

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/15/8

УДК 519.17

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГРАФОВ С ЗАДАНЫМ ЧИСЛОМ
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ РЕБЕР МИНИМАЛЬНОГО ВЕРШИННОГО
1-РАСШИРЕНИЯ

М. Б. Абросимов

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия***E-mail:** mic@rambler.ru

Рассматривается задача описания графов, минимальное вершинное 1-расширение которых имеет заданное число дополнительных ребер. Дается решение, когда число дополнительных ребер равно одному, двум и трем.

Ключевые слова: *граф, минимальное вершинное 1-расширение, точное вершинное 1-расширение, оптимальная отказоустойчивая реализация.*

Введение

Понятие вершинного (реберного) расширения происходит из работ [1–3], в которых удалось описать минимальные вершинные расширения для некоторых видов графов. В работе [4] было доказано, что задача проверки вершинного расширения графа является NP-полной, и поэтому в общем виде задача описания минимальных вершинных расширений произвольного графа, скорее всего, решена быть не может. Основное направление исследований в этой области продолжает следовать подходу Дж. П. Хейза, при котором описывается частное решение для графов определенного вида. Можно выделить и другие пути. В данной работе рассматривается задача описания графов, которые имеют минимальные вершинные 1-расширения с заданным числом дополнительных ребер.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k -расширением* (МВ- k Р, k — натуральное) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) граф G^* является вершинным k -расширением графа G , то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^* , получающийся удалением любых его k вершин;
- 2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Граф H называется *точным вершинным k -расширением* графа G , если любой граф, получающийся удалением произвольных k вершин графа H , изоморфен графу G .

Будем использовать основные понятия теории графов, опираясь преимущественно на работу [5]. Очевидно, что минимальным вершинным 1-расширением вполне несвязного графа O_n (то есть графа без ребер) будет вполне несвязный граф O_{n+1} . Заметим далее, что если к произвольному n -вершинному графу G добавить одну вершину и соединить со всеми остальными вершинами, то получившийся граф будет являться

вершинным 1-расширением графа G (*тривиальным*). Очевидно, что количество добавленных ребер есть n . Для некоторых графов тривиальное вершинное 1-расширение является и минимальным, например для полного графа K_n . Таким образом, число дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения произвольного n -вершинного графа заключено между 0 и n .

1. Вспомогательные результаты

Докажем несколько вспомогательных утверждений о свойствах минимальных вершинных k -расширений.

Лемма 1. Минимальное вершинное k -расширение графа без изолированных вершин не содержит вершин со степенью ниже $k + 1$.

Лемма 2. Пусть наибольшая из степеней вершин графа G есть s и в точности m вершин имеют такую степень, тогда минимальное вершинное k -расширение графа G содержит, по крайней мере, $k + m$ вершин степени не ниже s .

Лемма 3. Если максимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное вершинное k -расширение G^* содержит не менее kd дополнительных ребер.

Лемма 4. Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное вершинное k -расширение G^* не содержит вершин степени ниже $d + k$.

Лемма 5. Если максимальная степень вершины минимального вершинного 1-расширения графа есть d , то число дополнительных ребер в расширении не меньше d .

Доказательство. Пусть G — n -вершинный граф из условия соответствующей леммы, G^* — минимальное вершинное k -расширение графа G с числом вершин $(n + k)$.

1. Лемма 1 является частным случаем леммы 4.

2. Если число вершин степени не ниже s в G^* меньше $k + m$, то, удалив k таких вершин (если число вершин меньше k , то можно удалить все вершины степени не ниже s и подходящее количество любых других вершин), получим граф, в котором менее m вершин степени не ниже s . В такой граф нельзя вложить граф G .

3. После удаления любых k вершин из графа G^* в получившемся графе должна оставаться по крайней мере одна вершина степени d . Будем выбирать для удаления из графа G^* последовательно k вершин наибольшей степени. Так как степень каждой вершины не меньше d , то и количество удаленных ребер — не менее kd .

