)$$

имеют следующий вид:

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{\alpha^{n-k}\beta^k}{k}.$$

Отсюда

$$ng(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \alpha^{n-k} \beta^k = (\alpha+\beta)^n - \alpha^n.$$

Таким образом, значение выражения

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^{n-k}\beta^k}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{(\alpha+\beta)^n - \alpha^n - \beta^n}{n}$$

для простых n является целым числом.

Если рассматривать β как некоторую переменную X, а $\alpha = -a$, где a — любое целое число, то с учётом равенства $a^n \equiv a \pmod{n}$ получим следующее тождество:

$$(X-a)^n \equiv (X^n - a) \pmod{n}.$$

Это тождество является основой для детерминированного полиномиального алгоритма проверки чисел на простоту AKS [3].

Пример 2. Пусть задана производящая функция $F(x) = x + x^2$ и её композита, согласно [1], $F^{\Delta}(n,k) = \binom{k}{n-k}$. Тогда коэффициенты суперпозиции $\ln\left((1-x-x^2)^{-1}\right)$ имеют вид

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n-k}\frac{1}{k}.$$

Начальные элементы последовательности $ng(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, равны $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, \ldots$ и совпадают с соответствующими элементами последовательности чисел Люка (A000032 в [2]), что дает основание предполагать, что эти две последовательности совпадают. В этом случае значение выражения $(L_n - 1)/n = (ng(n) - 1)/n$ является целым для простых n, где L_n — числа Люка:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Пример 3. Пусть задана производящая функция для чисел Каталана $F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ и ее композита, согласно [1], $F^{\Delta}(n,k) = \frac{k}{n}\binom{2n-k-1}{n-1}$. Тогда коэффициенты суперпозиции $\ln\left((1-F(x))^{-1}\right)$ имеют следующее выражение:

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{2n-k-1}{n-1}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k-1}{n-1}.$$

Эта формула порождает последовательность целых чисел $ng(n)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$1, 3, 10, 35, 126, 462, 1716, 6435, 24310, 92378, \ldots,$$

которая совпадает с A001700 [2]; поэтому

$$ng(n) = \binom{2n-1}{n-1}.$$

Таким образом, по следствию 2 значение выражения

$$\frac{1}{n}\left(\binom{2n-1}{n-1} - 1\right)$$

является целым для простых n.

Таким образом, получены свойства коэффициентов суперпозиции производящих функций $\ln\left((1-F(x))^{-1}\right)$, где $F(x)$ — обыкновенная производящая функция с целыми коэффициентами. Эти свойства могут служить основой для построения алгоритмов вероятностных проверок натурального числа на простоту. Получены также новые свойства чисел Люка и биномиальных коэффициентов вида $\binom{2n-1}{n-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кручинин В. В.* Комбинаторика композиций и её приложения. Томск: В-Спектр, 2010. 156 с.
2. `www.oeis.org` — J. A. Sloane. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 2011.
3. *Agrawal M., Kayal N., and Saxena N.* PRIMES is in P // Ann. Math. 2004. V. 160. No. 2. P. 781–793.