4. Пусть граф G^* имеет вершину v степени ниже $d + k$. Рассмотрим подграф, получающийся из G^* удалением k смежных с v вершин (если степень вершины v меньше k , то можно удалить все смежные с ней вершины и подходящее количество любых других вершин, кроме v). Он содержит вершину степени ниже d , и в него нельзя вложить граф G .

5. Удаление вершины v наибольшей степени d из графа G^* приводит к удалению и d ребер, а по условию граф $G^* - v$ допускает вложение графа G . ■

Замечание 1. Из леммы 1 следует, что минимальное вершинное 1-расширение любого связного графа содержит как минимум 2 дополнительных ребра.

2. Основные результаты

Теорема 1. Минимальное вершинное k -расширение вполне несвязного n -вершинного графа O_n единственно и есть вполне несвязный $(n + k)$ -вершинный граф O_{n+k} . Никакие другие графы не могут иметь минимальные вершинные k -расширения с нулевым числом дополнительных ребер.

Доказательство. Если у графа есть хотя бы одно ребро, то по лемме 5 число дополнительных ребер минимального вершинного k -расширения больше нуля. ■

Степенным множеством графа называется множество, составленное из чисел, являющихся степенями вершин графа. Под *объединением* двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ понимается граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2)$.

Теорема 2. Графы со степенным множеством $\{1, 0\}$ и только они имеют минимальные вершинные 1-расширения с одним дополнительным ребром; для каждого графа со степенным множеством $\{1, 0\}$ такое расширение единственно с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф G . Обозначим через d максимальную из степеней его вершин. Пусть далее G^* — минимальное вершинное 1-расширение графа G , которое отличается от него на одно дополнительное ребро. Граф G отличен от вполне несвязного, так как минимальное вершинное 1-расширение вполне несвязного графа по теореме 1 не имеет дополнительных ребер. Следовательно, $d > 0$.

По лемме 3 $d < 2$, так как в противном случае число дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения больше единицы. Итак, $d = 1$.

Если граф не содержит изолированных вершин, то его степенное множество имеет вид $\{1\}$ — это графы, являющиеся объединением некоторого количества полных двухвершинных графов K_2 . По лемме 1 минимальное вершинное 1-расширение любого такого графа не содержит вершин со степенью ниже 2, а по лемме 5 количество дополнительных ребер также не менее 2. Таким образом, только графы со степенным множеством $\{1, 0\}$ могут иметь минимальное вершинное 1-расширение, отличающееся на одно дополнительное ребро. Покажем, что они действительно имеют такое расширение, причем единственное.

Граф G со степенным множеством $\{1, 0\}$ можно представить в виде $K_2 \cup \dots \cup K_2 \cup O_p$, где $p > 0$ (рис. 1, а). На рис. 1, б представлено минимальное вершинное 1-расширение графа G , которое отличается как раз на одно дополнительное ребро. Легко видеть, что других минимальных вершинных 1-расширений граф G иметь не может: при $p > 1$ минимальное вершинное 1-расширение будет иметь степенное множество $\{1, 0\}$, а при $p = 1$ — степенное множество $\{1\}$. ■



Рис. 1. Граф со степенным множеством $\{1, 0\}$ (а) и его минимальное вершинное 1-расширение (б)

Теорема 3 (Дж. П. Хейз [1]). Единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение n -вершинной цепи P_n есть $(n + 1)$ -вершинный цикл C_{n+1} .

Теорема 4. Среди связных графов только цепи имеют минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными ребрами; для каждой цепи такое расширение единственно с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Рассмотрим произвольный связный граф G . Обозначим через d максимальную из степеней его вершин. Пусть далее G^* — минимальное вершинное 1-расширение графа G , которое отличается от него на два дополнительных ребра. По лемме 1 граф G^* не содержит вершин степени меньше 2, а по лемме 5 он не может содержать вершин степени больше 2, таким образом, граф G^* является регулярным графом степени 2.

Так как граф G связный, то $d > 0$. По лемме 3 $d < 3$, так как в противном случае число дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения было бы больше двух. Итак, установлено, что $d = 1$ или $d = 2$. Рассмотрим оба случая.

Если $d = 1$, то граф G — это 2-вершинная цепь P_2 , которая имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение — цикл C_3 , причем количество дополнительных ребер в точности равно двум.

Если $d = 2$, то граф G может иметь степенное множество либо $\{2\}$, либо $\{2, 1\}$. В первом случае по лемме 4 его минимальное вершинное 1-расширение не может содержать вершин степени ниже 3, а по лемме 5 получаем, что и количество дополнительных ребер должно быть не менее трех.

Заметим, что все проведенные до этого момента рассуждения справедливы не только для связных графов, но и для любых графов без изолированных вершин.

Таким образом, среди связных графов с числом вершин $n > 2$ только граф со степенным множеством $\{2, 1\}$ может иметь минимальное вершинное 1-расширение с двумя дополнительными ребрами. Однако связные графы со степенным множеством $\{2, 1\}$ — это цепи. По теореме 3 цепи удовлетворяют утверждению теоремы. ■

Теорема 5. Среди несвязных графов без изолированных вершин только графы вида $P_n \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$ при $n > 1$ имеют минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными ребрами, причем это расширение с точностью до изоморфизма совпадает с $C_{n+1} \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный несвязный граф G без изолированных вершин. Пусть граф G^* — минимальное вершинное 1-расширение графа G , которое отличается на два дополнительных ребра.

Как было установлено в доказательстве предыдущей теоремы, граф G^* является регулярным графом степени 2, а граф G имеет степенное множество вида $\{2, 1\}$. По условию граф G^* отличается на одну дополнительную вершину и два дополнительных ребра, следовательно, в графе G может быть только две вершины степени 1, которые соединяются в графе G^* ребрами с дополнительной вершиной. Из этих рассуждений можно сделать несколько выводов:

1) граф G имеет единственную компоненту, которой является цепь, а все остальные компоненты являются циклами;

2) все компоненты графа G^* являются циклами;

3) граф G^* — единственное минимальное вершинное 1-расширение графа G .

Докажем, что все компоненты связности графа G^* изоморфны.

Обозначим через P_n компоненту связности графа G , являющуюся цепью. Рассмотрим удаление произвольной вершины v в графе G^* . Граф $G^* - v$ имеет столько же ребер, сколько и граф G , причем G вкладывается в граф $G^* - v$, следовательно, $G^* - v$ изоморфен графу G . Но тогда компонента графа G^* с удаленной вершиной v изоморфна цепи P_n , то есть исходная компонента в графе G^* была циклом C_{n+1} . В силу произвольности выбора получаем, что все компоненты связности в графе G^* изо-

морфны циклу C_{n+1} , то есть граф G^* имеет вид $C_{n+1} \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$, а граф $G = P_n \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$. ■

Замечание 2. В теоремах 1–5 минимальные вершинные 1-расширения являются и точными вершинными 1-расширениями.

Вектором степеней графа называется вектор, составленный из степеней вершин графа в порядке невозрастания.

Теорема 6. Связные графы, имеющие минимальные вершинные 1-расширения с тремя дополнительными ребрами, могут иметь только следующий вид:

- 1) полный граф K_3 ;
- 2) графы с вектором степеней вида $(3, \dots, 3, 2, 2, 2)$, имеющие точное вершинное 1-расширение;
- 3) графы с вектором степеней $(3, 3, 3, \dots, 3, 2, \dots, 2, 1)$ особого вида.

Доказательство. Рассмотрим произвольный связный n -вершинный граф G . Пусть G^* — минимальное вершинное 1-расширение графа G , которое отличается от него на три дополнительных ребра. По лемме 3 в графе G не может быть вершин со степенью больше 3. Перечислим все возможные степенные множества для графа G и затем последовательно их рассмотрим: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{2, 1\}$, $\{3\}$, $\{3, 1\}$, $\{3, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$. Заметим, что по лемме 5 в графе G^* не может быть вершины со степенью больше 3. Кроме того, если в графе G^* есть вершина v степени 3, то граф $G^* - v$ будет изоморфен графу G : действительно, граф G должен вкладываться в любой максимальный подграф графа G^* , но граф $G^* - v$ содержит столько же ребер, сколько и граф G , откуда и следует их изоморфизм.

$\{1\}$: из связных графов такое степенное множество может иметь только цепь P_2 , единственное минимальное вершинное 1-расширение которой по теореме 3 есть цикл C_3 .

$\{2\}$: из связных графов такое степенное множество могут иметь только циклы C_n . По леммам 4 и 5 граф G^* должен быть кубическим графом. Количество ребер в графах G и G^* равно n и $3(n+1)/2$ соответственно. Тогда количество дополнительных ребер графа G^* составит $(n+3)/2$, и только при $n=3$ оно равно трем. Цикл C_3 изоморфен полному графу K_3 , и его минимальное вершинное 1-расширение — полный граф K_4 — отличается от него на три дополнительных ребра. Получаем случай 1 утверждения теоремы.

$\{2, 1\}$: из связных графов такое степенное множество может иметь только цепь P_n . По теореме 3 единственное минимальное вершинное 1-расширение цепи P_n — цикл C_{n+1} , и оно отличается на 2 дополнительных ребра.

$\{3\}$: по лемме 4 в графе G^* степень вершин не ниже 4, а по лемме 5 число дополнительных ребер тогда также не менее 4, следовательно, этот случай исключается.

$\{3, 1\}$: с учетом леммы 4 граф G^* может иметь степенное множество вида $\{3\}$ или $\{3, 2\}$. Первое степенное множество соответствует кубическому графу и в данном случае не подходит, так как при удалении одной вершины кубического графа не может получиться граф с вершиной степени 1. Итак, граф G^* может иметь только степенное множество вида $\{3, 2\}$. Рассмотрим удаление из графа G^* произвольной вершины v степени 3. Как было отмечено ранее, граф $G^* - v$ изоморфен графу G . Если вершина v смежна хотя бы с одной другой вершиной степени 3, то в графе $G^* - v$, а значит, и в графе G есть вершина степени 2, что невозможно. Но тогда в графе G^* вершина v должна быть смежна только с вершинами степени 2. В силу произвольности выбора вершины степени 3 получаем, что граф G^* в данном случае может иметь только вид

$K_{3,2} = O_3 + O_2$ (рис. 2); тогда граф G имеет вид $K_{3,1} = O_1 + O_3$. Легко видеть, что граф $K_{3,2}$ не является минимальным вершинным 1-расширением графа $K_{3,1}$. В самом деле, удаление любой вершины степени 2 из графа $K_{3,2}$ приводит к графу C_4 , в котором нет вершин степени 3.

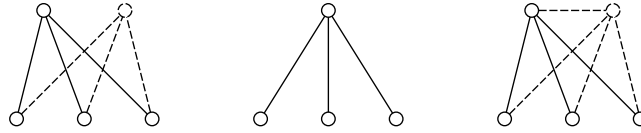


Рис. 2. Графы $K_{3,2}$, $K_{3,1}$ и MB-1P графа $K_{3,1}$

$\{3, 2\}$: с учетом леммы 4 граф G^* является кубическим графом. Любой максимальный подграф графа G^* изоморфен графу G , то есть граф G^* является точным вершинным 1-расширением графа G . Получаем случай 2 утверждения теоремы.

$\{3, 2, 1\}$: аналогично случаю степенного множества $\{3, 1\}$ приходим к выводу, что граф G^* должен иметь степенное множество $\{3, 2\}$. Рассмотрим удаление произвольной вершины v степени 3 из графа G^* . Получившийся граф имеет столько же ребер, сколько и граф G , а следовательно, граф $G^* - v$ изоморфен G . Это означает, что каждая вершина степени 3 в графе G^* соединена с одинаковым количеством вершин степени 2: с 0, 1, 2 или 3 вершинами. Первый случай можно исключить из рассмотрения, так как если вершины степени 3 не смежны ни с одной вершиной степени 2, то граф G^* несвязный. Рассмотрим оставшиеся случаи. Обозначим через m_1 количество вершин степени 3 в графе G^* . По теореме о четности числа вершин нечетной степени число m_1 четно.

И с л у ч а й. Пусть каждая вершина степени 3 графа G^* смежна с 3 вершинами степени 2. Предположим, что в графе G^* есть вершина u степени 2, смежная с двумя вершинами степени 3 (рис. 3,а). Но тогда в графе $G^* - v$ (а значит, и в графе G) будет $m_1 - 1$ вершин степени 3 (рис. 3,б), а в графе $G^* - u$ будет $m_1 - 2$ вершин степени 3 (рис. 3,в), то есть граф G не вкладывается в граф $G^* - u$, что противоречит предположению.

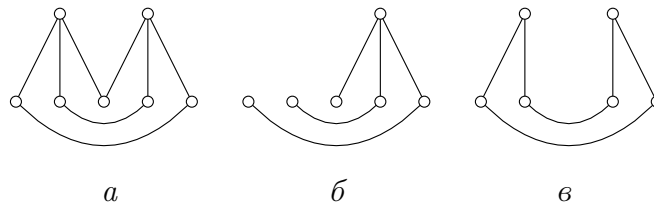


Рис. 3. Случай I

Итак, в графе G^* каждая вершина степени 2 смежна не более чем с одной вершиной степени 3 (рис. 4,а). Это означает, что вершины степени 3 соединены цепями, состоящими из вершин степени 2. Обозначим кратчайшее расстояние между вершинами степени 3 через d_3 . Так как вершины степени 3 несмежны между собой, то $d_3 > 1$. Более того, так как в графе G^* нет вершин степени 2, смежных с двумя вершинами степени 3, то $d_3 > 2$. Не ограничивая общности, будем считать, что расстояние между вершинами v_1 и v_2 степени 3 равно d_3 .

Рассмотрим граф $G^* - v_1$. В этом графе $m_1 - 1$ вершин степени 3, из вершины v_2 выходит цепь длины $d_3 - 1$, и это самая короткая цепь (рис. 4, б).

Рассмотрим граф, получающийся удалением из графа G^* первой вершины степени 2 в цепи, соединяющей вершину v_1 с v_2 . В этом графе также $m_1 - 1$ вершин степени 3, а из вершины v_2 выходит цепь длины $d_3 - 2$ (рис. 4, в). Очевидно, что этот граф не может содержать в себе граф $G^* - v_1$.

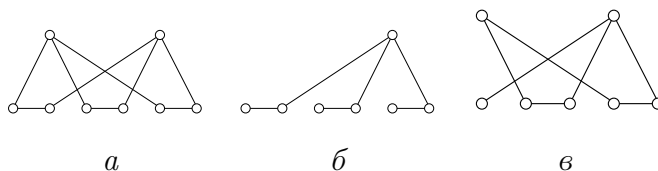


Рис. 4. Случай I. Продолжение

П с л у ч а й. Пусть каждая вершина степени 3 смежна с двумя вершинами степени 2. Рассмотрим пару вершин u_1, u_2 степени 2, смежных с вершиной v степени 3. Если вершины u_1 и u_2 смежны, то граф $G^* - v$ несвязный. Следовательно, граф G^* представляет собой $m_1/2$ пар смежных вершин степени 3. С каждой вершиной степени 3 смежна пара несмежных вершин степени 2 (рис. 5, а). Рассмотрим граф $G^* - v$. В этом графе $m_1/2 - 1$ пар смежных вершин степени 3 и две вершины степени 1, смежные с вершинами степени 2. Таким образом, расстояние от вершины степени 1 до ближайшей вершины степени 3 не менее 2 (рис. 5, б).

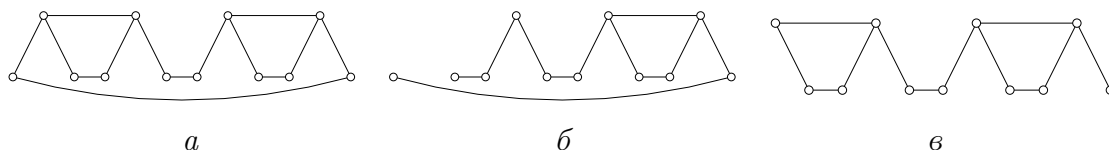


Рис. 5. Случай II

Рассмотрим граф $G^* - u$, где u — произвольная вершина степени 2 (рис. 5, в). Этот граф должен допускать вложение графа G (или изоморфного ему графа $G^* - v$) и отличается от него на одно дополнительное ребро. В графе G^* вершина u смежна с одной вершиной степени 3 и с одной вершиной степени 2; обозначим эти вершины u_1 и w соответственно. В графе $G^* - u$, следовательно, будет $m_1/2 - 1$ пар смежных вершин степени 3 и еще одна вершина u_2 степени 3, смежная только с вершинами степени 2. Вершина w в графе $G^* - u_1$ будет единственной вершиной степени 1, причем она смежна с вершиной степени 3. Предположим, что вложение графа G в граф $G^* - u$ построено. Тогда вершине u_2 может соответствовать только вершина степени 2 и лишнее ребро — ребро, инцидентное вершине u_2 . Обозначим через H граф, получающийся из графа $G^* - u$ после удаления этого ребра. Тогда H должен быть изоморфен $G^* - v$, но в графе H вершина степени 1 смежна с вершиной степени 3, а в графе $G^* - v$ вершины степени 1 смежны вершинам степени 2. Получаем противоречие.

И т а к, остается последняя возможность. Пусть каждая вершина степени 3 смежна с одной вершиной степени 2 и с двумя вершинами степени 3. Но тогда в графе G^* должно быть не менее четырех вершин степени 3, и их количество должно быть четным. Граф $G^* - v$ должен быть изоморфен графу G , одна его вершина имеет степень 1, а остальные — степень 2 или 3.

Пусть u — произвольная вершина графа G^* степени 2. Вершина u не может быть смежна с двумя вершинами степени 2, так как в этом случае в графе $G^* - u$ окажется две вершины степени 1 и вложение графа G будет невозможно. Таким образом, каждая вершина степени 2 смежна либо с двумя вершинами степени 3, либо с одной.

Каждая вершина степени 3 графа G^* смежна с двумя другими вершинами степени 3, то есть граф, индуцированный всеми вершинами степени 3, представляет собой цикл или объединение нескольких циклов. Покажем, что последнее невозможно. Предположим противное и обозначим через k количество циклов, составленных из вершин степени 3, $k > 1$. Будем рассматривать далее только эти циклы. Граф G изоморфен графу, получающемуся из G^* удалением любой вершины степени 3. Удалив одну вершину степени 3, разомкнем один цикл, составленный из вершин степени 3, и в получившемся графе окажется на один цикл меньше: $k - 1$.

Относительно вершин степени 2 рассмотрим две возможности.

1. В графе G^* есть вершина u степени 2, смежная с двумя вершинами степени 3, которые принадлежат различным циклам (рис. 6,а). Удаление вершины u из графа G^* приведет к тому, что циклов останется $k - 2$ (рис. 6,б). Тогда в граф $G^* - u$ нельзя будет вложить граф G (рис. 6,в).

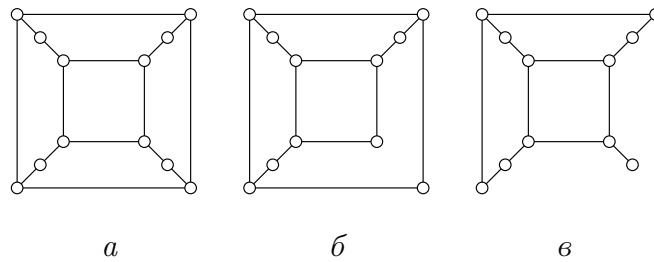


Рис. 6. Случай III

2. В графе G^* нет вершин степени 2, смежных с двумя вершинами степени 3, которые принадлежат различным циклам. Это означает, что все вершины степени 2 смежны с одной вершиной степени 3 и с одной вершиной степени 2 (рис. 7,а). Удаление вершины u степени 2 из графа G^* приведет к тому, что циклов останется $k - 1$, как и в графе G (рис. 7,б), однако в графе G единственная вершина степени 1 смежна с вершиной степени 3, а в графе $G^* - u$ расстояние от единственной вершины степени 1 до вершины степени 3 равно двум. Очевидно, что в граф $G^* - u$ нельзя вложить граф G (рис. 7,в).

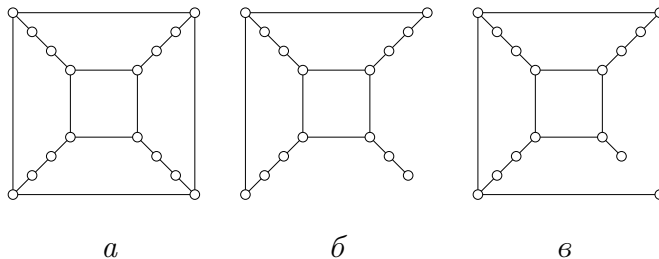


Рис. 7. Случай III. Продолжение

Таким образом, получается, что граф G^* , если он является минимальным вершинным 1-расширением графа G и отличается от него на 3 дополнительных ребра, должен иметь следующий вид:

- 1) степенное множество $\{3, 2\}$;
- 2) количество вершин степени 3 четно и больше 3;
- 3) вершины степени 2 смежны либо с двумя вершинами степени 3, либо с одной вершиной степени 3 и одной вершиной степени 2, то есть вершины степени 3 соединяются цепью, состоящей не более чем из трех ребер;
- 4) вершины степени 3 смежны с двумя другими вершинами степени 3, причем граф, индуцированный всеми вершинами степени 3, представляет собой цикл.

Получаем случай 3 утверждения теоремы. ■

Следствие 1. Семейство из п. 3 теоремы содержит графы с числом вершин $3k - 1$ и $4k - 1$, $k > 1$.

Доказательство. Из доказанных свойств минимальных вершинных 1-расширений графов рассматриваемого семейства следует, что в них каждая вершина степени 3 соединяется цепью из одной или двух вершин степени 2 с другой вершиной степени 3, причём длины цепей одинаковы для всех пар. Если $2k$ — количество вершин степени 3, то на каждую из k пар вершин степени 3 приходится либо одна, либо две вершины степени 2 минимального вершинного 1-расширения. В первом случае получим $3k$ вершин, во втором — $4k$.

Заметим, что для заданного числа вершин всегда можно построить соответствующего представителя семейства. Для этого достаточно построить цикл с числом вершин $2k$, разбить вершины цикла на k пар смежных вершин и каждую из этих пар соединить цепью из одной (двух) вершин. Удалив любую вершину степени 3 из получившегося графа, получим искомого представителя семейства. ■

На рис. 8 представлены все графы и их минимальные вершинные 1-расширения с числом вершин до 8, соответствующие п. 3 доказанной теоремы.

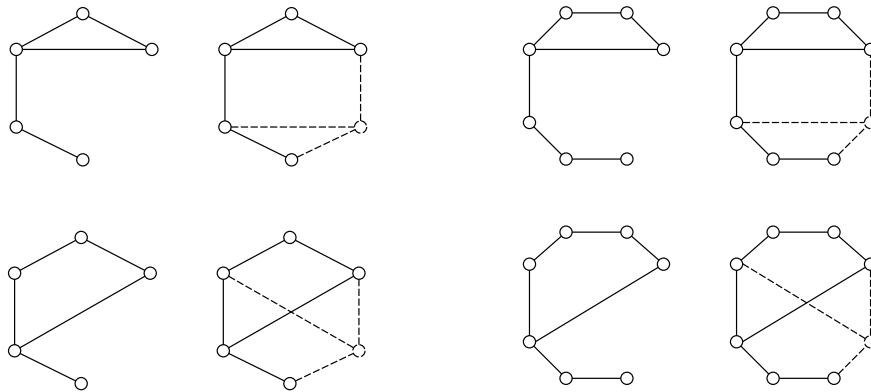


Рис. 8. Малые графы и их МВ-1Р с тремя дополнительными ребрами

Заметим, что во всех рассмотренных случаях графы имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. Harary F. and Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. Harary F. and Hayes J. P. Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.

4. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
5. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.